

Άλγεβρα Β΄ Λυκείου

Τράπεζα θεμάτων Λύσεις

8-10-2022

236 Ασκήσεις



Στέλιος Μιχαήλογλου – Δημήτρης Πατσιμάς – Νίκος Τούντας

www.Askisopolis.gr

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Θέμα 2ο

14321. Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2 : x - 2y = -2$.

α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο M.

(Μονάδες 13)

β) Να δείχθεί ότι η ευθεία $\varepsilon_3 : 3x + y = 8$ διέρχεται από το M.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Για να προσδιορίσουμε το σημείο τομής των ευθειών αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned} \text{τους: } \begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 2y = -2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ x - 2(6 - 2x) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ x - 12 + 4x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ x + 4x = 12 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} y = 6 - 2x \\ 5x = 10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ x = \frac{10}{5} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2 \cdot 2 = 2 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα το σημείο τομής των δυο ευθειών είναι $M(2,2)$

β) Η ευθεία ε_3 διέρχεται από το M αν και μόνο αν $3 \cdot 2 + 2 = 8 \Leftrightarrow 6 + 2 = 8$ ισχύει

15006.α) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 5x - 10y = 3 \end{cases}$.

(Μονάδες 13)

β) Τι συμπεραίνετε για τη σχετική θέση των ευθειών $\varepsilon_1 : 2x - 4y = -2$ και $\varepsilon_2 : 5x - 10y = 3$;

(Μονάδες 12)

Λύση

$$\alpha) \begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 5x - 10y = 3 \end{cases} \begin{matrix} :2 \\ :5 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -1 \\ x - 2y = \frac{3}{5} \end{cases} \text{ άρα } \frac{3}{5} = -1 \text{ αδύνατο.}$$

β) Επειδή το σύστημα είναι αδύνατο, οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

15011. Ο Κώστας καταθέτει σε μια τράπεζα 15 χαρτονομίσματα των 20 € και 50 €. Συμβολίζουμε με x και y το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 20 € και 50 € αντίστοιχα.

α) i. Δίνονται οι εξισώσεις: 1. $y = 15 - x$ 2. $y - x = 15$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την σχέση των x και y .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ii. Η συνολική αξία των χρημάτων είναι 480 €. Δίνονται, ακόμα, οι εξισώσεις:

3. $50y - 20x = 480$

4. $20x + 50y = 480$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την συνολική αξία των χρημάτων σε σχέση με τα x και y . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

β) Επιλύοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων που επιλέξατε στα ερωτήματα αi) και αii) να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 20 € και 50 € κατάθεσε ο Κώστας.

(Μονάδες 11)

Λύση

α) i. Όλα τα χαρτονομίσματα είναι 15, οπότε το άθροισμα των x και y είναι 15, δηλαδή σωστή είναι η εξίσωση 1. $y = 15 - x \Leftrightarrow y + x = 15$.

ii. Τα x χαρτονομίσματα των 20 € έχουν αξία $20x$ €. Αντίστοιχα τα y χαρτονομίσματα των 50 € έχουν αξία $50y$ €. Η συνολική αξία είναι 480 €, οπότε σωστή είναι η εξίσωση 4. $20x + 50y = 480$.

$$\beta) \begin{cases} y = 15 - x \\ 20x + 50y = 480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - x \\ 20x + 50(15 - x) = 480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - x \\ 20x + 750 - 50x = 480 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 15 - x \\ -30x = -270 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - 9 = 6 \\ x = 9 \end{cases}$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση $x = 9$ είναι τα χαρτονομίσματα των 20 € και $y = 6$ τα χαρτονομίσματα των 50 €.

15016. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το ζεύγος $(0,4)$ δεν αποτελεί λύση του παραπάνω συστήματος.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\varepsilon_1): 3x + 2y = 8$ και

$(\varepsilon_2): 2x - y = 3$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Το σημείο $(0,4)$ είναι λύση του συστήματος, αν και μόνο αν: $\begin{cases} 3 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 8 \\ 2 \cdot 0 - 4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 = 8 \\ -4 = 3 \end{cases}$ αδύνατο.

Άρα δεν αποτελεί λύση του παραπάνω συστήματος.

β) $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - 3 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2(2x - 3) = 8 \\ 2x - 3 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4x - 6 = 8 \\ 2x - 3 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 14 \\ 2x - 3 = y \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \cdot 2 - 3 = 1 \end{cases} \text{ . Λύση του συστήματος είναι το } (x, y) = (2, 1) \text{ .}$$

γ) Το σημείο τομής των ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ έχει συντεταγμένες που αποτελούν λύση του συστήματος των εξισώσεών τους, άρα το σημείο τομής τους είναι το $(2, 1)$.

15195.α) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 5x - y = -1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$.

(Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε τις ευθείες $(\varepsilon_1): 5x - y = -1$ και $(\varepsilon_2): 3x + y = 2$ και να ερμηνεύσετε

γραφικά το αποτέλεσμα του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) $\begin{cases} 5x - y = -1 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} 5x - y = -1 \\ 5x + 3x - y + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y = -1 \\ 8x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{8} \text{ και από την (1)} \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{8} + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - \frac{3}{8} = \frac{13}{8}$

Λύση του συστήματος $(x, y) = \left(\frac{1}{8}, \frac{13}{8}\right)$.

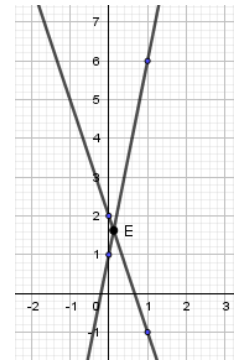
β) Κατασκευάζουμε πίνακες τιμών για τις δύο ευθείες

$$(\varepsilon_1): 5x - y = -1$$

x	0	1
y	1	6

$$(\varepsilon_2): 3x + y = 2$$

x	0	1
y	2	-1



Το σημείο τομής Ε των δύο ευθειών έχει συντεταγμένες $\left(\frac{1}{8}, \frac{13}{8}\right)$.

15849. Σε μια συνεστίαση μεταξύ συγγενών παρευρίσκονται οι γονείς με τα παιδιά τους. Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς. Κάθε γονιός πλήρωσε 12€ και κάθε παιδί τα μισά.

Ο συνολικός λογαριασμός ήταν 300€.

α) Αν x το πλήθος των γονιών και y το πλήθος των παιδιών, να διαλέξετε από τις παρακάτω επιλογές, ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που εκφράζει τα δεδομένα του παραπάνω προβλήματος.

A.
$$\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$$

Γ.
$$\begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$$

Δ.
$$\begin{cases} y = x + 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$$

(Μονάδες 10)

β) Από τη λύση του συστήματος που επιλέξατε στο α) ερώτημα να βρείτε πόσοι γονείς και πόσα παιδιά υπήρχαν στο τραπέζι.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς, τότε η εξίσωση που προκύπτει είναι $y = x + 5$ (1). Επίσης, το ποσό που πλήρωσαν οι γονείς είναι $12x$ και το ποσό που πλήρωσαν τα παιδιά είναι $6y$. Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι: $12x + 6y = 300$ (2)
Το σύστημα των δύο εξισώσεων είναι το Γ.

$$\beta) \begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6(x + 5) = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6x + 30 = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 5 \\ 18x = 270 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 + 5 = 20 \\ x = 15 \end{cases}$$

Άρα, οι γονείς ήταν 15 και τα παιδιά 20.

18431. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 6x + ky = 8 \end{cases}$ με αγνώστους x, y και k παράμετρος.

α) Να λύσετε το σύστημα όταν $k = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε το σύστημα όταν $k = 1$.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Για $k = 2$ είναι $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 6x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 2y = 22 \\ 6x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow 22 = 8$ αδύνατο.

β) Για $k = 1$ είναι $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 6x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 11 \\ -6x - y = -8 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} 3x + y = 11 \\ -3x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 \text{ και } -3 + y = 11 \Leftrightarrow y = 14$

21227.α) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 5x - y = 5 \\ -5x + y = 2 \end{cases}$. (Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε τις ευθείες $(\varepsilon_1): 5x - y = 5$ και $(\varepsilon_2): -5x + y = 2$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του α) ερωτήματος. (Μονάδες 13)

Λύση

α) $\begin{cases} 5x - y = 5 \\ -5x + y = 2 \end{cases} \xrightarrow{+} 0 = 7$ αδύνατο.

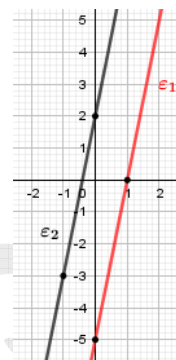
β) Για την ευθεία $(\varepsilon_1): 5x - y = 5$ έχουμε:

x	0	1
y	-5	0

Για την ευθεία $(\varepsilon_2): -5x + y = 2$ έχουμε:

x	0	-1
y	2	-3

Οι δύο ευθείες είναι παράλληλες, δηλαδή δεν έχουν κοινό σημείο, που γραφικά εκφράζει ότι το σύστημα του α) ερωτήματος είναι αδύνατο



Θέμα 4ο

15117. Μια παρέα τεσσάρων φίλων παραγγέλλει σάντουιτς. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η παραγγελία τους. Τα συστατικά των σάντουιτς είναι βιολογικά και το ψωμί είναι ολικής άλεσης (βιολογικό). Το ψωμί για κάθε σάντουιτς έχει κόστος 0,3 ευρώ. Το πρώτο σάντουιτς έχει 2 φέτες ζαμπόν, 4 φέτες τυρί, δεν έχει γαλοπούλα και κοστίζει 3,8 ευρώ. Το δεύτερο έχει 1 φέτα ζαμπόν, 2 φέτες τυρί, 3 φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 3,55 ευρώ. Το τρίτο έχει 3 φέτες ζαμπόν, δεν έχει τυρί, έχει 3 φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 4,05 ευρώ. Ο σερβιτόρος δεν έχει προλάβει να συμπληρώσει το κόστος του τελευταίου σάντουιτς.

σάντουιτς	φέτες ζαμπόν	φέτες τυρί	φέτες γαλοπούλα	ψωμί	κόστος
1 ^ο	2	4	0	0,3€	3,8 €
2 ^ο	1	2	3	0,3€	3,55 €
3 ^ο	3	0	3	0,3€	4,05 €
4 ^ο	2	2	1	0,3€	
				Σύνολο	

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε πόσο κοστίζει η μία φέτα τυρί, η μία φέτα γαλοπούλα και η μία φέτα ζαμπόν.

(Μονάδες 10)

γ) Πόσα χρήματα θα πληρώσουν συνολικά οι τέσσερις φίλοι για την παραγγελία τους;

(Μονάδες 6)

Λύση

α) Αν η μία φέτα ζαμπόν κοστίζει x ευρώ, η μία φέτα τυρί y ευρώ και η μία φέτα γαλοπούλα z ευρώ, προκύπτει το παρακάτω σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 0,3 = 3,8 \\ x + 2y + 3z + 0,3 = 3,55 \\ 3x + 3z + 0,3 = 4,05 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 3,5 \\ x + 2y + 3z = 3,25 \\ 3x + 3z = 3,75 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} 2x + 4y = 3,5 \\ x + 2y + 3z = 3,25 \\ 3x + 3z = 3,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 3,5 - 2x \\ x + 2y + 3z = 3,25 \\ 3z = 3,75 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3,5 - 2x}{4} \\ x + 2 \cdot \frac{3,5 - 2x}{4} + 3(1,25 - x) = 3,25 \\ z = 1,25 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3,5 - 2x}{4} \\ 2x + 3,5 - 2x + 6(1,25 - x) = 6,5 \\ z = 1,25 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3,5 - 2x}{4} \\ 3,5 + 7,5 - 6x = 6,5 \\ z = 1,25 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3,5 - 2x}{4} \\ 11 - 6,5 = 6x \\ z = 1,25 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3,5 - 2x}{4} \\ 4,5 = 6x \\ z = 1,25 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3,5 - 2 \cdot 0,75}{4} = 0,5 \\ x = 0,75 \\ z = 1,25 - 0,75 = 0,5 \end{cases}$$

Τελικά, η μία φέτα ζαμπόν κοστίζει $x = 0,75$ ευρώ, η μία φέτα τυρί κοστίζει $y = 0,5$ ευρώ και η μία φέτα γαλοπούλα κοστίζει $z = 0,5$ ευρώ.

γ) Το τέταρτο σάντουιτς κοστίζει $2 \cdot 0,75 + 2 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 + 0,3 = 3,3$ €.

Συνολικά θα πληρώσουν λοιπόν: $3,8 + 3,55 + 4,05 + 3,3 = 14,7$ €

14289. Ο Κώστας έχει τρία παιδιά. Δύο δίδυμα κορίτσια και ένα αγόρι. Στην ερώτηση πόσων χρονών είναι τα παιδιά του απάντησε ως εξής.

1. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14

2. Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης μου επί την ηλικία του γιου μου είναι 24

3. Το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα στοιχεία 1. και 2. που έδωσε ο Κώστας.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του Κώστα.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Έστω x (>0) χρονών είναι η ηλικία κάθε κοριτσιού και y (>0) του αγοριού, τότε από

1 : $x + x + y = 14$ και από 2 : $x \cdot y = 24$.

β) Λύνουμε το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων

$$\begin{cases} 2x + y = 14 \\ x \cdot y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 14 - 2x \\ x \cdot (14 - 2x) = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 14 - 2x \\ 14x - 2x^2 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 14 - 2x \\ -2x^2 + 14x - 24 = 0 \end{cases}$$

Η εξίσωση $-2x^2 + 14x - 24 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 196 - 192 = 4$ και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-14 \pm 2}{-4} \Leftrightarrow x_1 = 3 \text{ και } x_2 = 4$$

Επομένως: για $x = 3$ έχουμε $y = 14 - 2 \cdot 3 \Leftrightarrow y = 8$ και για $x = 4$ έχουμε $y = 14 - 2 \cdot 4 \Leftrightarrow y = 6$.

Όμως από 3, πρέπει $2x < y$ που ισχύει όταν $x = 3$ και $y = 8$, επομένως τα κορίτσια είναι 3 χρονών και το αγόρι 8 χρονών.

14237. Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω:

Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού. Ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς την ηλικία του παιδιού ισούται με $\frac{11}{3}$. Επιπλέον το άθροισμα των ηλικιών και των τριών

ισούται με 115 χρόνια.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την ηλικία του καθενός. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Έστω $x(>0)$ η ηλικία μητέρας, $y(>0)$ η ηλικία του παιδιού και $z(>0)$ η ηλικία του πατέρα.

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε: $x = 3y$, $\frac{z}{y} = \frac{11}{3} \Leftrightarrow 3z = 11y$ και $x + y + z = 115$

Άρα έχουμε το σύστημα (Σ):
$$\begin{cases} x = 3y \\ 11y = 3z \\ x + y + z = 115 \end{cases}$$

β) (Σ):
$$\begin{cases} x = 3y \\ 11y = 3z \\ x + y + z = 115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y & (1) \\ z = \frac{11}{3}y & (2) \\ x + y + z = 115 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \xRightarrow{(1),(2)} 3y + y + \frac{11}{3}y = 115 \Leftrightarrow 9y + 3y + 11y = 345 \Leftrightarrow 23y = 345 \Leftrightarrow y = 15$$

$$(1) \Rightarrow x = 3 \cdot 15 = 45 \quad (2) \Rightarrow z = \frac{11}{3} \cdot 15 = 55$$

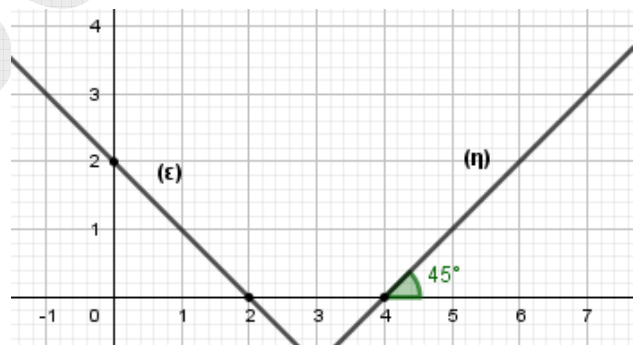
Άρα η μητέρα είναι 45 χρονών, το παιδί 15 και ο πατέρας 55.

14235. α) Με βάση τα δεδομένα του παρακάτω σχήματος, να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) και (η).

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (η).

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Η ευθεία (ε) έχει εξίσωση της μορφής $y = ax + \beta$ και διέρχεται από τα σημεία $(0, 2)$ και $(2, 0)$, οπότε: $2 = a \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2$ και $0 = 2a + \beta \Leftrightarrow 2a + 2 = 0 \Leftrightarrow 2a = -2 \Leftrightarrow a = -1$, άρα (ε): $y = -x + 2$.

Η ευθεία η σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$, οπότε έχει κλίση $a = \tan 45^\circ = 1$. Η εξίσωση της (η) είναι της μορφής $y = x + \gamma$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $(4, 0)$, ισχύει ότι $0 = 4 + \gamma \Leftrightarrow \gamma = -4$, άρα (η): $y = x - 4$.

β) Για να βρούμε το σημείο τομής τους θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεών τους. Είναι:

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = -x + 2 \\ y = x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 \\ y = x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 - 4 = -1 \end{cases}$$

Οι ευθείες (ε) και (η) τέμνονται στο σημείο $(3, -1)$.

