

Πραγματικοί Αριθμοί

Άσκηση 1 Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{(x^5 y^{-2})^{-3} (x^3 y)^2}{x^{-9}} \cdot \frac{x^5}{y^3}$$

1. Να δείξετε ότι $A = y^4 x^4$
2. Να βρείτε την τιμή της παράστασης για $x = 1821, y = (1821)^{-1}$

Άσκηση 2

1. Ναδειχθεί ότι $(a + 2b)^2 - (a - 2b)^2 = 8ab$
2. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$\left(\sqrt{13} + \frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 - \left(\sqrt{13} - \frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2$$

Άσκηση* 3 Έστω a, b οποιοιδήποτε μη-αρνητικοί αριθμοί. Να δείξετε ότι αν ισχύει η ισότητα $(a + b)^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ τότε οι αριθμοί a, b είναι αντίθετοι.

Άσκηση 4 Δίνονται οι αριθμοί $x = \frac{6^5 \cdot 2^{-4}}{3^4}$ και

$$y = \frac{(x^3)^4 \cdot x^{-1}}{x^{-13} : (x^{-2})^7} : \left(\frac{(x^2 : x^{-3})^2 x^9}{(x^{-3})^{-3}}\right)$$

1. Να δείξετε ότι $x = 6$ και να υπολογιστεί το y .
2. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$K = ((x^4 \cdot y^6)^{-2} \cdot (x^2 \cdot y^6)^4) : \left(\frac{x^6}{y^{-2}}\right)^{-3}$$

Άσκηση 5 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 0$
2. $x^2 - 8y + y^2 + 2x + 17 = 0$
3. $(4x - 1)^2 + y^2 - y = y - 1$

Άσκηση 6 Να αποδείξετε ότι $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} = 4$

Άσκηση* 7 Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

Άσκηση 8 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$A = \sqrt[12]{16^3} + \sqrt[18]{4^9}, B = \sqrt[8]{64^2} - \sqrt[9]{49^7}$$

Άσκηση 9 Να γράψετε με την βοήθεια μίας μόνο ρίζας τις παραστάσεις

1. $A = \sqrt{5^3} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5^4}$

2. $B = \sqrt[3]{2^2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt[4]{2}}}$

3. $C = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2}$

Άσκηση 10 Αφού βρείτε για ποιές τιμές ορίζεται η παράσταση

$$A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}) (\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$$

να αποδείξετε ότι είναι ανεξάρτητη του x .

Άσκηση 11 Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$B = (\sqrt{2} + 1) (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{7} - \sqrt{6}) (\sqrt{7} - \sqrt{6})$$

Άσκηση 12 Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

1. $(\sqrt{128} - \sqrt{18}) \cdot (\sqrt{200} - \sqrt{8} - \sqrt{2}) = 70$

2. $(\sqrt{45} - \sqrt{5} + \sqrt{19}) \cdot (\sqrt{80} - \sqrt{20} - \sqrt{19}) = 1$

3.

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11} - \sqrt{7}} + \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11} + \sqrt{7}} = 4,5$$

4.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{20} - \sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{7}{3}$$

5.

$$\frac{1}{(3 - \sqrt{5})^2} + \frac{1}{(3 + \sqrt{5})^2} = \frac{7}{4}$$

Άσκηση 13 Να βρείτε τα αναπτύγματα $(4 + 3\sqrt{2})^2$ και $(4 - 3\sqrt{2})^2$.

Ύστερα, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \sqrt{34 + 24\sqrt{2}} - \sqrt{34 - 24\sqrt{2}}$$