

Διανύσματα

Άσκηση 1 Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(-2, 5)$, $B(7, 8)$, $\Gamma(1, -4)$.

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $x = \overrightarrow{AB}$ και $y = \overrightarrow{A\Gamma}$.
2. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $x \cdot y$.
3. Να βρείτε την γωνία $B\hat{A}\Gamma$.

Άσκηση 2 Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 4$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

1. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
2. Να βρείτε το μέτρο $|\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}|$.
3. Να αποδείξετε ότι $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 15$.

Άσκηση 3 Δίνονται τα $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$.

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.
2. Να βρείτε το μέτρο του $\vec{\gamma}$.
3. Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

Άσκηση 4 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v} = (3, 0)$, $\vec{w} = (-3, 4)$.

1. Να δείξετε ότι δεν είναι παράλληλα.
2. Βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{z}$ παράλληλο στο $\vec{v}$, και κατόπιν υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{w} - 3\vec{z}) \cdot (2\vec{v} - \vec{z})$.

Άσκηση 5 Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (3, -1)$.

1. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} = (1, -2)$.
2. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{A\Gamma}$.
3. Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A\Gamma}|$.

Άσκηση* 6 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -2)$ και $\vec{\beta} = (1, 1)$ τα οποία έχουν κοινή αρχή το σημείο $K(2, 1)$.

1. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.
2. Αν το σημείο A είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\alpha}$, το B είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\beta}$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας AB .
 - (α') Να δείξετε ότι $A = (4, -1)$ και $B = (3, 2)$.
 - (β') Να δειχθεί ότι $3x_\Gamma + y_\Gamma = 11$.
 - (γ') Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, αν ισχύει ότι το Γ είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB και επίσης $|\vec{K\Gamma}| = 0.5 \cdot |\vec{AB}|$.

Άσκηση 7 Δίνονται τα σημεία $A(-2, 3)$, $B(0, 8)$, $\Gamma(5, 3)$ και $\Delta(10, 5)$. Να υπολογίσετε:

1. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{\Gamma\Delta}$.
2. τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta}$ με τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 8 Δίνεται παραλληλόγραμμο $OACB$ με $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$.

1. Να δείξετε ότι $|\vec{OC}| = |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2$
2. Να δείξετε ότι $|\vec{AB}| = |\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2$

Αν τώρα ισχύει ότι $|\vec{OC}| = |\vec{AB}|$, να δείξετε ότι το $OACB$ είναι ορθογώνιο.

Άσκηση 9 Δίνονται τα σημεία $(1, 2)$, $B(3, 4)$ και $C(5, -2)$.

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.
2. Αν M είναι το μέσο του BC , να βρείτε τα μέτρα των $\vec{AM}$ και $\vec{BC}$.
3. Να γραφτεί το $\vec{BC}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{AC}$ και $\vec{AM}$.