Μη γραμμικά συστήματα

Θέμα 4ο

14240.α) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$. (Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) και του τριγωνομετρικού κύκλου, να βρείτε όλες τις γωνίες ω , με $0 \leq \omega \leq 2\pi$, που ικανοποιούν τη σχέση $\sin \omega + \eta \mu \omega = -1$ και να τις απεικονίσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο. (Μονάδες 13)

Λύση

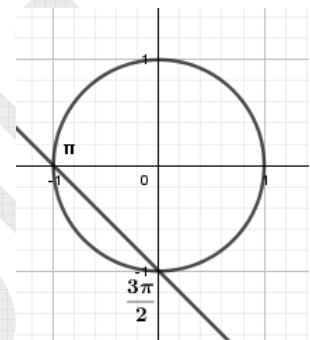
$$\alpha) \begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ x^2+(-x-1)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ x^2+x^2+2x+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ 2x(x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ x=0 \text{ ή } x=-1 \end{cases}$$

Αν $x=0$ τότε $y=0-1=-1$ και αν $x=-1$ τότε $y=1-1=0$.

Λύσεις του συστήματος τα $(0,-1)$ και $(-1,0)$

β) Αν $x=\sin \omega$ και $y=\eta \mu \omega$ τότε οι δυνατές τιμές για τα $\sin \omega$ και $\eta \mu \omega$ είναι οι λύσεις του προηγούμενου ερωτήματος. Άρα

$$\left(\begin{cases} \sin \omega = -1 \\ \eta \mu \omega = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi \right) \text{ ή } \left(\begin{cases} \sin \omega = 0 \\ \eta \mu \omega = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} \right)$$



15118.α) Να λύσετε το σύστημα $(\Sigma_1): \begin{cases} xy=6 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$. (Μονάδες 8)

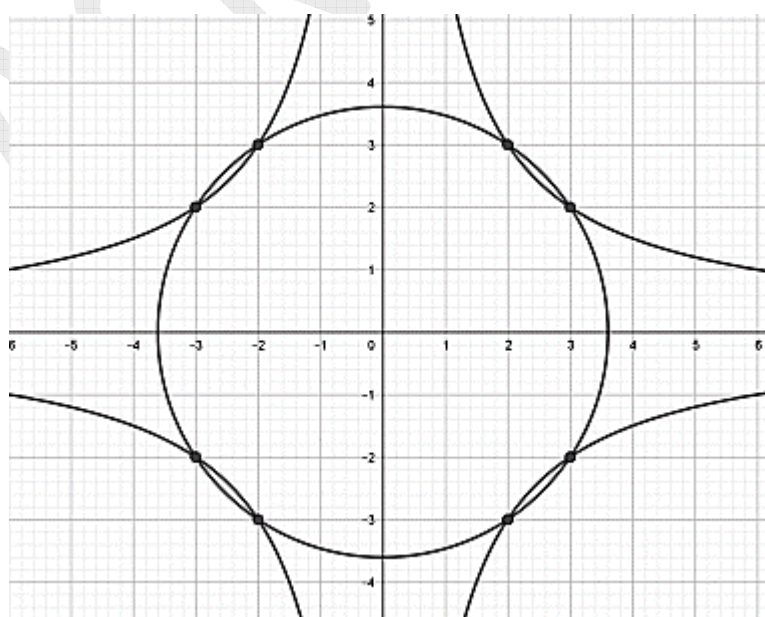
β) Είναι όλες οι λύσεις του συστήματος (Σ_1) λύσεις και του $(\Sigma_2): \begin{cases} |xy|=6 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$; Να αιτιολογήσετε

την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

γ) Η γεωμετρική αναπαράσταση του συστήματος (Σ_2) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Με βάση το σχήμα,

i. να βρείτε τις λύσεις του (Σ_2) . (Μονάδες 4)

ii. να παραστήσετε γεωμετρικά το σύστημα (Σ_1) σημειώνοντας τις λύσεις του. (Μονάδες 8)



Λύση

$$\alpha) (\Sigma_1): \begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{6}{x} \quad (1) \\ x^2 + \frac{36}{x^2} = 13 \end{cases} . \text{Θέτουμε } x^2 = \omega \text{ και η } x^2 + \frac{36}{x^2} = 13 \text{ γίνεται}$$

$$\omega + \frac{36}{\omega} = 13 \Leftrightarrow \omega^2 + 36 = 13\omega \Leftrightarrow \omega^2 - 13\omega + 36 = 0 . \text{ Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με } \Delta = 25 \text{ και ρίζες}$$

$$\omega_1 = 4, \omega_2 = 9 . \text{ Τότε } (x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2) \text{ ή } (x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3) .$$

$$\text{Αν } x = 3, \text{ τότε } y = \frac{6}{3} = 2, \text{ αν } x = -3, \text{ τότε } y = \frac{6}{-3} = -2, \text{ αν } x = 2, \text{ τότε } y = \frac{6}{2} = 3 \text{ και αν } x = -2, \text{ τότε}$$

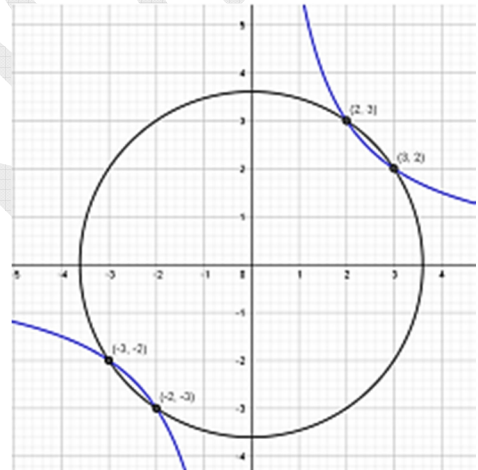
$$y = \frac{6}{-2} = -3 . \text{ Το σύστημα έχει λύσεις τις } (2,3), (-2,-3), (3,2) \text{ και } (-3,-2) .$$

β) Επειδή μια εξίσωση του Σ_2 είναι κοινή, οι λύσεις του Σ_1 την επαληθεύουν. Αρκεί οι λύσεις του Σ_1 να επαληθεύουν την εξίσωση $|xy| = 6$.

Είναι $|2 \cdot 3| = 6, |-2 \cdot (-3)| = 6, |3 \cdot 2| = 6$ και $|-3 \cdot (-2)| = 6$, άρα οι λύσεις του Σ_1 είναι λύσεις και του Σ_2 .

γ) i. Το Σ_2 έχει οκτώ λύσεις, τις 4 λύσεις του Σ_1 καθώς και τα κοινά σημεία των δύο καμπυλών που φαίνονται στο σχήμα. Δηλαδή τα σημεία $(-2,3), (-3,2), (3,2), (2,-3)$.

ii. Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η γεωμετρική αναπαράσταση του (Σ_1) είναι το τμήμα της γραφικής αναπαράστασης του (Σ_2) που αποτελείται από τον κύκλο και τους κλάδους της υπερβολής που βρίσκονται στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο, όπου είναι σημειωμένα και τα σημεία τομής των δυο γραμμών, οι συντεταγμένες των οποίων είναι οι λύσεις του συστήματος αυτού.



14979. Δίνεται το σύστημα (Σ):
$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}.$$

α) Να λύσετε το σύστημα (Σ).

(Μονάδες 12)

β) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά, σε κατάλληλο σχήμα, τις λύσεις του συστήματος (Σ) που βρήκατε στο ερώτημα α.

(Μονάδες 13)

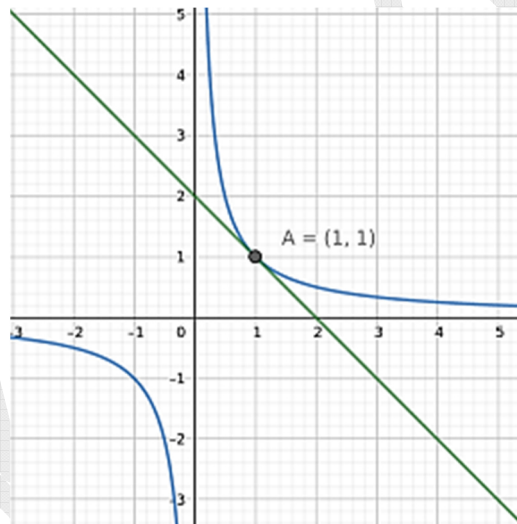
Λύση

$$\alpha) \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = -x + 2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -x^2 + 2x \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Συνεπώς το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x, y) = (1, 1)$.

β) Η εξίσωση $y = -x + 2$ παριστάνει μία ευθεία, ενώ η εξίσωση $y = \frac{1}{x}$ παριστάνει μία υπερβολή.

Η λύση του συστήματος $(x, y) = (1, 1)$ είναι οι συντεταγμένες του μοναδικού σημείου τομής τους, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ-ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θέμα 2ο

14325. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g , που ορίζονται στους πραγματικούς αριθμούς. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση.

Από τις γραφικές παραστάσεις να βρείτε:

α) Τα διαστήματα μονοτονίας της f , το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του.

(Μονάδες 15)

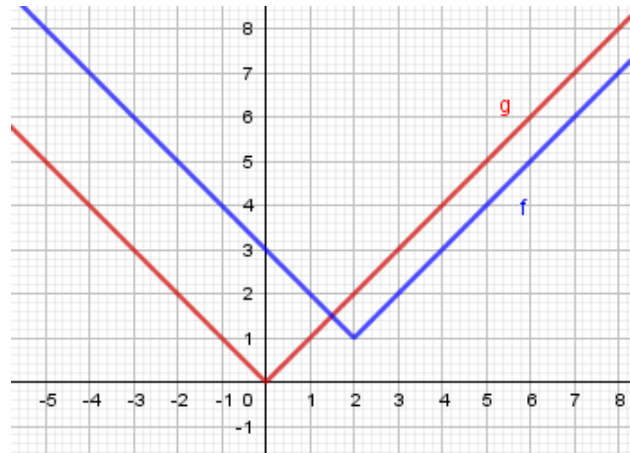
β) Αν $g(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ να επιλέξετε ποιος από τους παρακάτω είναι ο τύπος της συνάρτησης f . Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

$$f(x) = |x+2| + 1$$

$$f(x) = |x-2| - 1$$

$$f(x) = |x+2| - 1$$

$$f(x) = |x-2| + 1$$



(Μονάδες 10)

Λύση

α) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

Έχει ελάχιστο το 1 για $x = 2$.

β) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά 2 μονάδες δεξιά και 1 μονάδα πάνω, οπότε $f(x) = |x-2| + 1$.

14971. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1,1), B(3,3)$.

α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις επόμενες ιδιότητες θα μπορούσε και ποιες δε θα μπορούσε να έχει μία συνάρτηση f , που ορίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα A και B .

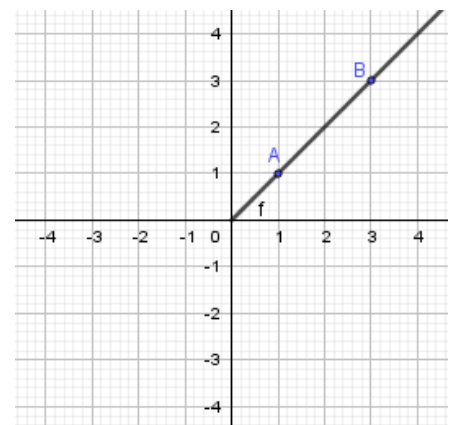
i) είναι σταθερή συνάρτηση

ii) είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

Μονάδες 12

β) Να συμπληρώσετε την παρακάτω γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f , η οποία διέρχεται από τα A, B και είναι περιττή.

Μονάδες 13



Λύση

α) Η συνάρτηση δε θα μπορούσε να είναι σταθερή, αφού

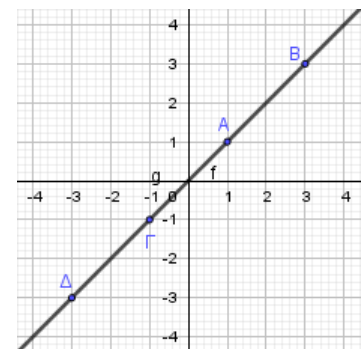
$$f(1) = 1 \neq 3 = f(3)$$

Η συνάρτηση δε θα μπορούσε να είναι γνησίως φθίνουσα, αφού $1 < 3$ και

$$f(1) < f(3).$$

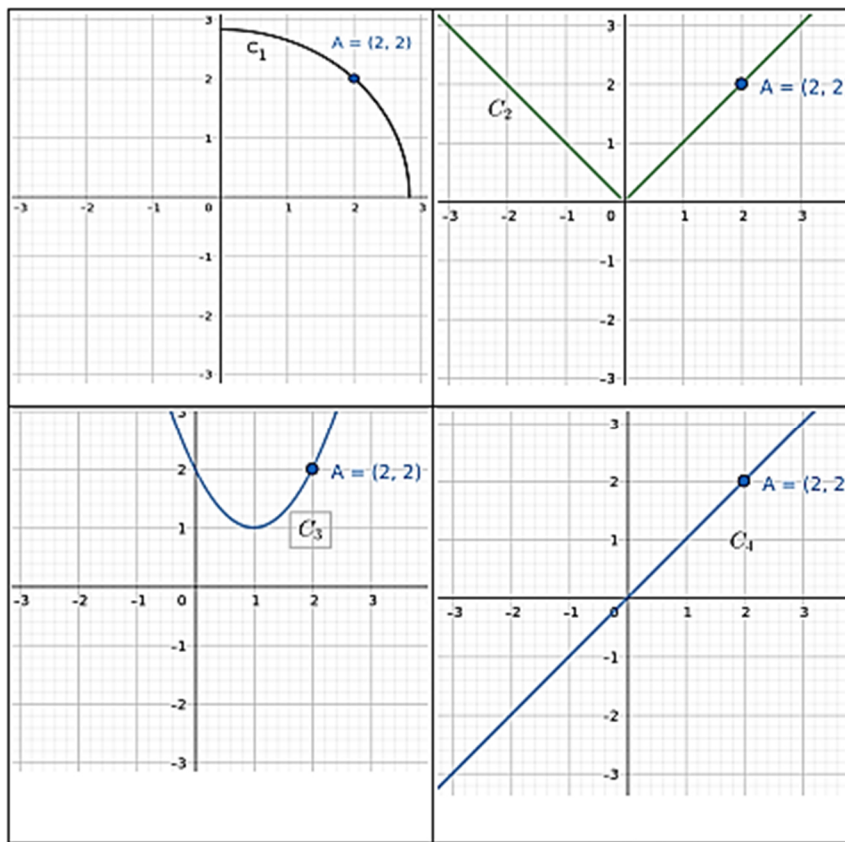
β) Επειδή η f είναι περιττή έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων.

Επειδή διέρχεται από τα A, B θα διέρχεται και από τα σημεία



$\Gamma(-1, -1)$ και $\Delta(-3, -3)$ που είναι τα συμμετρικά των A, B αντίστοιχα ως προς την αρχή O των αξόνων.

14976. Δίνονται τα παρακάτω σχήματα:



α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3, C_4 αναπαριστούν άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, ποιες όχι και γιατί. Δίνεται ότι τουλάχιστον μία είναι άρτια και τουλάχιστον μία είναι περιτή. (Μονάδες 12)

β) Για τις συναρτήσεις C_2, C_4 να βρείτε την τεταγμένη του σημείου τους $B(-2, k)$, αιτιολογώντας την τιμή που βρήκατε από την ιδιότητα συμμετρίας καθεμιάς συνάρτησης. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Η C_1 δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης άρτιας ή περιττής, αφού ορίζεται μόνο για θετικούς αριθμούς.

Η C_2 θα μπορούσε να αποτελεί γραφική παράσταση μίας άρτιας συνάρτησης, αφού φαίνεται να έχει γραφική παράσταση συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

Η C_3 δεν μπορεί να είναι άρτια ή περιτή συνάρτηση, αφού δεν μπορεί να είναι συμμετρική ούτε ως προς τον άξονα $y'y$, ούτε ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Η C_4 θα μπορούσε να αποτελεί γραφική παράσταση μίας περιττής συνάρτησης, αφού φαίνεται να έχει γραφική παράσταση συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Επομένως, εφόσον δίνεται ότι υπάρχουν μία άρτια και μία περιτή συνάρτηση, συμπεραίνουμε ότι η C_2 είναι η άρτια και C_4 είναι η περιτή.

β) Επειδή η C_2 είναι η άρτια ισχύει ότι $f(-2) = f(2) \Leftrightarrow k = 2$.

Επειδή η C_4 είναι η περιτή ισχύει ότι $f(-2) = -f(2) \Leftrightarrow k = -2$.

15019. Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(-1) = 2$ και $f(1) = 0$. Να αιτιολογήσετε (αλγεβρικά ή γραφικά)

α) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι άρτια.

(Μονάδες 8)

β) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι περιττή.

(Μονάδες 8)

γ) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Αν η f ήταν άρτια τότε θα ήταν $f(-1) = f(1) \Leftrightarrow 2 = 0$ που είναι άτοπο.

β) Αν η f ήταν περιττή τότε θα ήταν $f(-1) = -f(1) \Leftrightarrow 2 = 0$ που είναι άτοπο.

γ) Αν η f ήταν γνησίως αύξουσα τότε θα ήταν $f(-1) < f(1) \Leftrightarrow 2 < 0$ που είναι άτοπο.

15024. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[-4, 4]$ – φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

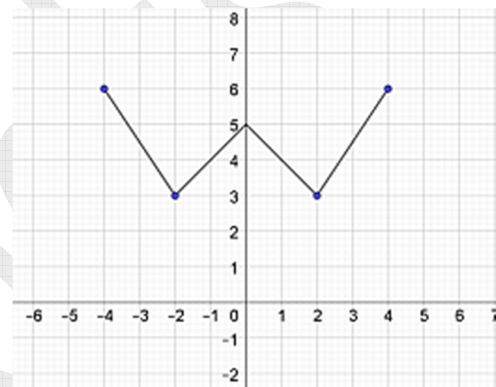
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f καθώς και για ποιες τιμές του x τις παρουσιάζει.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$, που σημαίνει ότι είναι άρτια.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2, 0]$ και στο $[2, 4]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-4, -2]$ και στο $[0, 2]$.

