

Εξισώσεις

Άσκηση 1 Να λύσετε τις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α') $(\lambda - 2)x = \lambda + 1$

β') $\lambda(\lambda + 1)x = \lambda$

γ') $\lambda^2 x - x = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$

δ') $1 + \lambda x = -\lambda^2(x - 1)$

ε') $\lambda(\lambda - x) - 3x = 5(\lambda - x) - 6$

Άσκηση 2 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1.

$$\frac{2}{x-1} + \frac{1-x}{x^2-1} = \frac{3}{x+1}$$

2.

$$\frac{3}{x-7} = \frac{2}{x} + \frac{4-2x}{x^2-7x}$$

3.

$$\frac{4}{x-3} = \frac{3x-2}{x^2-9}$$

4.

$$\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} = 0$$

Άσκηση 3 Να βρεθούν 3 διαδοχικοί ακέραιοι, έτσι ώστε το άθροισμα τους να είναι κατά δύο μονάδες μεγαλύτερο από το γινόμενο τους.

Άσκηση 4 Να λυθούν οι εξισώσεις:

1. $||x-1|-3|=0$

2. $|x^2-1|+|x^4+1|=0$

3. $||x-2|+1|=4$

4. $x^2-3|x|=0$

Άσκηση 5 Να βρεθούν οι περιορισμοί που πρέπει να τεθούν στα α, β , ώστε να ισχύουν οι παρακάτω ισότητες(η κάθε μία ξεχωριστά):

1.

$$\frac{\alpha x}{3} - \frac{\beta x}{3} = \alpha$$

2.

$$\frac{x}{\alpha\beta} = \alpha\beta x$$

3.

$$\frac{x}{\alpha} - \frac{x}{\beta} = 3$$

Άσκηση 6 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$1. \sqrt{x^2 - 3x + 2} = |x - 1|$$

$$2. |x^2 - 2| = x^2$$

$$3. \sqrt{x^2 - 4} = |1 - x|$$

Άσκηση 7 Να λύσετε τις παρακάτω δευτεροβάθμιες εξισώσεις:

$$1. x^2 + 0,3 = 2,26$$

$$2. x^2 - x = 0$$

$$3. x^2 - 1 = 0$$

$$4. 4x^2 + 16 = 0$$

Άσκηση 8 Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , για τον οποίο η εξίσωση $\lambda x^2 - 2x + (\lambda - 3) = 0, \lambda \neq 0$ έχει:

1. Καμία ρίζα

2. Μία διπλή ρίζα

3. Δύο άνισες ρίζες

Άσκηση 9 Αν η εξίσωση $x^2 + \lambda x + \lambda^2 - 7 = 0$ έχει διπλή ρίζα το -2 , να βρείτε τις τιμές του λ .

Άσκηση 10 Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - \lambda^3 x - (|\lambda| + 2) = 0$ έχει δύο ρίζες για οποιοδήποτε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 11 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$1. x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$2. 3x^4 = 20 - 2x^2$$

$$3. x^{10} - 33x^5 + 32 = 0$$

$$4. x^2 - 3|x - 1| - 1 = 0$$

$$5. 3x^2 - 2|x| - 1 = 0$$

$$6. (x - 2)^2 - 3|x - 2| = -2$$

Άσκηση 12

Αν $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}, \rho_1, \rho_2 \neq 0$ ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, όπου $\alpha, \gamma \neq 0$, να δείξετε ότι οι $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}$ είναι ρίζες της εξίσωσης $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$.

Άσκηση* 13 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda + 5)x + 2\lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε οι ρίζες της εξίσωσης:

1. Να είναι αντίθετες
2. Να είναι αντίστροφες
3. Να ικανοποιούν την σχέση $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 20$
4. Να ικανοποιούν την σχέση

$$\left(\rho_1 - \frac{2}{\rho_2}\right) \left(\rho_2 - \frac{2}{\rho_1}\right) = 8$$

Άσκηση 14 Να λύστε τις εξισώσεις:

1.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

2.

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$$