

Ανισώσεις

Άσκηση 1 Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

1. $2x - 1 < 10$

2. $3 - 4x \geq x - 5$

3. $x^4 + 1 > 0$

4. $x^2 - 1 > 0$

5. $1 - x^2 > 2$

6. $-1 \leq x^2$

Άσκηση 2 Να μετατρέψετε, αν γίνεται, σε γινόμενα πρώτων παραγόντων τα παρακάτω τριώνυμα. Ύστερα να βρείτε το πρόσημο τους για τις διάφορες τιμές $x \in \mathbb{R}$.

1. $x^2 + 3x - 2$

2. $x^2 - 3x - 2$

3. $11x^2 + 12x - 10$

4. $4x^2 - 3x + 4$

5. $x^2 + 1$

6. $x^2 - 1$

Άσκηση 3 Αν a, b οποιοιδήποτε αριθμοί, να αποδείξετε ότι

1. $a^2 + ab \geq b(3a - b)$

2. $(1 + a^2)(1 + b^2) \geq 4ab$

3. Ειδικότερα, αν $a \neq 0$, να δείξετε ότι

(α')

$$a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$$

(β')

$$\frac{1}{a^4} + 1 \geq \frac{2}{a^2}$$

Άσκηση 4 Αν οι αριθμοί x, y είναι ομόσημοι και $x < y$, να δείξετε ότι

$$x - y < \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

Άσκηση 5 Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις:

1. $x^2 + 3x - 2 < 0$
2. $x^2 - 3x - 2 > 0$
3. $11x^2 + 12x - 10 \geq 0$
4. $4x^2 - 3x + 4 \leq 0$
5. $x^2 + 1 < 0$
6. $x^2 - 1 > 2$

Άσκηση 6 Αν a, b πραγματικοί αριθμοί με $a > 0, b > 0$, να αποδείξετε ότι:

1.
$$a + \frac{4}{a} \geq 4$$
2.
$$\left(a + \frac{4}{a}\right) \left(b + \frac{4}{b}\right) \geq 16$$

Άσκηση 7 Δίνονται οι παραστάσεις $K = 2a^2 + b^2$ και $M = 2ab$, όπου a, b πραγματικοί αριθμοί.

1. Να δείξετε ότι $K \geq M$ για κάθε τιμή των a, b .
2. Για ποιές τιμές των a, b ισχύει η ισότητα $K = M$;

Άσκηση 8 Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

1. $5x^2 > 2x$
2. $2x - 1 < x^2$
3. $3x \leq 2x^2$
4. $-\frac{2}{3}x + x^2 - 3 \geq 0$
5. $20 > x - x^2$

Ύστερα, να βρείτε για ποιές τιμές του $x \in \mathbb{R}$ συναληθεύουν οι ανισώσεις 1,2 και 3,4.

Άσκηση* 9 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ με $\beta > 1$ και $|\alpha| = 2\beta$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 για τις οποίες ισχύει

$$\frac{1}{|\rho_1|} + \frac{1}{|\rho_2|} \geq 2$$

Άσκηση 10 Να βρείτε για ποιούς πραγματικούς αριθμούς συναληθεύουν οι ανισώσεις

$$x^2 - 3x + 2 > 0, \quad 3x^2 - 2x - 5 \leq 0$$

Άσκηση 11 Να λύσετε τις παρακάτω διπλές ανισώσεις:

1. $1 < x - 1 < 2$
2. $3 < x + 2 < 4$
3. $x < 1 - x^2 < 2x$