γ) Η f παρουσιάζει ελάχιστο το 3 και οι θέσεις ελαχίστου είναι το -2 και το 2.

15112. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(-2, 2)$.

α) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

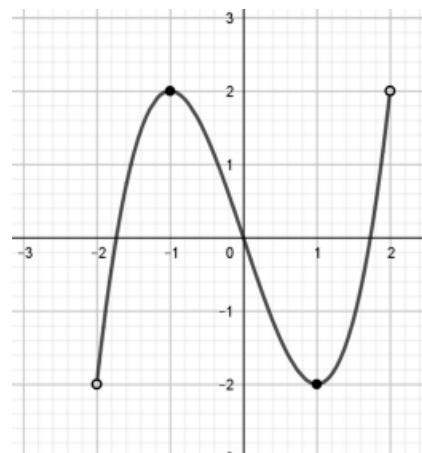
(Μονάδες 7)

β) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

(Μονάδες 10)



Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι περιττή, γιατί η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

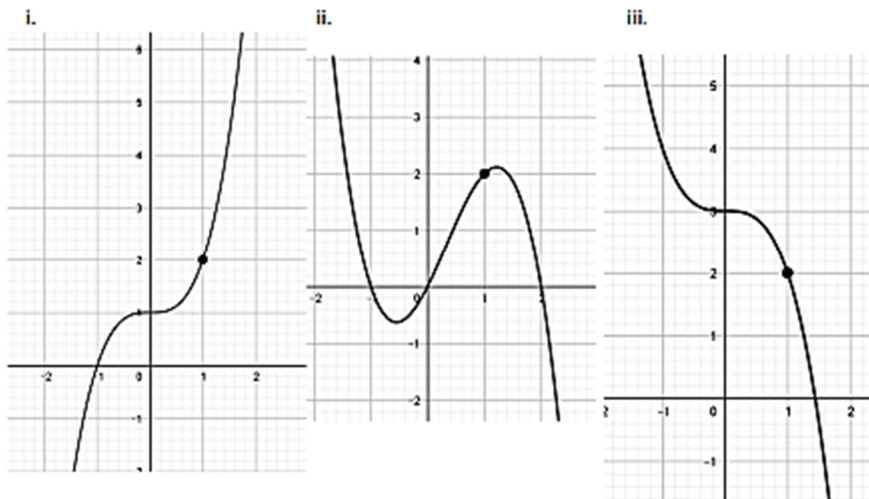
β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-2, -1]$ και $[1, 2)$.

γ) Η f έχει μέγιστο για $x = -1$ το $f(-1) = 2$ και ελάχιστο για $x = 1$ το $f(1) = -2$.

15114. Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.

α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο $B(2, 9)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 12)

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(1, 2)$ και θα μπορούσε να διέρχεται και από το σημείο $B(2, 9)$, διότι η f έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $1 < 2 \Leftrightarrow f(1) < f(2)$ αφού $f(1) = 2$ και $f(2) = 9$.

β) Η γραφική παράσταση της f θα μπορούσε να είναι η i. διότι ενώ όλες διέρχονται από το σημείο $(1, 2)$, η i. είναι γραφική παράσταση γνησίως αύξουσας συνάρτησης.

15116. Στο διπλανό σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-4, 4]$.

α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 8)

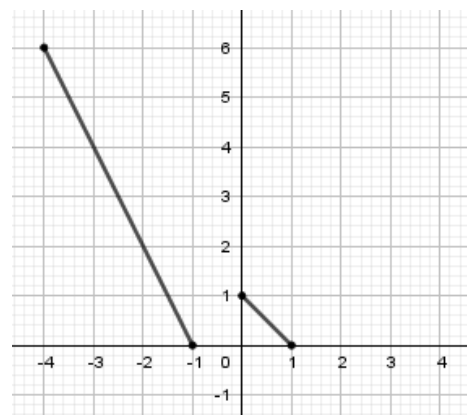
β) Να βρείτε

i. τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

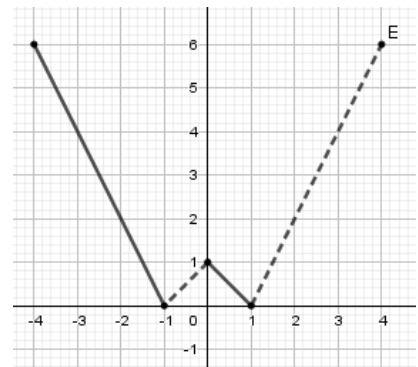
ii. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.

Μονάδες 9)



Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι άρτια, οπότε η γραφική της παράσταση θα είναι συμμετρική ως προς τον y' άξονα. Στο παρακάτω σχήμα είναι χαραγμένα και τα υπόλοιπα τμήματα με διακεκομμένη γραμμή.

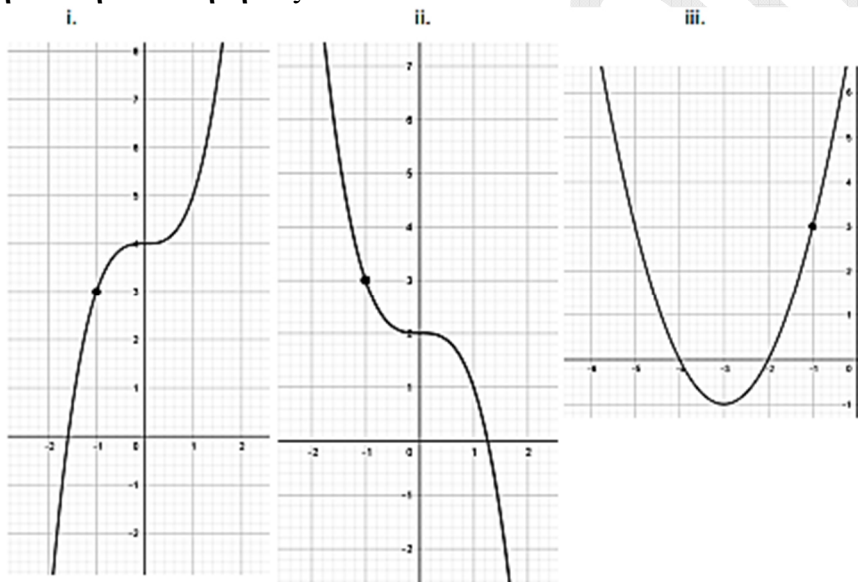


β) i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα είναι τα $[-4, -1]$ και $[0, 1]$, γιατί στα διαστήματα αυτά όσο μεγαλώνουν οι τιμές του x , μικραίνουν οι αντίστοιχες τιμές του y .
ii. Η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με 6 και παρουσιάζεται όταν το x πάρει τις τιμές -4 και 4 .

15115. Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$.

α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο $B(2, 5)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 12)

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(-1, 3)$ και δεν θα μπορούσε να διέρχεται και από το σημείο $B(2, 5)$, διότι η f έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ είναι όμως γνησίως φθίνουσα και θα έπρεπε να ισχύει $-1 < 2 \Leftrightarrow f(-1) > f(2) \Leftrightarrow 3 > 5$ που είναι άτοπο.

β) Η γραφική παράσταση της f θα μπορούσε να είναι η ii, διότι ενώ όλες διέρχονται από το σημείο $(-1, 3)$, η ii, είναι γραφική παράσταση γνησίως φθίνουσας συνάρτησης.

15349. Δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

(Μονάδες 7)

β) Αν γνωρίζετε ότι τα σημεία

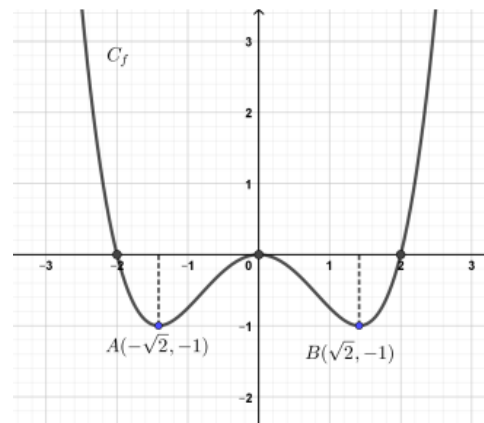
$$A(-\sqrt{2}, -1) \text{ και } B(\sqrt{2}, -1)$$

ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Μονάδες 10)



Λύση

α) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$, που σημαίνει ότι τα σημεία $(x, f(x))$ και $(-x, f(-x))$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Από το σχήμα έχουμε ότι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$, άρα η συνάρτηση είναι άρτια.

β) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{2}]$, $[0, \sqrt{2}]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-\sqrt{2}, 0]$ και $[\sqrt{2}, +\infty)$.

γ) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 0$ ή $x = 2$

15372. Στο παραπάνω σχήμα δίνεται ένα τμήμα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να μεταφέρεται το σχήμα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση με το κομμάτι της καμπύλης που λείπει.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

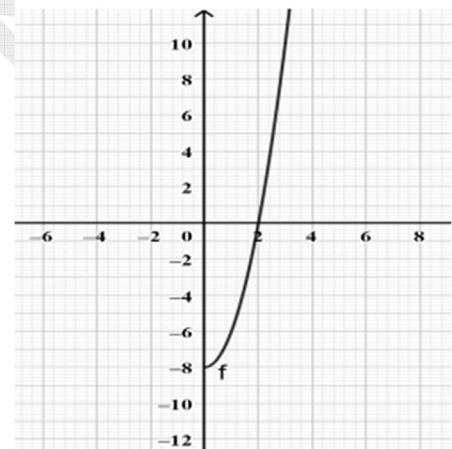
β) Να βρείτε:

i. Τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

ii. Το είδος του ακροτάτου και τη θέση που το παρουσιάζει.

(Μονάδες 7)



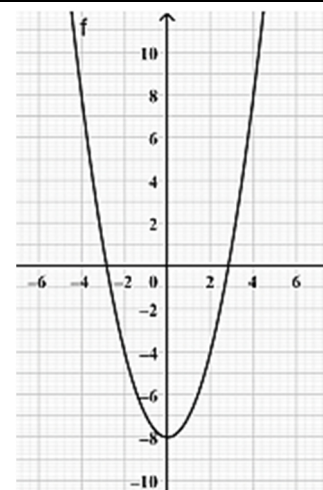
Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση είναι άρτια για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως, έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Το κομμάτι της συνάρτησης που λείπει είναι το συμμετρικό ως προς τον άξονα $y'y$. Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει η διπλανή γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

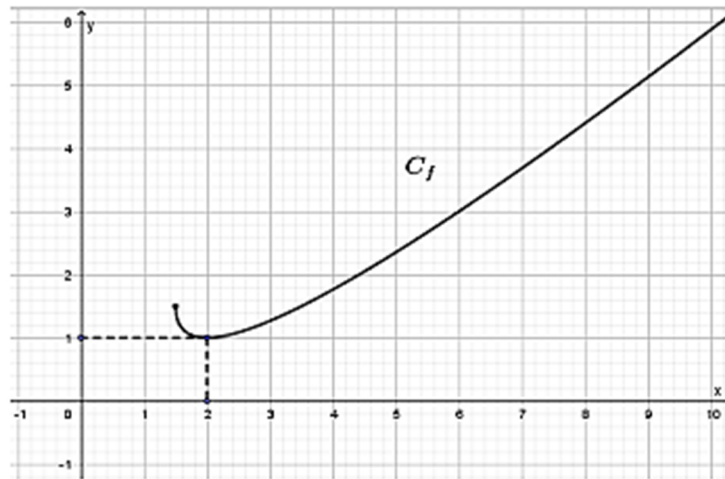
β) i. Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

ii. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f βλέπουμε ότι έχει ελάχιστη τιμή το -8 για $x=0$



15437. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \sqrt{2x-3}$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 7)
 β) Να προσδιορίσετε το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης, καθώς και τη θέση αυτού. (Μονάδες 8)
 γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι
 Ι. γνησίως φθίνουσα (Μονάδες 5)
 ΙΙ. γνησίως αύξουσα (Μονάδες 5)

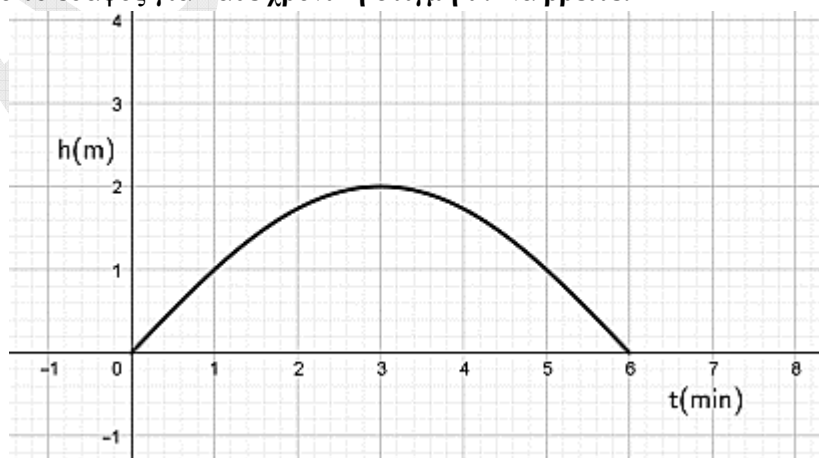
Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$, άρα $A_f = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

β) Από την γραφική παράσταση προκύπτει ότι: Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι ίση με 1 και παρουσιάζεται όταν $x = 2$.

γ) Από την γραφική παράσταση προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

15645. Αντικείμενο κινείται κατακόρυφα. Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά το ύψος h του αντικειμένου από το έδαφος για κάθε χρονική στιγμή t . Να βρείτε:



- α) Ποιες χρονικές στιγμές το αντικείμενο απέχει 1m από το έδαφος. (Μονάδες 5)
 β) Ποια είναι η μέγιστη απόσταση του αντικειμένου από το έδαφος και ποια χρονική στιγμή την επιτυγχάνει. (Μονάδες 10)
 γ) Ποιο χρονικό διάστημα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος. (Μονάδες 10)

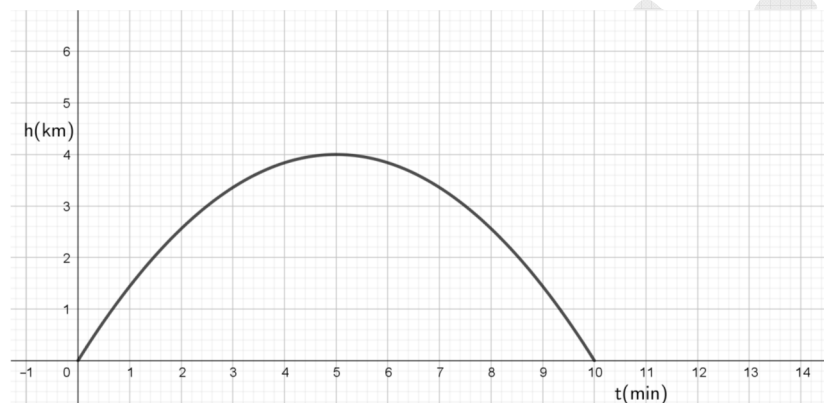
Λύση

α) Το αντικείμενο απέχει από το έδαφος 1m όταν το σημείο της γραφικής παράστασης έχει τεταγμένη 1 , δηλαδή τις χρονικές στιγμές 1min και 5min .

β) Σύμφωνα με το σχήμα η μέγιστη απομάκρυνση είναι 2m . Σε αυτή την θέση το κινητό βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = 3\text{min}$.

γ) Σύμφωνα με το σχήμα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος το χρονικό διάστημα $[0,3]$.

15787. Προκειμένου να ελεγχθεί μηχανισμός εκτόξευσης πυραύλων δημιουργήσαμε το παρακάτω σχήμα στο οποίο φαίνεται η απόσταση του πυραύλου από το έδαφος σε συνάρτηση με τον χρόνο.



α) Να βρείτε:

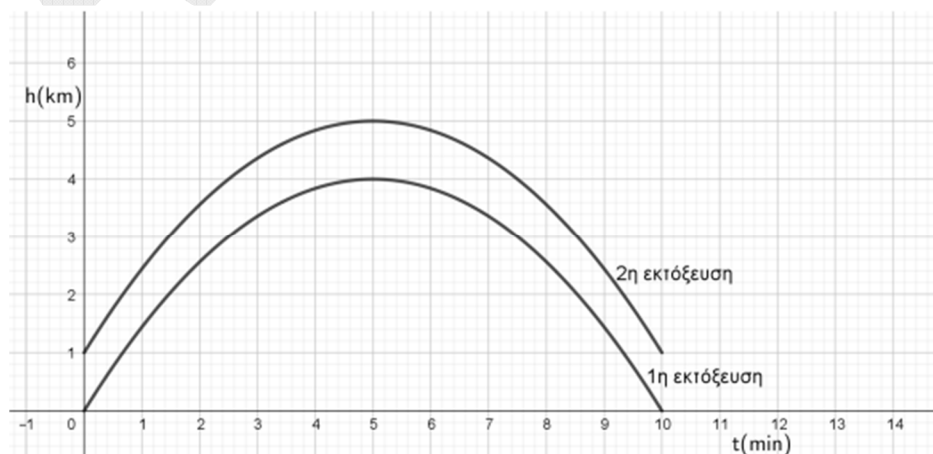
- i. Τον συνολικό χρόνο κίνησης του πυραύλου. (Μονάδες 5)
 - ii. Το μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό. (Μονάδες 6)
- β) Σε επανάληψη του ελέγχου η εκτόξευση πραγματοποιείται από ύψος 1 km.
- i. Να μεταφέρεται στην κόλλα σας την αποτύπωση της πρώτης εκτόξευσης και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την δεύτερη. (Μονάδες 7)
 - ii. Το νέο μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό. (Μονάδες 7)

Λύση

α) i) Από το σχήμα βλέπουμε πως ο συνολικός χρόνος κίνησης είναι 10 min.

ii) Από το σχήμα βλέπουμε ότι η συνάρτηση του ύψους παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $t = 5 \text{ min}$ το $h(5) = 4 \text{ km}$

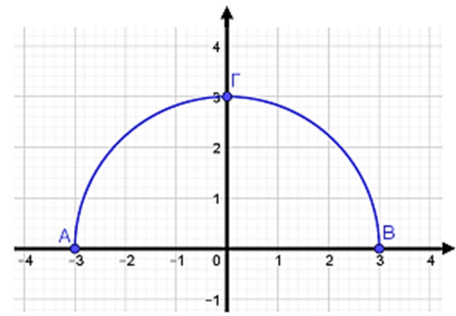
β) i) Η νέα συνάρτηση είναι η $g(t) = h(t) + 1$ άρα η γραφική της παράσταση είναι κατακόρυφη μετατόπιση κατά 1 μονάδα προς τα πάνω της h .



ii) Η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $t = 5 \text{ min}$ το $g(5) = 5 \text{ km}$

16129. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$.

