

Επαναληπτικές Ασκήσεις Α' Λυκείου

Άλγεβρα

Άσκηση 1 Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{(x^5 y^{-2})^{-3} (x^3 y)^2}{x^{-9}} \cdot \frac{x^5}{y^3}$$

1. Να δείξετε ότι $A = y^4 x^4$
2. Να βρείτε την τιμή της παράστασης για $x = 1821, y = (1821)^{-1}$

Άσκηση 2

1. Ναδειχθεί ότι $(a + 2b)^2 - (a - 2b)^2 = 8ab$
2. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$\left(\sqrt{13} + \frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 - \left(\sqrt{13} - \frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2$$

Άσκηση* 3 Έστω a, b οποιοιδήποτε μη-αρνητικοί αριθμοί. Να δείξετε ότι αν ισχύει η ισότητα $(a + b)^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ τότε οι αριθμοί a, b είναι αντίθετοι.

Άσκηση 4 Δίνονται οι αριθμοί $x = \frac{6^5 \cdot 2^{-4}}{3^4}$ και

$$y = \frac{(x^3)^4 \cdot x^{-1}}{x^{-13} : (x^{-2})^7} : \left(\frac{(x^2 : x^{-3})^2 x^9}{(x^{-3})^{-3}}\right)$$

1. Να δείξετε ότι $x = 6$ και να υπολογιστεί το y .
2. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$K = ((x^4 \cdot y^6)^{-2} \cdot (x^2 \cdot y^6)^4) : \left(\frac{x^6}{y^{-2}}\right)^{-3}$$

Άσκηση 5 Αν a, b οποιοιδήποτε αριθμοί, να αποδείξετε ότι

1. $a^2 + ab \geq b(3a - b)$
2. $(1 + a^2)(1 + b^2) \geq 4ab$
3. Ειδικότερα, αν $a \neq 0$, να δείξετε ότι

(α')

$$a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$$

(β')

$$\frac{1}{a^4} + 1 \geq \frac{2}{a^2}$$

Άσκηση 6 Αν οι αριθμοί x, y είναι ομόσημοι και $x < y$, να δείξετε ότι

$$x - y < \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

Άσκηση 7 Αν a, b πραγματικοί αριθμοί με $a > 0, b > 0$, να αποδείξετε ότι:

1.

$$a + \frac{4}{a} \geq 4$$

2.

$$\left(a + \frac{4}{a}\right) \left(b + \frac{4}{b}\right) \geq 16$$

Άσκηση 8 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$1. (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 0$$

$$2. x^2 - 8y + y^2 + 2x + 17 = 0$$

$$3. (4x - 1)^2 + y^2 - y = y - 1$$

Άσκηση 9 Δίνονται οι παραστάσεις $K = 2a^2 + b^2$ και $M = 2ab$, όπου a, b πραγματικοί αριθμοί.

1. Να δείξετε ότι $K \geq M$ για κάθε τιμή των a, b .

2. Για ποιές τιμές των a, b ισχύει η ισότητα $K = M$;

Άσκηση 10 Να αποδείξετε ότι $\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = 4$

Άσκηση* 11 Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

Άσκηση 12 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$A = \sqrt[12]{16^3} + \sqrt[18]{4^9}, B = \sqrt[8]{64^2} - \sqrt[9]{49^7}$$

Άσκηση 13 Να γράψετε με την βοήθεια μίας μόνο ρίζας τις παραστάσεις

$$1. A = \sqrt{5^3} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5^4}$$

$$2. B = \sqrt[3]{2^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}}$$

$$3. C = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2}$$

Άσκηση 14 Αφού βρείτε για ποιές τιμές ορίζεται η παράσταση

$$A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}) (\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$$

να αποδείξετε ότι είναι ανεξάρτητη του x .

Άσκηση 15 Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$B = (\sqrt{2} + 1) (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{7} - \sqrt{6}) (\sqrt{7} - \sqrt{6})$$

Άσκηση 16 Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

$$1. (\sqrt{128} - \sqrt{18}) \cdot (\sqrt{200} - \sqrt{8} - \sqrt{2}) = 70$$

$$2. (\sqrt{45} - \sqrt{5} + \sqrt{19}) \cdot (\sqrt{80} - \sqrt{20} - \sqrt{19}) = 1$$

3.

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11} - \sqrt{7}} + \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11} + \sqrt{7}} = 4,5$$

4.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{20} - \sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{7}{3}$$

5.

$$\frac{1}{(3 - \sqrt{5})^2} + \frac{1}{(3 + \sqrt{5})^2} = \frac{7}{4}$$

Άσκηση 17 Να βρείτε τα αναπτύγματα $(4 + 3\sqrt{2})^2$ και $(4 - 3\sqrt{2})^2$.