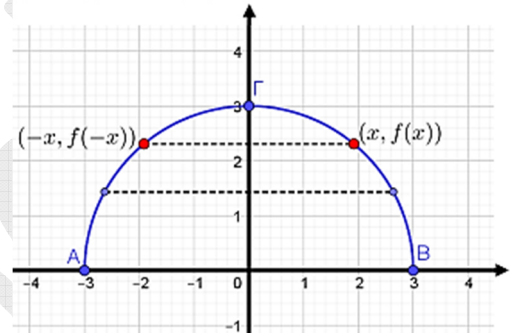
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 6)
 β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 9)
 γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f και τις θέσεις των ακροτάτων. (Μονάδες 10)



Λύση

α) Παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης έχουν τετμημένες x από -3 έως 3 . Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $\Delta = [-3, 3]$.

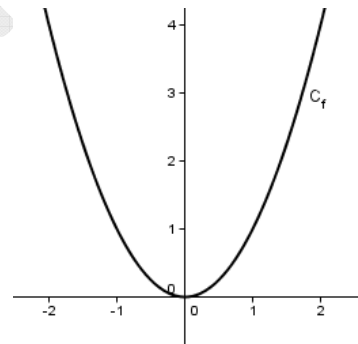
β) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$, που σημαίνει ότι τα σημεία $(x, f(x))$ και $(-x, f(-x))$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Από το σχήμα έχουμε ότι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$, άρα η συνάρτηση είναι άρτια.



γ) Παρατηρούμε ότι η τιμή $3 = f(0)$ είναι η μέγιστη τιμή της f και η θέση μεγίστου είναι η $x = 0$. Ακόμα, η ελάχιστη τιμή της f είναι ο αριθμός $0 = f(3) = f(-3)$ και υπάρχουν δύο θέσεις ελαχίστου, οι $x = 3$ και $x = -3$.

21673. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $\varphi(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε μια μονάδα, προς τα πάνω. (Μονάδες 8)
 β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)$. (Μονάδες 8)
 γ) Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της $\varphi(x)$. (Μονάδες 9)

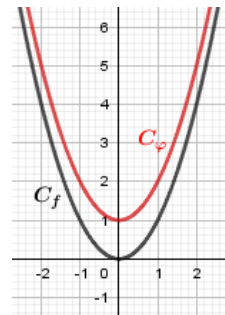


Λύση

α) $\varphi(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Το διπλανό σχήμα

γ) Από το σχήμα προκύπτει ότι η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και έχει ελάχιστο το 1 για $x = 0$.



Θέμα 4ο

14293. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

(Μονάδες 10)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να βρείτε:

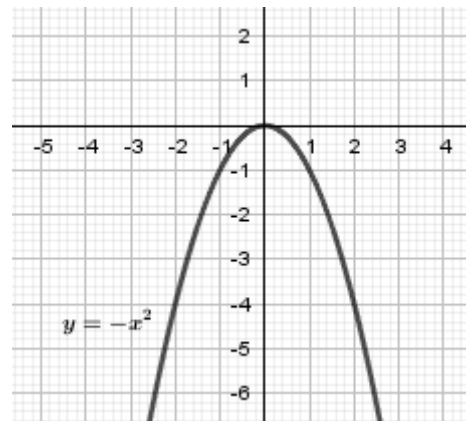
i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. (Μονάδες 5)

ii. Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του. (Μονάδες 5)

iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa < 2$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

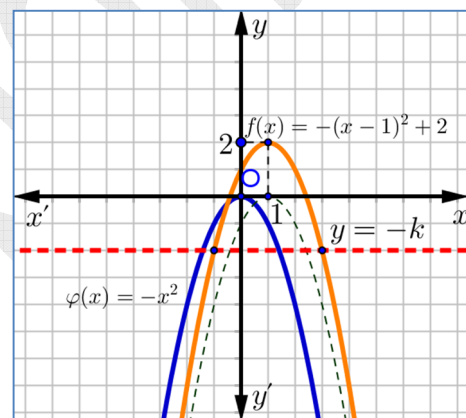


Λύση

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1 = -(x^2 - 2x - 1) = -(x^2 - 2x + 1 - 2) =$$

$$\alpha) -[(x-1)^2 - 2] = -(x-1)^2 + 2$$

Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από τη γραφική παράσταση της φ με δύο μετατοπίσεις μία οριζόντια κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και μία κατακόρυφη κατά 2 μονάδες προς τα πάνω



β) i. Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

ii. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 1 (θέση) το $f(1)=2$.

iii. Οποιαδήποτε ευθεία της μορφής $y=k$, $k < 2$ τέμνει την γραφική παράσταση της f σε 2 σημεία άρα έχει δύο ρίζες.

15022. Θεωρούμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3, 3]$. Η συνάρτηση f είναι άρτια, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, 3]$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(-1) < f(2)$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [-3, 3]$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο και να βρείτε τις θέσεις μεγίστου και ελαχίστου. (Μονάδες 6)

δ) Παρακάτω δίνονται 4 τύποι, από τους οποίους ένας μόνο μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης f . Να επιλέξετε το σωστό τύπο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

$$\alpha. f(x) = \sqrt{9-x^2} \quad \beta. f(x) = -\sqrt{9-x^2} \quad \gamma. f(x) = \sqrt{x^2-9} \quad \delta. f(x) = -\sqrt{x^2-9}$$

(Μονάδες 6)

Λύση

α) Επειδή η f είναι άρτια ισχύει ότι $f(-1) = f(1)$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(1) < f(2)$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 3]$ και $1 < 2$, είναι $f(1) < f(2)$.

β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 3]$, για κάθε $0 \leq x \leq 3$ είναι

$$f(0) \leq f(x) \leq f(3) \Leftrightarrow f(3) \geq f(x) \geq f(0) \quad (1)$$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-3, 0]$, για κάθε $-3 \leq x \leq 0$ είναι $f(-3) \geq f(x) \geq f(0)$ (2).

Επειδή η f είναι άρτια ισχύει ότι $f(-3) = f(3)$, οπότε η (2) γίνεται: $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$ (3).

Από τις σχέσεις (1), (3) προκύπτει ότι $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [-3, 3]$.

γ) Επειδή $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [-3, 3]$, η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$ το $f(0)$.

Επειδή $f(x) \leq f(3)$ και $f(x) \leq f(-3)$ για κάθε $x \in [-3, 3]$, η f παρουσιάζει μέγιστο στα $x = 3$ και $x = -3$ το $f(-3) = f(3)$.

δ) Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $[-3, 3]$, ο τύπος της θα είναι ο α ή ο β .

Στην α είναι $f(0) = 3$ και $f(3) = 0$, δηλαδή $f(0) > f(3)$ που είναι άτοπο. Άρα ο β είναι ο τύπος της f .

Οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση

Θέμα 2ο

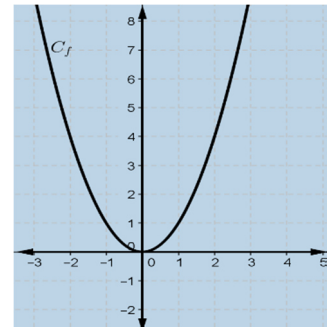
14230. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x-2)^2 + 1$.

(Μονάδες 12)

β) Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , μετατοπίζοντας κατάλληλα την $y = x^2$.

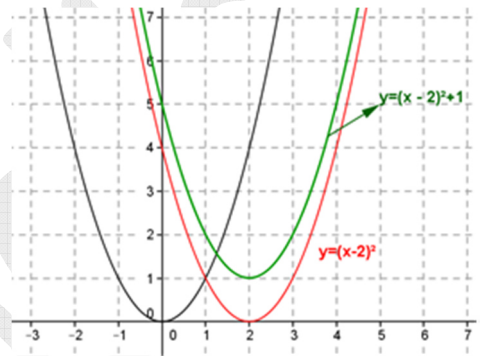
(Μονάδες 13)



Λύση

α) $f(x) = x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1$

β) Αρχικά μετατοπίζουμε την $y = x^2$ 2 θέσεις δεξιά και στη συνέχεια 1 θέση πάνω.

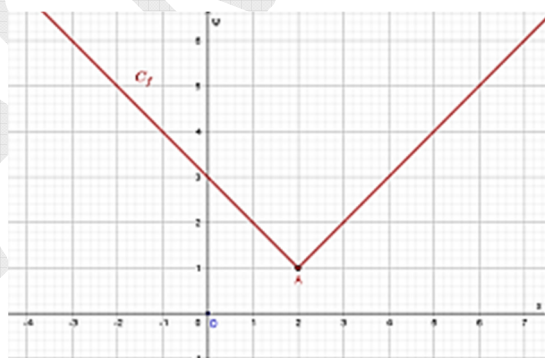
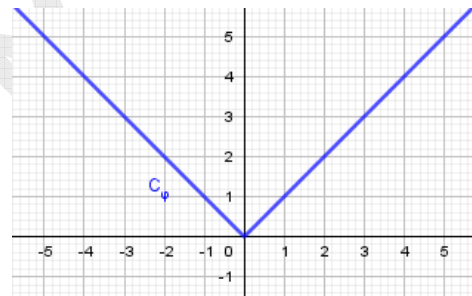


14972. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ με γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα. Επιπλέον οι συναρτήσεις $g(x) = |x-2|$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = |x-2| + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις g , f και να εξηγήσετε πώς προκύπτουν μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της, η οποία δίνεται παρακάτω,



να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια αύξουσα και γνήσια φθίνουσα.

(Μονάδες 6)

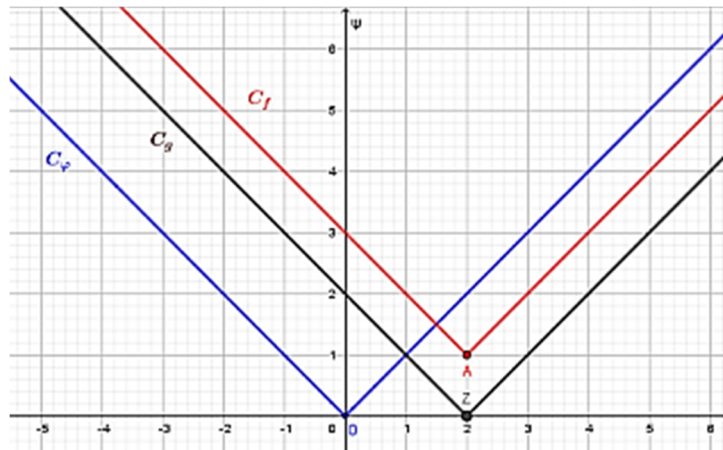
ii. Το ολικό ακρότατο της f και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

(Μονάδες 6)

Λύση

α) Οι γραφικές παραστάσεις των και προκύπτουν από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της:

- μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά (για την g) και
 - μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα πάνω (για την f).
- Έτσι προκύπτουν οι διπλανές γραφικές παραστάσεις

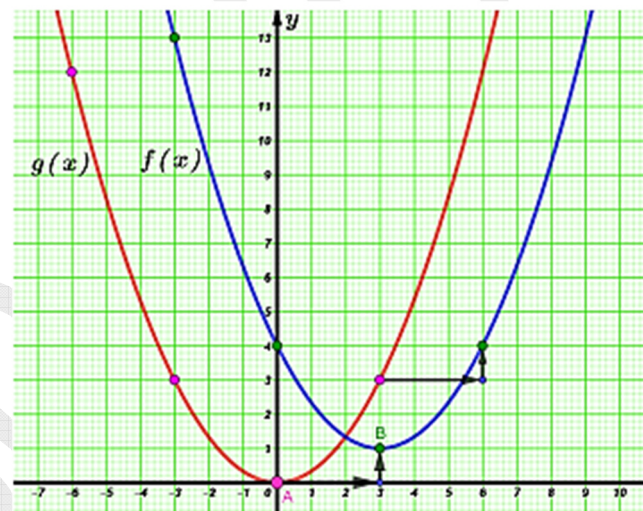


β) i. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

ii. Η f έχει ελάχιστο στο $x_0 = 2$ το $f(2) = 1$.

14983. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{3}x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ η οποία προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της $g(x)$ κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μετά κατά μία μονάδα προς τα πάνω.

- α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση όσον αφορά τον τύπο της $f(x)$.
- (i) $f(x) = g(x+3) + 1$
 - (ii) $f(x) = g(x+3) - 1$
 - (iii) $f(x) = g(x-3) + 1$
 - (iv) $f(x) = g(x-3) - 1$



(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)$ και την θέση ελαχίστου.

(Μονάδες 8)

γ) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Σωστή απάντηση είναι η (iii).

β) Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι η μικρότερη δυνατή τιμή της συνάρτησης $f(x)$ είναι ο αριθμός 1 και επιτυγχάνεται όταν $x = 3$.

γ) Παρατηρούμε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$.

15017. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 3)$ είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2, 2)$.

α) Να βρείτε την τιμή του α .

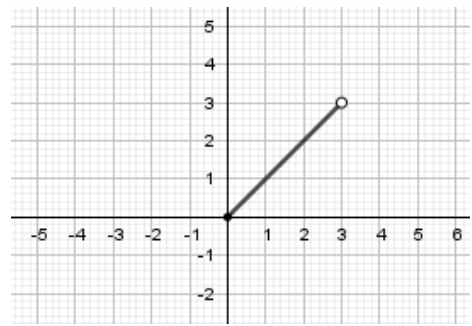
(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $f(-2)$.

(Μονάδες 8)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 3]$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 10)

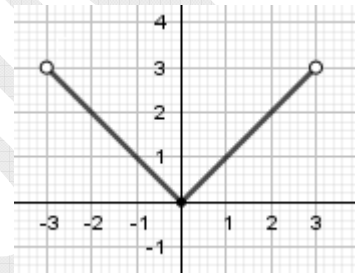


Λύση

α) Αφού η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 3)$ είναι άρτια, θα πρέπει για κάθε $x \in (\alpha, 3)$ και $-x \in (\alpha, 3)$. Αυτό ισχύει μόνο όταν $\alpha = -3$.

β) Επειδή η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2, 2)$, είναι $f(2) = 2$. Επειδή η f είναι άρτια ισχύει ότι $f(-2) = f(2) = 2$.

γ) Επειδή η f είναι άρτια, η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



15018. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 6)$ είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(4, 2)$.

α) Να βρείτε την τιμή του α .

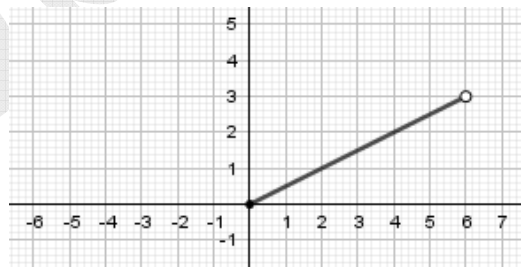
(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $f(-4)$.

(Μονάδες 8)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 6]$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 10)



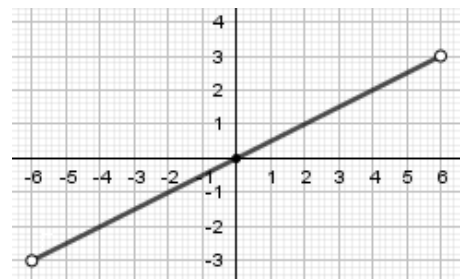
Λύση

α) Αφού η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 6)$ είναι περιττή, θα πρέπει για κάθε $x \in (\alpha, 6)$ και $-x \in (\alpha, 6)$. Αυτό ισχύει μόνο όταν $\alpha = -6$.

β) Επειδή η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(4, 2)$, είναι $f(4) = 2$.

Επειδή η f είναι περιττή ισχύει ότι $f(-4) = -f(4) = -2$.

γ) Επειδή η f είναι περιττή, η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



15811. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Με βάση τη γραφική της παράσταση,

i. να αιτιολογήσετε γιατί η g είναι άρτια.

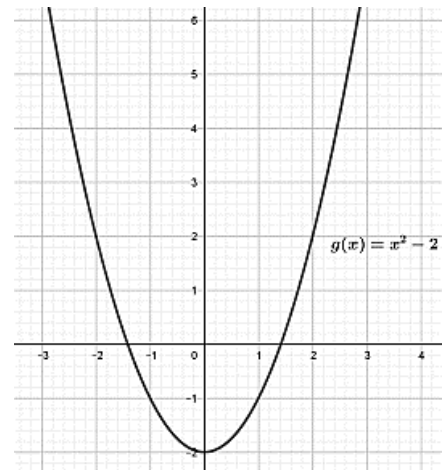
(Μονάδες 9)

ii. να βρείτε το ελάχιστο της g και τη θέση αυτού.

(Μονάδες 7)

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

(Μονάδες 9)

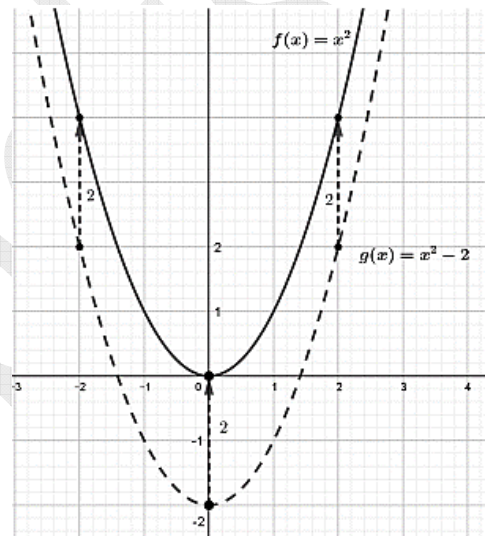


Λύση

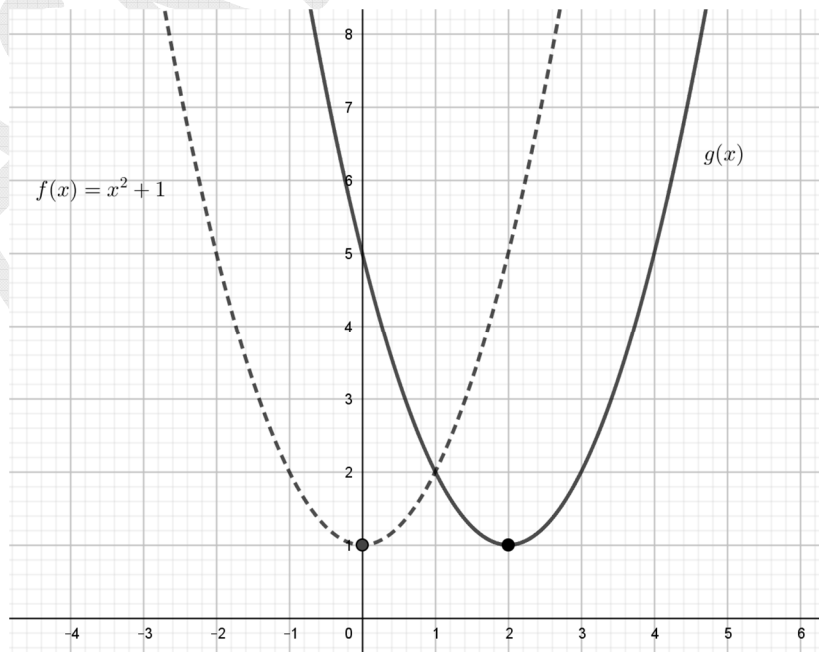
α) i. Η γραφική παράσταση της g είναι συμμετρική ως προς τον y' άξονα, άρα η g είναι άρτια.

ii. Η g παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x = 0$, το $g(0) = -2$, διότι όπως φαίνεται από τη γραφική της παράσταση, $g(x) \geq -2$ και η ισότητα ισχύει για $x = 0$.

β) Η γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 = g(x) + 2$ προκύπτει με κατακόρυφη και προς τα πάνω μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά 2 μονάδες.



20671. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ και η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$ με $x \in \mathbb{R}$.



α) i. Είναι η f άρτια ή περιττή συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ii. Έχει η f μέγιστη τιμή ή ελάχιστη; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

- β) i. Με ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f προέκυψε η γραφική παράσταση της g ; (Μονάδες 7)
 ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g . (Μονάδες 4)

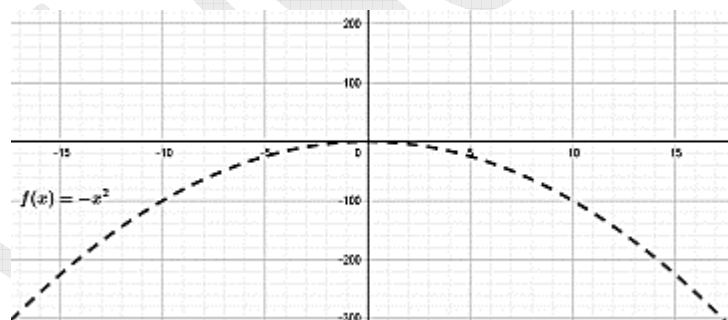
Λύση

- α) i. Η f είναι άρτια γιατί, όπως φαίνεται στο σχήμα, η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον y άξονα.
 ii. Η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή ίση με 1 για $x = 0$, αφού, όπως φαίνεται στο σχήμα, $f(0) = 1$ και $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 β) i. Η γραφική παράσταση της g προέκυψε με οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 2 μονάδες δεξιά.
 ii. Σύμφωνα με το βι), ο τύπος της g είναι $g(x) = f(x - 2) = (x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$

Θέμα 4ο

14241. Η περιβαλλοντική ομάδα ενός σχολείου παρέλαβε συρματόπλεγμα μήκους 40m για να περιφράξει, χρησιμοποιώντας όλο το συρματόπλεγμα, έναν ορθογώνιο κήπο για καλλιέργεια λαχανικών. Οι μαθητές της περιβαλλοντικής ομάδας θέλουν να επιλέξουν ένα κήπο που να έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο εμβαδόν.

- α) Να δώσετε τις διαστάσεις τριών διαφορετικών ορθογώνιων κήπων με περίμετρο 40m. Να εξετάσετε αν οι τρεις λαχανόκηποι έχουν το ίδιο εμβαδόν. (Μονάδες 7)
 β) Αν συμβολίσουμε με x το πλάτος και με E το εμβαδόν ενός λαχανόκηπου με περίμετρο 40m, να εκφράσετε το E ως συνάρτηση του x . (Μονάδες 8)
 γ) Να δείξετε ότι $E(x) = -(x - 10)^2 + 100$. Χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2$ να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της $E(x)$. Από τη γραφική παράσταση της $E(x)$ να βρείτε τις διαστάσεις του λαχανόκηπου με το μεγαλύτερο εμβαδόν. (Μονάδες 10)



Λύση

Έστω Π , x , y η περίμετρος, το πλάτος, το μήκος του ορθογώνιου κήπου αντίστοιχα. Τότε :

$$\Pi = 2x + 2y \Leftrightarrow \cancel{40}^2 = \cancel{2}x + \cancel{2}y \Leftrightarrow x + y = 20 \text{ m (1)}$$

α) Τρία παραδείγματα είναι :

έναν λαχανόκηπο με διαστάσεις 16 m, 4 m. Το εμβαδόν του είναι $E = 4 \cdot 16 = 64 \text{ m}^2$

έναν λαχανόκηπο με διαστάσεις 12 m, 8 m. Το εμβαδόν του είναι $E = 12 \cdot 8 = 96 \text{ m}^2$

έναν λαχανόκηπο με διαστάσεις 11 m, 9 m. Το εμβαδόν του είναι $E = 9 \cdot 11 = 99 \text{ m}^2$

Όπως βλέπουμε έχουν διαφορετικά εμβαδά.

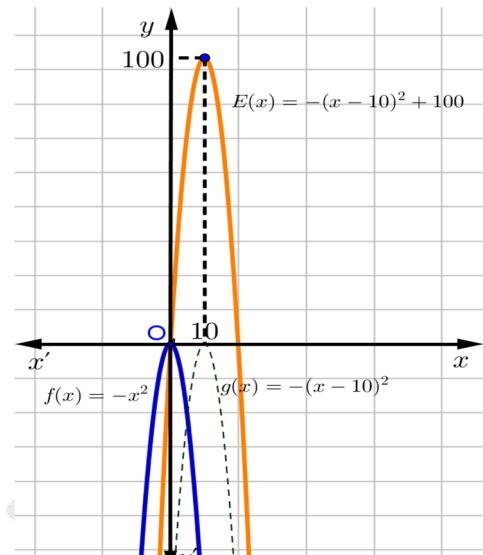
β) (1) $\Rightarrow y = 20 - x$.

$$E = x \cdot y = x \cdot (20 - x) = 20x - x^2 \text{ δηλαδή } E(x) = 20x - x^2$$

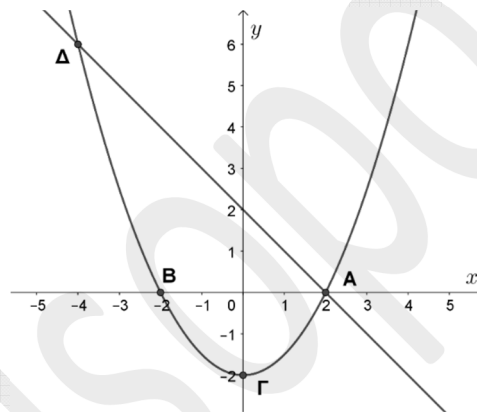
$$\gamma) E(x) = 20x - x^2 = -(x^2 + 20x) = -(x^2 + 20x + 100 - 100) \Leftrightarrow$$

$$E(x) = -(x^2 + 20x + 100) + 100 = -(x + 10)^2 + 100.$$

Η γραφική παράσταση της E προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με δύο μετατοπίσεις: μία οριζόντια κατά 10 μονάδες προς τα δεξιά και μία κατακόρυφη κατά 100 μονάδες προς τα πάνω. Το μεγαλύτερο εμβαδό το παρουσιάζει για $x=10$ m. $y=20-10=10$ m



14294. Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ και της ευθείας $g(x) = -x + 2$.



α) Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ, να βρείτε τις τιμές των a, b, γ .

(Μονάδες 8)

β) Αν $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ και $\gamma = -2$, να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της παραβολής.

(Μονάδες 8)

γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Αφού η παραβολή διέρχεται από το Γ τότε $f(0) = -2 \Leftrightarrow \gamma = -2$

Άρα $f(x) = ax^2 + bx - 2$ και επειδή διέρχεται από τα σημεία B, Γ είναι $f(-2) = f(2) = 0$ άρα οι $x_1 = -2$ και $x_2 = 2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Από τους τύπους Vieta είναι $S = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow -2 + 2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow -\frac{\beta}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$ και

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow x_1 x_2 = \frac{-2}{\alpha} \Leftrightarrow (-2) \cdot 2 = \frac{-2}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Άρα $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2, x \in \mathbb{R}$.

β) Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 4 = -2x + 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -4$$

Είναι $g(-4) = 4 + 2 = 6$ και $g(2) = 0$ άρα τα κοινά σημεία είναι $\Delta(-4, 6)$ και $A(2, 0)$.

γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω τότε θα έχουμε την συνάρτηση

$$h(x) = f(x) + 4,5 = \frac{1}{2}x^2 - 2 + 4,5 = \frac{1}{2}x^2 + 2,5$$

Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $h(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 2,5 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 5 = -2x + 4 \Leftrightarrow$

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

14973. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να ελέγξετε αν η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση. (Μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3(x-1)^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η φ είναι γνήσια μονότονη και τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης. (Μονάδες 6)

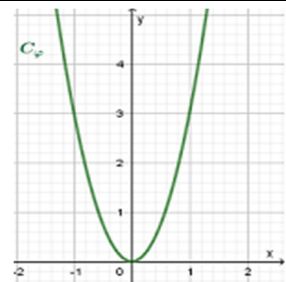
ii. Το ολικό ακρότατο της και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι; (Μονάδες 4)

iii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της και της ευθείας με εξίσωση $y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ . (Μονάδες 7)

Λύση

α) Η συνάρτηση φ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\varphi(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = \varphi(x)$, επομένως είναι άρτια συνάρτηση. Η γραφική της παράσταση είναι η διπλανή παραβολή.

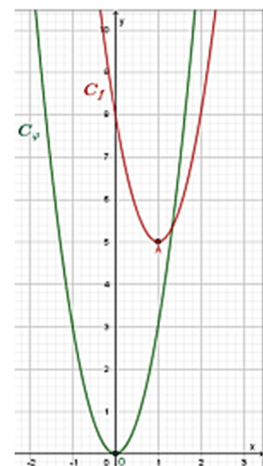


β) Είναι: $f(x) = 3(x-1)^2 + 5 = 3(x^2 - 2x + 1) + 5 \Leftrightarrow$

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 3 + 5 = 3x^2 - 6x + 8. \text{ Επομένως για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι}$$

$$f(x) = 3(x-1)^2 + 5.$$

Η γραφική παράσταση της προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ , μιας οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 5 μονάδες προς τα πάνω.



γ) Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο $A(1,5)$.

i. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Ο άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης της είναι η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή της, δηλαδή η $x = 1$.

ii. Η συνάρτηση παρουσιάζει στη θέση $x_0 = 1$, ολικό ελάχιστο το $f(1) = 5$

iii. Αν $\lambda > 5$ η εξίσωση έχει 2 ρίζες

Αν $\lambda = 5$ η εξίσωση έχει 1 ρίζα και αν $\lambda < 5$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

20642. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη και περιττή συνάρτηση και $g(x) = e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$, τότε:

α) Να βρείτε το $f(1)$ και να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης f και να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το O .

(Μονάδες 7)

δ) Έστω $f(x) = -2x^3$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε 2 μονάδες αριστερά και μια μονάδα πάνω.

(Μονάδες 6)

Λύση

α) Επειδή η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$ ισχύει ότι $f(-1) = 2$.

Επειδή η f είναι περιττή ισχύει ότι $f(-1) = -f(1) \Leftrightarrow 2 = -f(1) \Leftrightarrow f(1) = -2$.

Είναι $-1 < 1$ και $f(-1) > f(1)$, επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Επειδή η f είναι περιττή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = -f(x)$. Αν στη τελευταία σχέση αντικαταστήσουμε $x = 0$, προκύπτει $f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ άρα η C_f διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.

γ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$ και για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $e^x < e^0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow g(x) < 0$ και επειδή $f(x) > 0$, είναι $f(x) > g(x)$ για κάθε $x < 0$. Για κάθε $x > 0$ είναι $e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0$ και επειδή $f(x) < 0$, είναι $f(x) < g(x)$ για κάθε $x > 0$. Είναι $f(0) = g(0) = 0$ και $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \neq 0$, άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το O .

δ) Είναι $h(x) = f(x+2) + 1 = -2(x+2)^3 + 1, x \in \mathbb{R}$.

20715. Με συρματόπλεγμα μήκους 20 m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις x και y , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x και να βρείτε τις δυνατές τιμές της πλευράς x .

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x δίνεται από τη συνάρτηση $E(x) = -(x-5)^2 + 25$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.

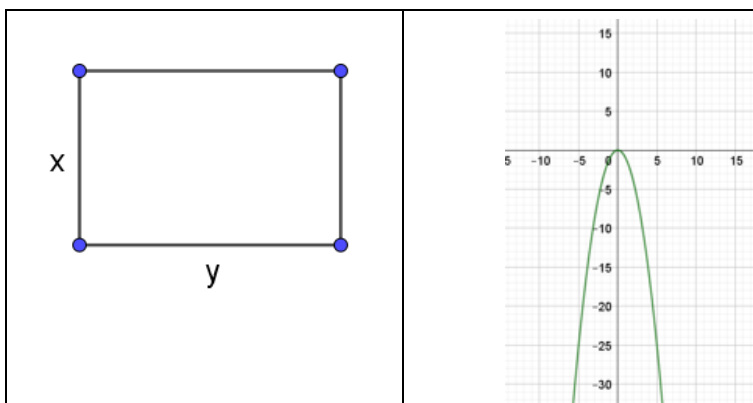
(Μονάδες 7)

γ) Δίπλα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^2$. Μετατοπίζοντάς τη κατάλληλα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)$ και με βάση αυτή, να βρείτε το x έτσι ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου να γίνεται μέγιστο.

(Μονάδες 7)

δ) Για την τιμή του x που βρήκατε στο ερώτημα γ), να βρείτε την πλευρά y και να προσδιορίσετε το είδος του ορθογωνίου.

(Μονάδες 4)



Λύση

α) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 20m δηλαδή $2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 10 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, 10)$$

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = xy = x(10 - x) = -x^2 + 10x$

$$\text{Άρα } E(x) = -x^2 + 10x = -x^2 + 10x - 25 + 25 =$$

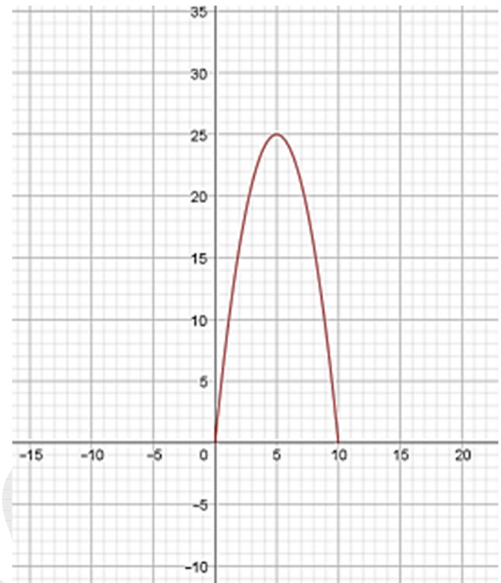
$$= -(x^2 - 10x + 25) + 25 = -(x - 5)^2 + 25, \quad 0 < x < 10$$

γ) Η γραφική παράσταση της E προκύπτει αν μετατοπίσουμε την g κατά 5 μονάδες προς τα δεξιά και 25 μονάδες προς τα πάνω.