Ύστερα, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \sqrt{34 + 24\sqrt{2}} - \sqrt{34 - 24\sqrt{2}}$$

Άσκηση 18 Να λύσετε τις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\alpha') \quad (\lambda - 2)x = \lambda + 1$$

$$\beta') \quad \lambda(\lambda + 1)x = \lambda$$

$$\gamma') \quad \lambda^2 x - x = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

$$\delta') \quad 1 + \lambda x = -\lambda^2(x - 1)$$

$$\epsilon') \quad \lambda(\lambda - x) - 3x = 5(\lambda - x) - 6$$

Άσκηση 19 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1.

$$\frac{2}{x-1} + \frac{1-x}{x^2-1} = \frac{3}{x+1}$$

2.

$$\frac{3}{x-7} = \frac{2}{x} + \frac{4-2x}{x^2-7x}$$

3.

$$\frac{4}{x-3} = \frac{3x-2}{x^2-9}$$

4.

$$\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} = 0$$

Άσκηση 20 Να βρεθούν 3 διαδοχικοί ακέραιοι, έτσι ώστε το άθροισμα τους να είναι κατά δύο μονάδες μεγαλύτερο από το γινόμενο τους.

Άσκηση 21 Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$1. \quad ||x-1|-3|=0$$

$$2. \quad |x^2-1|+|x^4+1|=0$$

$$3. \quad ||x-2|+1|=4$$

$$4. \quad x^2-3|x|=0$$

Άσκηση 22 Να βρεθούν οι περιορισμοί που πρέπει να τεθούν στα α, β , ώστε να ισχύουν οι παρακάτω ισότητες(η κάθεμία ξεχωριστά):

1.

$$\frac{\alpha x}{3} - \frac{\beta x}{3} = \alpha$$

2.

$$\frac{x}{\alpha\beta} = \alpha\beta x$$

3.

$$\frac{x}{\alpha} - \frac{x}{\beta} = 3$$

Άσκηση 23 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$1. \quad \sqrt{x^2-3x+2} = |x-1|$$

$$2. \quad |x^2-2| = x^2$$

$$3. \quad \sqrt{x^2-4} = |1-x|$$

Άσκηση 24 Να λύσετε τις παρακάτω δευτεροβάθμιες εξισώσεις:

$$1. \quad x^2 + 0,3 = 2,26$$

2. $x^2 - x = 0$

3. $x^2 - 1 = 0$

4. $4x^2 + 16 = 0$

Άσκηση 25 Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , για τον οποίο η εξίσωση $\lambda x^2 - 2x + (\lambda - 3) = 0, \lambda \neq 0$ έχει:

1. Καμία ρίζα
2. Μία διπλή ρίζα
3. Δύο άνισες ρίζες

Άσκηση 26 Αν η εξίσωση $x^2 + \lambda x + \lambda^2 - 7 = 0$ έχει διπλή ρίζα το -2 , να βρείτε τις τιμές του λ .

Άσκηση 27 Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - \lambda^3 x - (|\lambda| + 2) = 0$ έχει δύο ρίζες για οποιοδήποτε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 28 Να λύσετε τις εξισώσεις:

1. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
2. $3x^4 = 20 - 2x^2$
3. $x^{10} - 33x^5 + 32 = 0$
4. $x^2 - 3|x - 1| - 1 = 0$
5. $3x^2 - 2|x| - 1 = 0$
6. $(x - 2)^2 - 3|x - 2| = -2$

Άσκηση 29

Αν $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}, \rho_1, \rho_2 \neq 0$ ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, όπου $\alpha, \gamma \neq 0$, να δείξετε ότι οι $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}$ είναι ρίζες της εξίσωσης $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$.

Άσκηση* 30 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda + 5)x + 2\lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε οι ρίζες της εξίσωσης:

1. Να είναι αντίθετες
2. Να είναι αντίστροφες
3. Να ικανοποιούν την σχέση $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 20$
4. Να ικανοποιούν την σχέση

$$\left(\rho_1 - \frac{2}{\rho_2}\right) \left(\rho_2 - \frac{2}{\rho_1}\right) = 8$$

Άσκηση 31 Να λύστε τις εξισώσεις:

1.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

2.

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$$

Άσκηση* 32 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ με $\beta > 1$ και $|\alpha| = 2\beta$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 για τις οποίες ισχύει

$$\frac{1}{|\rho_1|} + \frac{1}{|\rho_2|} \geq 2$$