Η E παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=5$ το $E(5) = 25$

Άρα το μέγιστο εμβαδόν το έχουμε όταν $x=5$.

δ) Για $x=5$ είναι και $y=5$, δηλαδή το ορθογώνιο είναι τετράγωνο πλευράς 5.

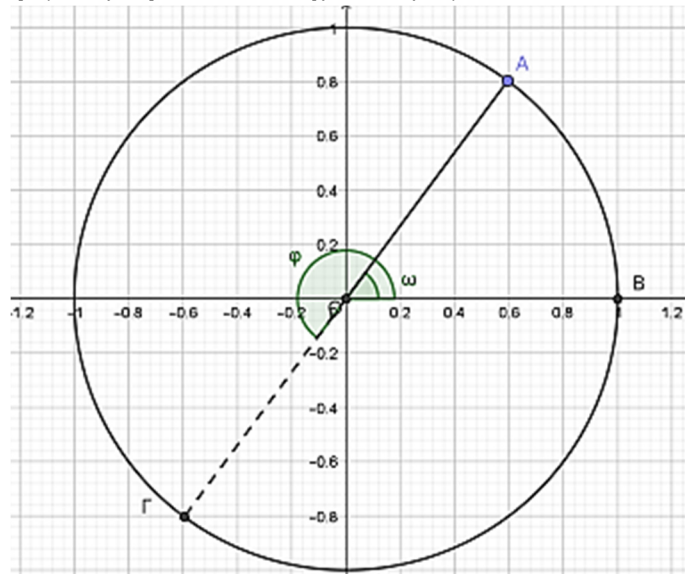


ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

ΘΕΜΑ 2ο

15079. Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega} = \widehat{BOA}$.



α) Με βάση το σχήμα, να αιτιολογήσετε γιατί $\sin \omega = \frac{3}{5}$. (Μονάδες 8)

β) Η προέκταση του τμήματος AO τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Γ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να εκφράσετε την γωνία $\hat{\phi} = \widehat{BO\Gamma}$ με την βοήθεια της γωνίας $\hat{\omega}$. (Μονάδες 8)

ii. Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε το $\sin \phi$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Το συνημίτονο μιας γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τετμημένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της με τον κύκλο. Επειδή η τετμημένη του σημείου Α είναι $0,6 = \frac{3}{5}$, έχουμε $\sin \omega = \frac{3}{5}$.

β) i. Εφόσον η ΟΓ είναι προέκταση της ΟΑ έχουμε $\widehat{A\hat{O}\Gamma} = \pi \text{ rad}$. Επομένως $\hat{\phi} = \widehat{BO\Gamma} = \pi + \hat{\omega}$.

ii. Το συνημίτονο της γωνίας $\hat{\phi}$ είναι η τετμημένη του σημείου Γ, δηλαδή $\sin \phi = -\frac{3}{5}$.

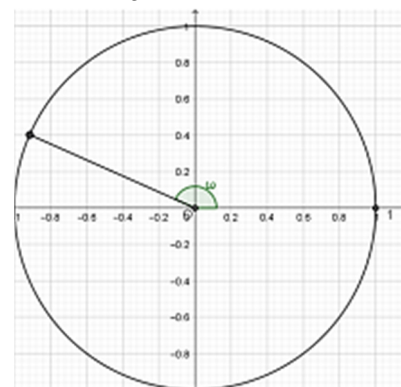
15191. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $\eta\mu \omega = 0,4$.

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε την γωνία $-\hat{\omega}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

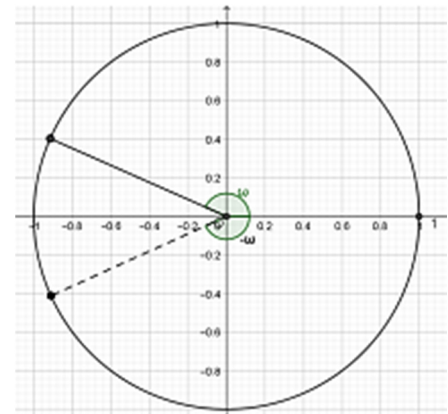
β) Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το $\eta\mu(-\omega)$.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Δύο γωνίες σχεδιασμένες στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι αντίθετες όταν έχουν τα σημεία τομής της τελικής τους πλευράς με τον τριγωνομετρικό κύκλο συμμετρικά ως προς τον άξονα x' . Άρα η γωνία $-\omega$ είναι όπως φαίνεται με διακεκομμένη γραμμή στο παρακάτω σχήμα.



β) Το ημίτονο γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της γωνίας με το κύκλο, οπότε έχουμε, λόγω συμμετρίας $\eta\mu(-\omega) = -0,4$

18868. α) Να αποδείξετε ότι $\epsilon\phi 500^\circ = \epsilon\phi 140^\circ$.

(Μονάδες 10)

β) i. Να βρείτε το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού $\epsilon\phi 500^\circ$.

(Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = \epsilon\phi 500^\circ \cdot \eta\mu 250^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 300^\circ$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) $\epsilon\phi 500^\circ = \epsilon\phi(360^\circ + 140^\circ) = \epsilon\phi 140^\circ$

β) i) Το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού $\epsilon\phi 500^\circ$ είναι το ίδιο με το πρόσημο του $\epsilon\phi 140^\circ$

Είναι $90^\circ < 140^\circ < 180^\circ$ άρα η τελική πλευρά της γωνίας 140° βρίσκεται στο 2° τεταρτημόριο άρα είναι $\epsilon\phi 140^\circ < 0 \Leftrightarrow \epsilon\phi 500^\circ < 0$

ii) Είναι $180^\circ < 250^\circ < 270^\circ$ άρα η τελική πλευρά της γωνίας 250° βρίσκεται στο 3° τεταρτημόριο επομένως $\eta\mu 250^\circ < 0$.

Είναι $270^\circ < 300^\circ < 360^\circ$ άρα η τελική πλευρά της γωνίας 300° βρίσκεται στο 4° τεταρτημόριο άρα είναι $\sigma\upsilon\nu 300^\circ > 0$.

Επομένως αφού $\epsilon\phi 500^\circ < 0$ και $\eta\mu 250^\circ < 0$ τότε $\epsilon\phi 500^\circ \cdot \eta\mu 250^\circ > 0$ και $\sigma\upsilon\nu 300^\circ > 0$ άρα $A > 0$.

21161. Σε έναν κύκλο ακτίνας ρ θεωρούμε ένα τόξο AB με μήκος ίσο με 2ρ .

α) Να βρείτε πόσα ακτίνια είναι η αντίστοιχη στο τόξο AB, επίκεντρη γωνία ω .

(Μονάδες 13)

β) Αν $\omega = 2$ ακτίνια, να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ω .

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Ένα ακτίνιο είναι το τόξο ενός κύκλου ακτίνας ρ που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου ρ .

Εφόσον το μήκος του τόξου AB είναι ίσο με δύο ακτίνες του κύκλου η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία θα είναι ίση με 2 ακτίνια.

β) Είναι γνωστό ότι 2π ακτίνια είναι η γωνία η οποία είναι ίση με 360 μοίρες, άρα η γωνία ω που είναι 2

ακτίνια θα αντιστοιχεί $\frac{360}{\pi}$ μοίρες.

Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

ΘΕΜΑ 2ο

15046. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\sin A = -\frac{3}{5}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το $\eta\mu A$.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Επειδή η γωνία A βρίσκεται σε τρίγωνο είναι $0^\circ < \hat{A} < 180^\circ$. Επειδή $\sin A < 0$ είναι $90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$.

β) Είναι $\eta\mu^2 A + \sin^2 A = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 A + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 A = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \eta\mu A = \pm \frac{4}{5}$.

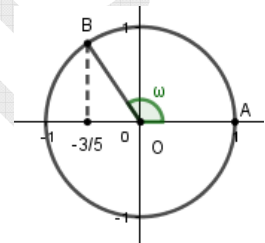
Επειδή $90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$, είναι $\eta\mu A > 0$, άρα $\eta\mu A = \frac{4}{5}$.

15185. α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας ω του διπλανού σχήματος και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 11)

β) Αν $\sin \omega = -\frac{3}{5}$, να βρείτε το $\eta\mu \omega$.

(Μονάδες 14)



Λύση

α) Το συνημίτονο της γωνίας ω είναι όσο και η τετμημένη του σημείου B του τριγωνομετρικού κύκλου.

Άρα $\sin \omega = -\frac{3}{5}$.

β) Είναι $\eta\mu^2 \omega + \sin^2 \omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 \omega + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 \omega = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \eta\mu \omega = \pm \frac{4}{5}$.

Στο σχήμα βλέπουμε ότι $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, οπότε $\eta\mu \omega > 0$, άρα $\eta\mu \omega = \frac{4}{5}$.

15192. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$.

α) Να αιτιολογήσετε με βάση το σχήμα γιατί

$$\sin \omega = -\frac{3}{5}.$$

(Μονάδες 12)

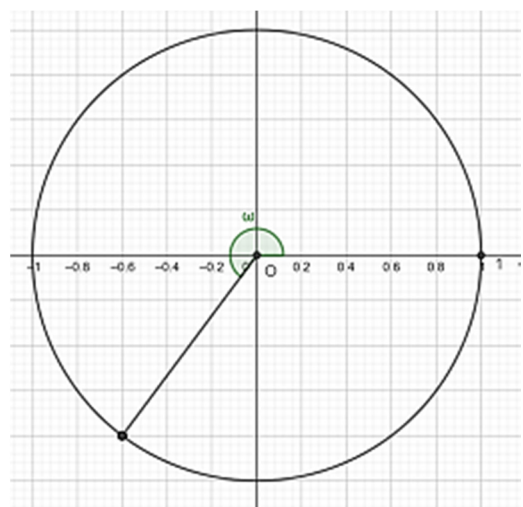
β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

i. $\eta\mu \omega$.

(Μονάδες 6)

ii. $\epsilon\phi \omega$

(Μονάδες 7)



Λύση

α) Το συνημίτονο μιας γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι ή τετμημένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της με τον κύκλο. Οπότε είναι $\sin \omega = -0,6 = -\frac{3}{5}$.

β) i. $\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 \omega + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 \omega = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \eta\mu \omega = \pm \frac{4}{5}$

Επειδή η γωνία ω βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο είναι $\eta\mu \omega < 0$, άρα $\eta\mu \omega = -\frac{4}{5}$.

ii. $\epsilon\phi \omega = \frac{\eta\mu \omega}{\sigma\upsilon\nu \omega} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

15429.α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 476^\circ = \eta\mu 116^\circ$. (Μονάδες 11)

β) Αν γνωρίζουμε ότι το $\eta\mu 116^\circ$ είναι περίπου $\frac{9}{10}$, να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu 116^\circ$. (Μονάδες 14)

Λύση

α) $\eta\mu 476^\circ = \eta\mu(360^\circ + 116^\circ) = \eta\mu 116^\circ$

β) $\eta\mu^2 116^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 116^\circ = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 116^\circ = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 116^\circ = 1 - \frac{81}{100} = \frac{19}{100} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu 116^\circ = \pm \frac{\sqrt{19}}{10}$. Επειδή $116^\circ \in (90^\circ, 180^\circ)$ είναι $\sigma\upsilon\nu 116^\circ < 0$ άρα $\sigma\upsilon\nu 116^\circ = -\frac{\sqrt{19}}{10}$.

15814. Δίνεται ο κύκλος του παρακάτω σχήματος με κέντρο Κ και ακτίνα 10cm. Επίσης δίνεται το τόξο $\widehat{AB}$ με μήκος 12cm και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω .

α) i. Να αιτιολογήσετε γιατί το μέτρο της γωνίας ω είναι 1, 2 rad.

(Μονάδες 6)

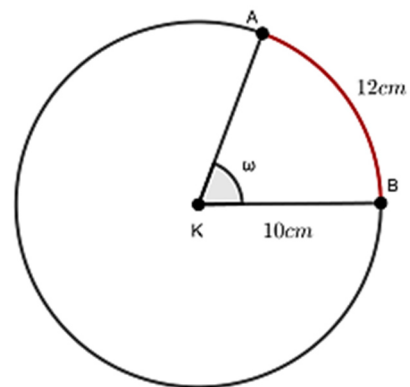
ii. Με χρήση του αι) ερωτήματος, να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ω είναι οξεία.

(Μονάδες 6)

β) Αν $\sin \omega = \frac{9}{25}$, να βρείτε το $\eta\mu \omega$.

(Δίνεται ότι $\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$)

(Μονάδες 13)



α) i) Το ακτίνιο (rad) είναι η γωνία που όταν γίνει επίκεντρη σε κύκλο ακτίνας ρ , βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ . Εδώ έχουμε επίκεντρη σε κύκλο ακτίνας 10 cm γωνία ω , η οποία βαίνει σε τόξο 12 cm. Άρα αφού το 1 rad σε αυτόν τον κύκλο είναι η γωνία που βαίνει σε τόξο 10 cm τότε η γωνία

$\omega = \frac{12}{10} = 1,2 \text{ rad}$.

ii) Είναι $1,2 < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2,4 < \pi$ ισχύει, άρα $\omega < \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ και είναι οξεία.

β) Ισχύει $\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 \omega + \left(\frac{9}{25}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 \omega = 1 - \frac{81}{625} \Leftrightarrow \eta\mu^2 \omega = \frac{544}{625} \Leftrightarrow$

$\eta\mu \omega = \pm \frac{\sqrt{544}}{25} \Leftrightarrow \eta\mu \omega = \pm \frac{4\sqrt{34}}{25}$ και επειδή η γωνία ω είναι οξεία τότε $\eta\mu \omega = \frac{4\sqrt{34}}{25}$.

16000.α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία θ ώστε $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Έστω θ μια γωνία με $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$. Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Έστω ότι υπάρχει γωνία θ με $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$.

$$\text{Είναι } \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 1 \text{ άτοπο.}$$

Άρα δεν υπάρχει γωνία θ ώστε $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$.

β) $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Επειδή $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ είναι $\eta\mu\theta < 0$, άρα $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

20817. Δίνεται γωνία ω , με $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$.

α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \epsilon\varphi\omega}$.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Είναι $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \pm \frac{3}{5}$.

Επειδή $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$ είναι $\eta\mu\omega < 0$, άρα $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$.

β) Είναι $\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$ και $A = \frac{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \epsilon\varphi\omega} = \frac{-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{-\frac{7}{5}}{\frac{4}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{-\frac{7}{5}}{\frac{7}{4}} = -\frac{4}{5}$

20824. Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο

δίνεται γωνία $\widehat{AOx} = \omega$, $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ και το

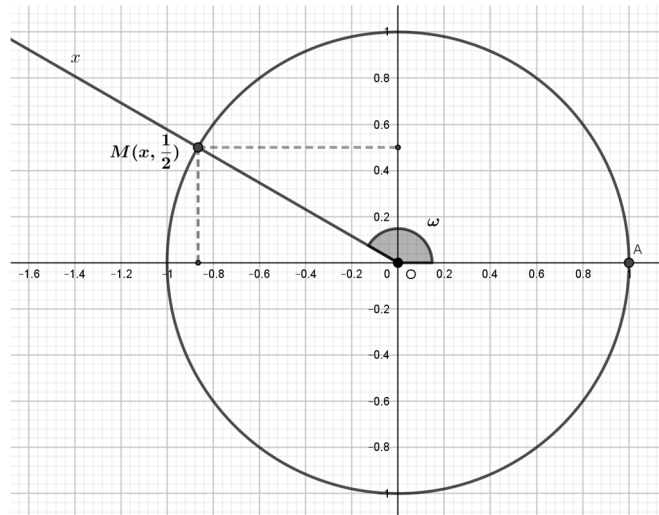
σημείο $M\left(x, \frac{1}{2}\right)$.

α) Να βρείτε το $\eta\mu\omega$. Με ποιον τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας ω ισούται η τετμημένη x του σημείου M ;

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Επειδή το σημείο M βρίσκεται στον τριγωνομετρικό κύκλο και σχηματίζει γωνία ω με τον ημιάξονα Ox , έχει συντεταγμένες του σημείου $(\sigma\upsilon\nu\omega, \eta\mu\omega)$, άρα $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$.

β) Είναι $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Επειδή $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, είναι $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$, άρα $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

Θέμα 2ο

15652. Δίνεται $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που

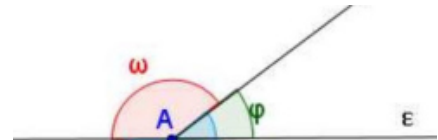
σχηματίζεται με κορυφή το σημείο A της ευθείας (ϵ) του διπλανού σχήματος.

α) Να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\eta\mu\acute{\iota}\tau\omicron\nu\omicron$ της γωνίας φ .

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το $\eta\mu\acute{\iota}\tau\omicron\nu\omicron$ και το $\sigma\upsilon\nu\eta\mu\acute{\iota}\tau\omicron\nu\omicron$ της γωνίας ω του σχήματος.

(Μονάδες 15)



Λύση

α) Είναι $\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1 - \eta\mu^2\varphi$

Αντικαθιστούμε το $\eta\mu\varphi$ με $\frac{3}{5}$ και έχουμε $\sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}$

Επειδή φ οξεία γωνία είναι $\sigma\upsilon\nu\varphi > 0$, οπότε έχουμε $\sigma\upsilon\nu\varphi = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

β) Από το σχήμα προκύπτει ότι $\omega = \pi - \varphi$.

Άρα: $\eta\mu\omega = \eta\mu(\pi - \varphi) = \eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \sigma\upsilon\nu(\pi - \varphi) = -\sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{4}{5}$,

15092. Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί ο τριγωνομετρικός κύκλος και η ευθεία (δ) η οποία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Η τελική πλευρά ΟΒ της θετικής γωνίας $\widehat{AOB} = \hat{\theta}$, αν προεκταθεί τέμνει την ευθεία (δ) στο σημείο Γ.

Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$.

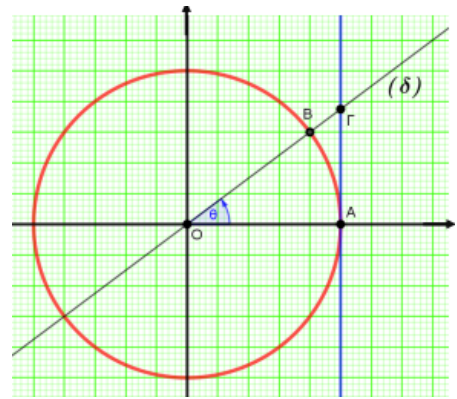
α) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τον αριθμό συνθ και στη συνέχεια τον αριθμό εφθ.

(Μονάδες 13)

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.

(Μονάδες 12)

Λύση



α) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $\text{συν}\theta = 0,8 = \frac{4}{5}$. Είναι $\varepsilon\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\text{συν}\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$.

β) Γνωρίζουμε ότι είναι $B(\text{συν}\theta, \eta\mu\theta)$ και $\Gamma(1, \varepsilon\phi\theta)$. Έτσι έχουμε $B\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \Gamma\left(1, \frac{3}{4}\right)$.

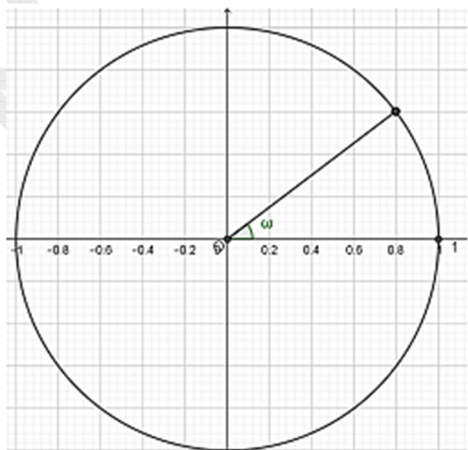
15193. Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $\text{συν}\omega = 0,8$.

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε τις γωνίες στο διάστημα $[0, 2\pi]$, των οποίων το συνημίτονο είναι $-0,8$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την σχέση των γωνιών που βρήκατε στο α) ερώτημα με την γωνία $\hat{\omega}$.

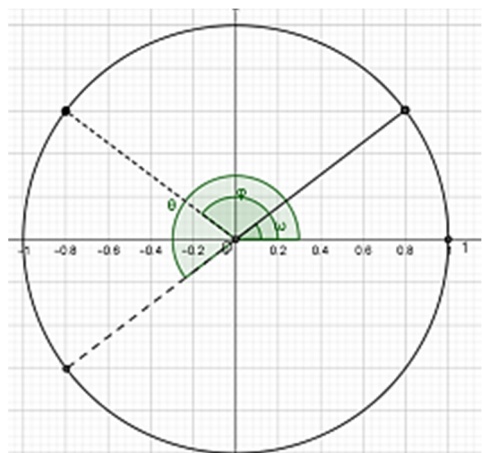
(Μονάδες 13)



Λύση

α) Οι γωνίες που έχουν συνημίτονο $-0,8$ έχουν τελική πλευρά στο δεύτερο ή στο τρίτο τεταρτημόριο, ή οποία τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο σε σημεία με τετμημένη $-0,8$. Άρα οι ζητούμενες γωνίες ϕ και θ είναι όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα, με την τελική τους πλευρά να είναι με διακεκομμένη γραμμή.

β) Δύο γωνίες σχεδιασμένες στον τριγωνομετρικό κύκλο έχουν αντίθετα συνημίτονα, αν τα σημεία τομής της τελικής τους πλευράς με τον τριγωνομετρικό κύκλο είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$ ή ως προς την αρχή Ο των αξόνων. Οπότε οι δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $\phi = \pi - \omega$ ή διαφέρουν κατά π , οπότε $\theta = \pi + \omega$.



15266. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος και οι γωνίες θ και $-\theta$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $\sin\theta = \frac{3}{5}$.

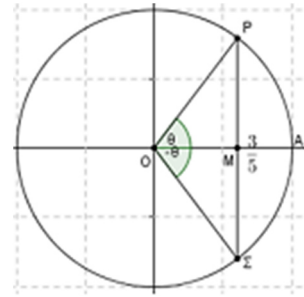
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το $\eta\mu\theta$ και το $\sin\theta$ της γωνίας $-\theta$.

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Η τελική πλευρά της γωνίας θ είναι η OP και το σημείο P έχει τετμημένη $x = \frac{3}{5}$, άρα $\sin\theta = \frac{3}{5}$.

β) Είναι $\eta\mu^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \pm \frac{4}{5}$

Επειδή η γωνία θ βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο είναι $\eta\mu\theta > 0$, άρα $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$

γ) $\eta\mu(-\theta) = -\eta\mu\theta = -\frac{4}{5}$, $\sin(-\theta) = \sin\theta = \frac{3}{5}$

15999. Δίνεται η παράσταση $A = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \eta\mu(-\theta)$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu\theta$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A , όταν $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ και $\sin\theta = \frac{12}{13}$.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) $A = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \eta\mu(-\theta) = 2\eta\mu\theta - \eta\mu\theta = \eta\mu\theta$

β) $\eta\mu^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \pm \frac{5}{13}$

Επειδή $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ είναι $\eta\mu\theta < 0$, άρα $\eta\mu\theta = -\frac{5}{13}$, οπότε $A = -\frac{5}{13}$.

17936. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο

δίνεται η γωνία $\widehat{AOZ} = \theta$.

α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών

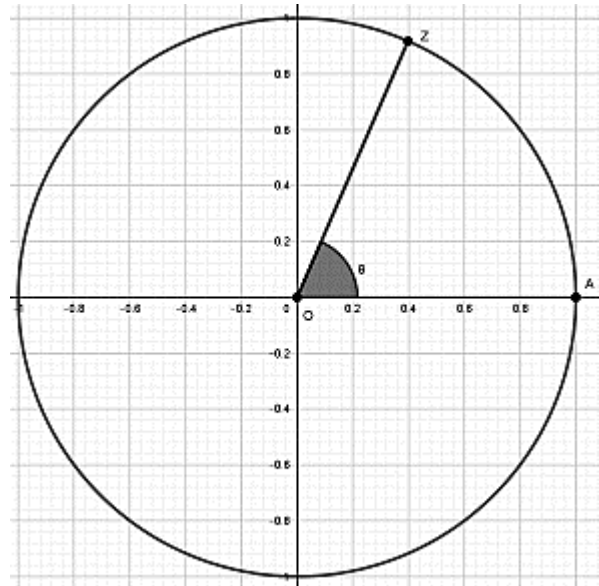
$3\pi + \theta$ και $\frac{\pi}{2} + \theta$. (Μονάδες 9)

β) i. Να αιτιολογήσετε γιατί $\sin \theta = 0,4$. (Μονάδες 7)

ii. Με χρήση του βι) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

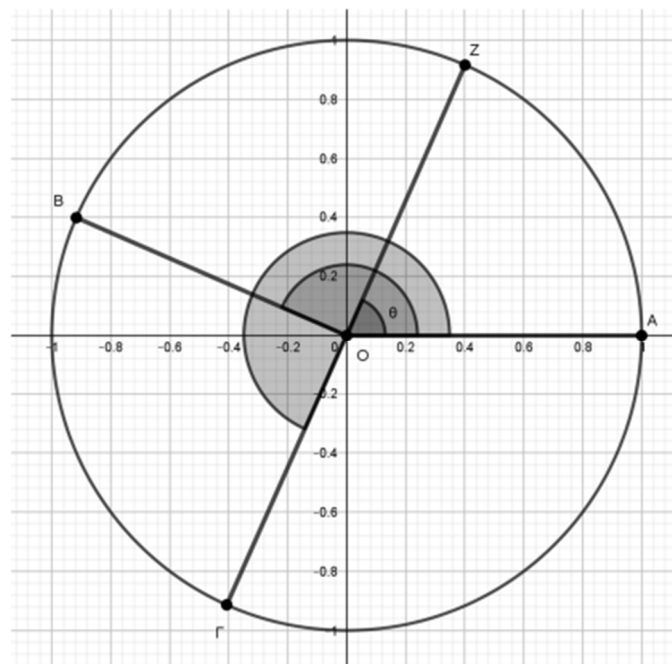
$\sin(3\pi + \theta)$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Η τελική πλευρά της $3\pi + \theta$, είναι η ΟΓ και η τελική πλευρά της $\frac{\pi}{2} + \theta$ είναι η ΟΒ.



β) i) Όπως φαίνεται στο σχήμα, η τετμημένη του σημείου Z της τελικής πλευράς της γωνίας θ είναι 0,4, άρα $\sin \theta = 0,4$.

ii) 1^{ος} τρόπος: Από τις συμμετρίες που σχηματίζονται στον τριγωνομετρικό κύκλο, έχουμε:

$$\sin(3\pi + \theta) = -0,4 \quad \text{και} \quad \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = 0,4.$$

2^{ος} τρόπος: Είναι $\sin(3\pi + \theta) = \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta = -0,4$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sin \theta = 0,4$

17933. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $\widehat{AOZ} = \theta$.

α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi + \theta$ και $4\pi - \theta$.

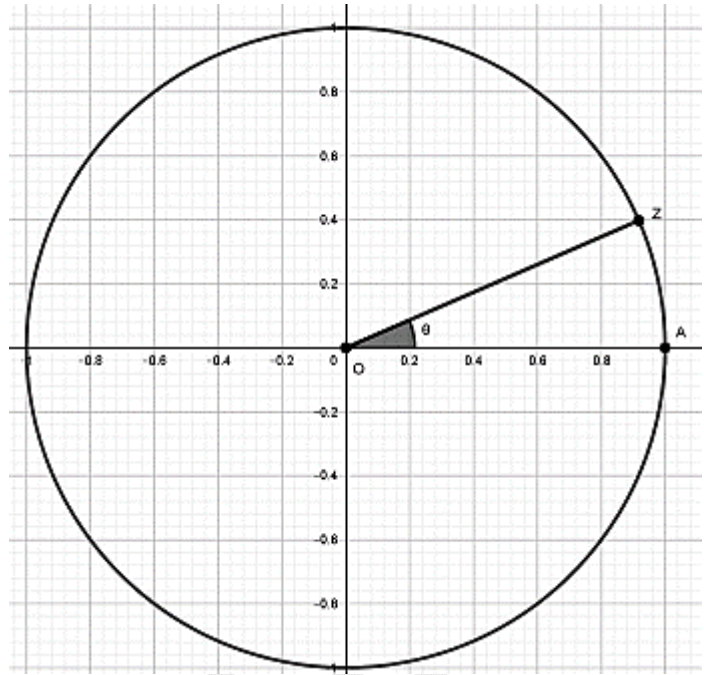
(Μονάδες 9)

β) i. Να αιτιολογήσετε γιατί $\eta\mu\theta = 0,4$.

(Μονάδες 7)

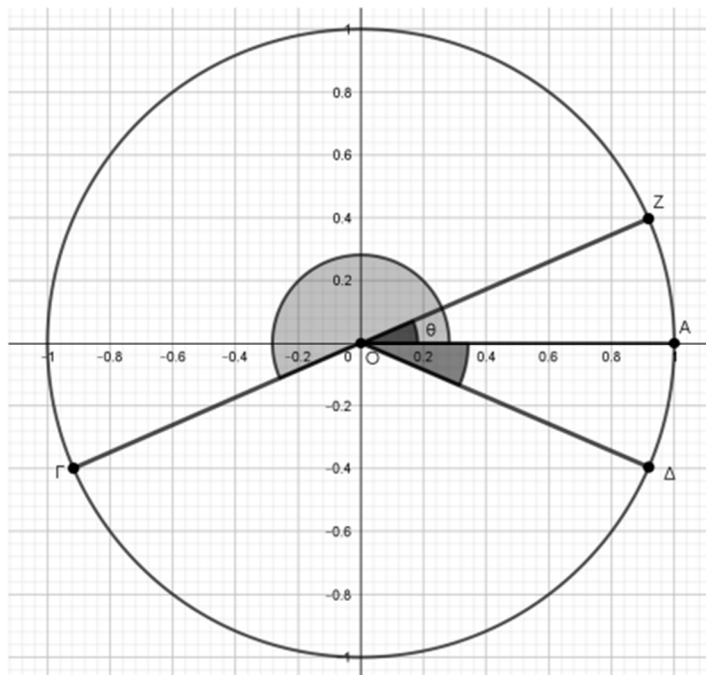
ii. Με χρήση του βι) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\eta\mu(3\pi + \theta)$ και $\eta\mu(4\pi - \theta)$.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Η τελική πλευρά της $3\pi + \theta$ είναι η ΟΓ και η τελική πλευρά της $4\pi - \theta$ είναι ΟΔ.



β) i) Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, η τεταγμένη του σημείου Z της τελικής πλευράς της γωνίας θ είναι 0,4, άρα $\eta\mu\theta = 0,4$.

ii) 1^{ος} τρόπος: Από τις συμμετρίες που σχηματίζονται στον τριγωνομετρικό κύκλο, έχουμε:

$$\eta\mu(3\pi + \theta) = -0,4 \quad \text{και} \quad \eta\mu(4\pi - \theta) = -0,4.$$

2^{ος} τρόπος: Είναι $\eta\mu(3\pi + \theta) = \eta\mu(\pi + \theta) = -\eta\mu\theta = -0,4$ και $\eta\mu(4\pi - \theta) = \eta\mu(-\theta) = -\eta\mu\theta = -0,4$

21237. Δίνεται ότι $\eta\mu\theta = \frac{\eta\mu\frac{2\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}}$.

α) Να δείξετε ότι:

i. $\eta\mu\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (Μονάδες 5)

ii. $\eta\mu\theta = \sqrt{3} - 1$ (Μονάδες 7)

β) Αν για την γωνία θ έχουμε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\theta$. (Μονάδες 13)

Λύση

α) i. $\eta\mu\frac{2\pi}{3} = \eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ii. $\eta\mu\theta = \frac{\eta\mu\frac{2\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{2}{4}} = \frac{4(\sqrt{3}-1)}{4} = \sqrt{3}-1$

β) Είναι $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{3}-1)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - (3 - 2\sqrt{3} + 1) = 1 - 3 + 2\sqrt{3} - 1 = 2\sqrt{3} - 3 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \pm\sqrt{2\sqrt{3}-3}.$

Επειδή $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$, άρα $\sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{2\sqrt{3}-3}.$

22002. Δίνεται ότι $\eta\mu 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Να βρείτε τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς αριθμούς,

αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) $\sigma\upsilon\nu 72^\circ$ (Μονάδες 8)

β) $\sigma\upsilon\nu 108^\circ$ (Μονάδες 9)

γ) $\eta\mu 162^\circ$ (Μονάδες 8)

Λύση

α) $\sigma\upsilon\nu 72^\circ = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - 18^\circ) = \eta\mu 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

β) $\sigma\upsilon\nu 108^\circ = \sigma\upsilon\nu(90^\circ + 18^\circ) = -\eta\mu 18^\circ = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

γ) $\eta\mu 162^\circ = \eta\mu(180^\circ - 18^\circ) = \eta\mu 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Θέμα 4ο

18231. Έστω $f : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση C_f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Να βρείτε τη μονοτονία και τη μέγιστη τιμή της. (Μονάδες 5)

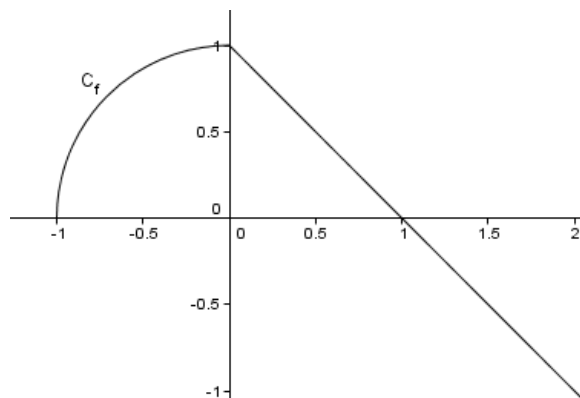
β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(-\frac{3}{5}\right), f\left(-\frac{5}{9}\right)$. (Μονάδες 7)

γ) Αν ο τύπος της συνάρτησης είναι

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x, & x > 0 \end{cases}, \text{ να βρείτε τους αριθμούς}$$

$f(\sin 120^\circ), f(\eta\mu 120^\circ)$. (Μονάδες 8)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x-2), x \geq 1$. (Μονάδες 5)



Λύση

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=0$ το $f(0)=1$.

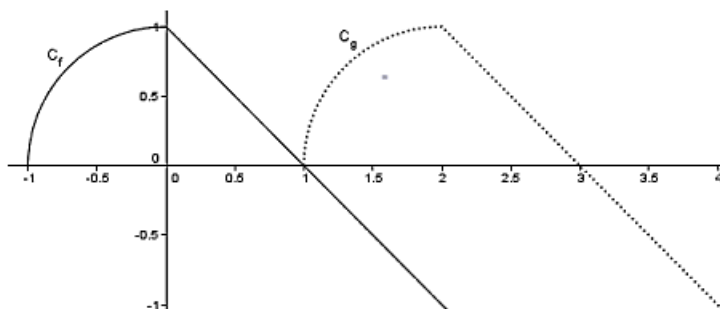
β) Είναι $0 < \frac{3}{5} < 1 \Leftrightarrow -1 < -\frac{3}{5} < 0$ και $0 < \frac{5}{9} < 1 \Leftrightarrow -1 < -\frac{5}{9} < 0$.

Επίσης $-\frac{3}{5} + \frac{5}{9} = \frac{-27+25}{45} = -\frac{2}{45} < 0$ άρα τελικά $-1 < -\frac{3}{5} < -\frac{5}{9} < 0 \stackrel{f \uparrow [-1,0]}{\Rightarrow} f\left(-\frac{3}{5}\right) < f\left(-\frac{5}{9}\right)$.

γ) Είναι $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}$ άρα $f(\sin 120^\circ) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Είναι $\eta\mu 120^\circ = \eta\mu(180^\circ - 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ άρα $f(\eta\mu 120^\circ) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$

δ) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει αν μετατοπίσουμε την C_f κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά.



Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Θέμα 2ο

14233. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x, x \in \mathbb{R}$.

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της f ; (Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου. (Μονάδες 13)

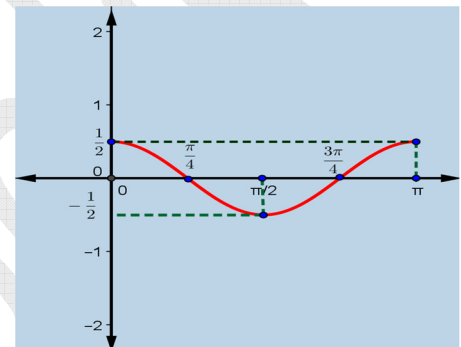
Λύση

α) $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin 2x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \sin 2x \leq f(\pi)$ άρα $f_{\max} = \frac{1}{2}$ και $f_{\min} = -\frac{1}{2}$.

Η περίοδος είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

β) Έχουμε τον πίνακα

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin 2x$	1	0	-1	0	1
$\frac{1}{2} \sin 2x$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$



14323. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3 \sin 2x, x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f . (Μονάδες 12)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μιας περιόδου. (Μονάδες 13)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$\sin 2x$					
$f(x) = -3 \sin 2x$					

Λύση

α) Έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = -3 \sin 2x, x \in \mathbb{R}$.

Για την περίοδο έχουμε $T = \frac{2\pi}{\omega}$ με $\omega=2$ άρα είναι $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

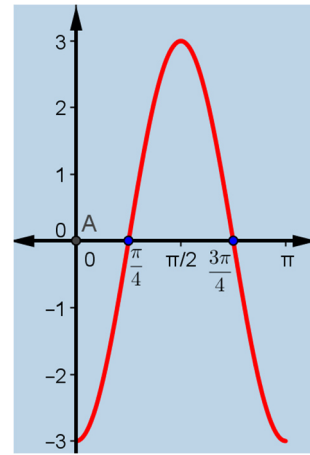
Επίσης έχουμε ότι $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ (πολ/ζω με -3) $\Leftrightarrow -3 \cdot (-1) \geq -3 \sin 2x \geq -3 \cdot 1 \Leftrightarrow$

$3 \geq -3 \sin 2x \geq -3 \Leftrightarrow -3 \leq -3 \sin 2x \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq f(x) \leq 3 \Leftrightarrow f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Οπότε η μέγιστη τιμή της f είναι το 3 ($f_{\max} = 3$) και ελάχιστη τιμή της f είναι το -3 ($f_{\min} = -3$)

β)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
2x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
συν2x	1	0	-1	0	1
f(x) = -3συν2x	-3	0	3	0	-3



15091. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) i. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $f(2025\pi)$.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) i. $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

ii. Η μέγιστη τιμή της f είναι $\sqrt{2}$ και η ελάχιστη $-\sqrt{2}$.

β) $f(2025\pi) = \sqrt{2} \sin(2025\pi) = \sqrt{2} \sin(2024\pi + \pi) = \sqrt{2} \sin \pi = -\sqrt{2}$

15172. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4\eta\mu(11\pi - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι:

i. $\eta\mu(11\pi - x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

ii. $f(x) = 4\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 4)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4\eta\mu x$ όταν $x \in [0, 2\pi]$.

(Μονάδες 15)

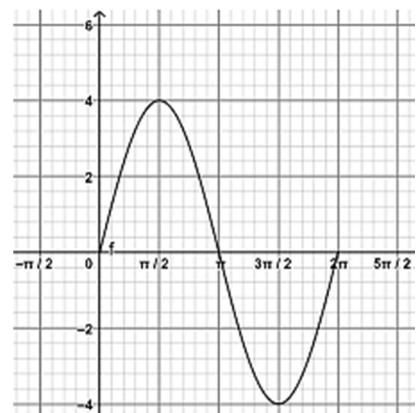
Λύση

α) i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\eta\mu(11\pi - x) = \eta\mu(10\pi + \pi - x) = \eta\mu(5 \cdot 2\pi + \pi - x) = \eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x$

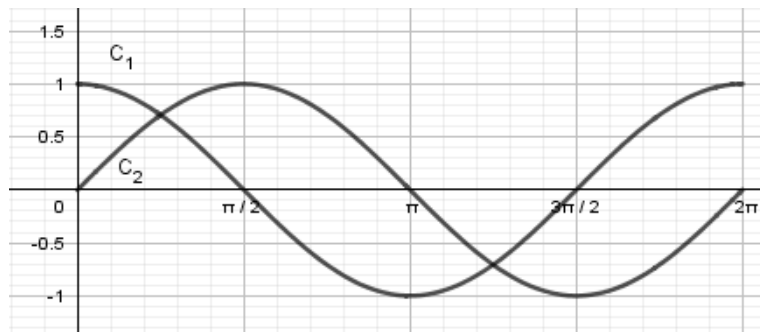
ii. Είναι $f(x) = 4\eta\mu(11\pi - x) = 4\eta\mu x$

β) Παρατηρούμε πως η $f(x) = 4\eta\mu x$ έχει την μορφή $\rho\eta\mu\omega x$ με $\rho=4$ και $\omega=1$. Άρα η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή 4 και ελάχιστη τιμή -4 με περίοδο 2π . Έχοντας τα παραπάνω χαρακτηριστικά και τον παρακάτω πίνακα τιμών στο διάστημα $[0, 2\pi]$,

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
4ημx	0	4	0	-4	0



15644. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 για $x \in [0, 2\pi]$.



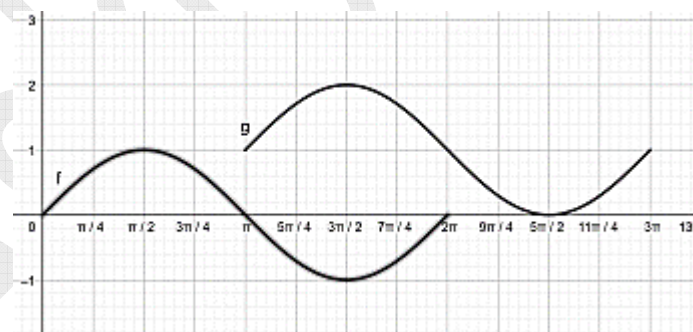
- α) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x) = \sin x$ και $g(x) = \cos x$ για $x \in [0, 2\pi]$ ποια από τις C_1, C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = \sin x$ και ποια της $g(x) = \cos x$;
 Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)
- β) Με την βοήθεια του σχήματος να λύσετε την εξίσωση $\sin x = \cos x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$. (Μονάδες 15)

Λύση

α) Είναι $f(0) = \sin 0 = 0$, άρα η C_2 είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
 Ακόμα $g(0) = \cos 0 = 1$ άρα η C_1 είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

β) Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων είναι τα Α και Β, με τετμημένες $x_1 = \frac{\pi}{4}$ και $x_2 = \frac{5\pi}{4}$.

15788.



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sin x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g που προέκυψε από την f με δύο διαδοχικές μετατοπίσεις.

Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g , την μέγιστη τιμή της και σε ποια θέση την αποκτά. (Μονάδες 13)
- β) i. τις δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της f από τις οποίες προέκυψε η g . (Μονάδες 6)
- ii. τον τύπο της g . (Μονάδες 6)

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού συνάρτησης σχεδιασμένης σε σύστημα αξόνων είναι η προβολή της γραφικής παράστασης στον άξονα $x'x$. Οπότε είναι $D_g = [\pi, 3\pi]$.

Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης g είναι 2 στην θέση $x = \frac{3\pi}{2}$.

β) i. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της f . Η γραφική παράσταση της f μετατοπίστηκε προς τα «δεξιά» κατά π και προς τα «πάνω» κατά 1.

ii. Έχουμε $g(x) = f(x - \pi) + 1$, δηλαδή $g(x) = \eta\mu(x - \pi) + 1$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $[\pi, 3\pi]$.

15009. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

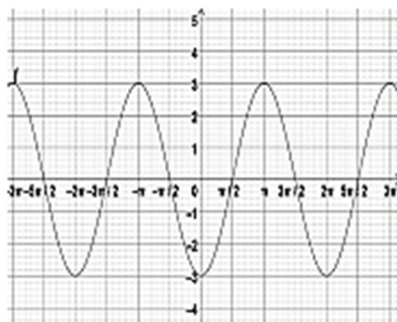
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

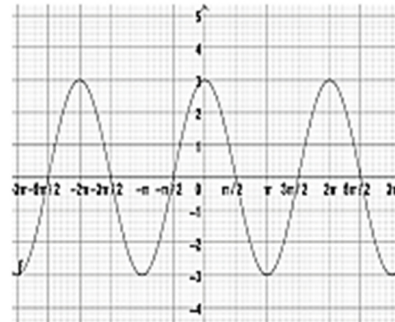
(Μονάδες 7)

γ) Από τις παρακάτω τέσσερις γραφικές παραστάσεις μία μόνο αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της f , να επιλέξετε αυτή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $f(x) = -3\sin x$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

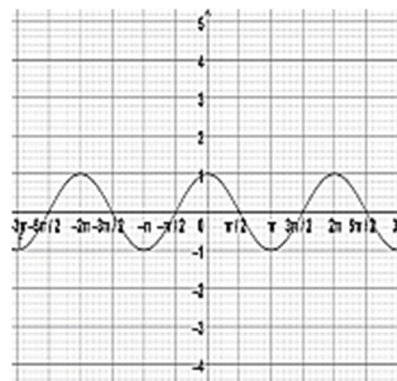
A)



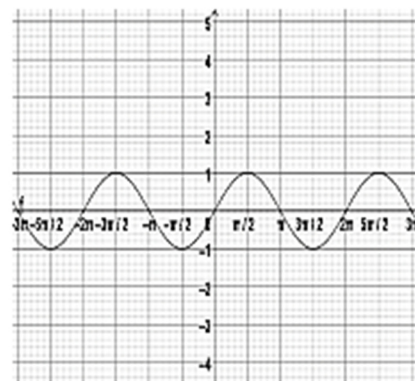
B)



Γ)



Δ)



(Μονάδες 10)

Λύση

α) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \rho \cdot \sin(\omega x)$, $\rho < 0$ με $\rho = -3$ και $\omega = 1$ οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -3 και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 3 .

β) Η συνάρτηση έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$.

γ) Το σχήμα A) είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = -3\sin x$, $x \in \mathbb{R}$, γιατί είναι η μόνη που έχει μέγιστη τιμή 3 για $x = \pi$ και ελάχιστη -3 για $x = 0$ και $x = 2\pi$.

15809. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της g . (Μονάδες 6)

β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$					

(Μονάδες 10)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα μίας περιόδου. (Μονάδες 9)

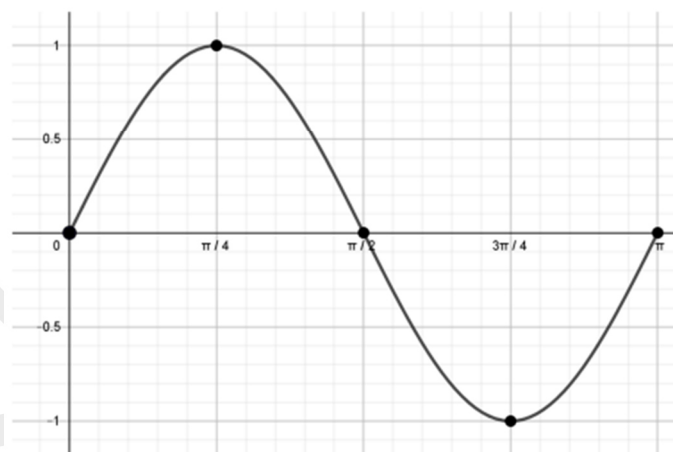
Λύση

α) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$, $\rho > 0$ με $\rho = 1$ και $\omega = 2$ οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -1 και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 1 . Έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$.

β) i)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = \eta\mu 2x$	0	1	0	-1	0

γ)



15810. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της g . (Μονάδες 6)

β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$					

(Μονάδες 10)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g σε διάστημα μίας περιόδου. (Μονάδες 9)

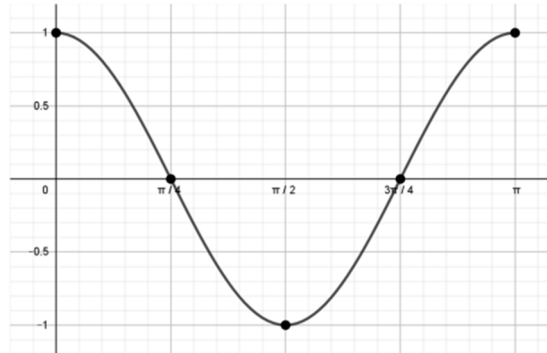
Λύση

α) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega x)$, $\rho > 0$ με $\rho = 1$ και $\omega = 2$ οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -1 και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 1 . Έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$.

β) i)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$g(x) = \sin 2x$	1	0	-1	0	1

ii)



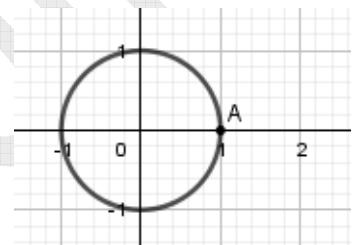
17793. Στον τριγωνομετρικό κύκλο έχει σημειωθεί το σημείο Α.

α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλα σας και να τοποθετήσετε κατά προσέγγιση στον τριγωνομετρικό κύκλο σημεία Β, Γ, Δ ώστε να δημιουργηθούν τόξα $\widehat{AB} = 1\text{rad}$, $\widehat{AG} = 2\text{rad}$ και $\widehat{AD} = 4\text{rad}$.

(Μονάδες 13)

β) Για κάθε ένα τόξο του α) ερωτήματος να αποφανθείτε αν το συνημίτονο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 12)



Λύση

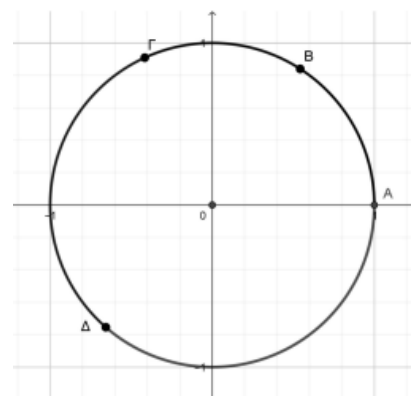
α) Είναι $\widehat{AB} = 1\text{rad} < \frac{\pi}{2} \cong 1,57$, άρα το σημείο Β βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.

Είναι $\widehat{AG} = 2\text{rad}$, άρα $\frac{\pi}{2} < \widehat{AG} < \pi$, οπότε το σημείο Γ βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο.

Είναι $\widehat{AD} = 4\text{rad}$, άρα $\pi < \widehat{AD} < \frac{3\pi}{2}$, οπότε το Δ βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο.

β) Επειδή $\widehat{AOB} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\sin \widehat{AOB} > 0$.

Επειδή $\widehat{AOG} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ είναι $\sin \widehat{AOG} < 0$. Επειδή $\widehat{AOD} \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ είναι $\sin \widehat{AOD} < 0$.



20660. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(180^\circ - x) + \sigma\upsilon\nu(90^\circ - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 12)

β) i. Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f .

(Μονάδες 6)

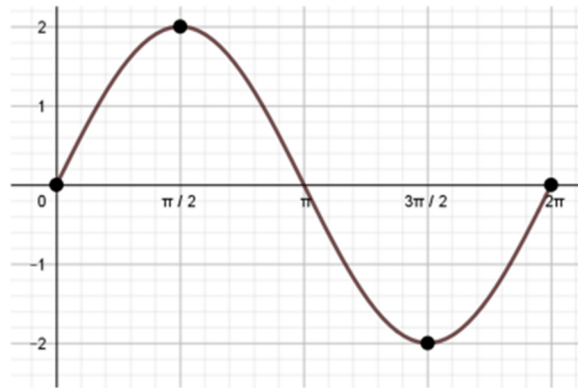
ii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f για $0 \leq x \leq 2\pi$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Είναι $f(x) = \eta\mu(180^\circ - x) + \sigma\upsilon\nu(90^\circ - x) = \eta\mu x + \eta\mu x = 2\eta\mu x$

β) i) Η f είναι της μορφής $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x)$ με $\rho = 2$ και $\omega = 1$ άρα έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$, μέγιστη τιμή το $\rho = 2$ και ελάχιστη τιμή το $-\rho = -2$.



20807. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi + x) + \eta\mu(-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -2\eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την περίοδο αυτής. (Μονάδες 12)

β)

i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = -2\eta\mu x$					

(Μονάδες 6)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $0 \leq x \leq 2\pi$.

(Μονάδες 7)

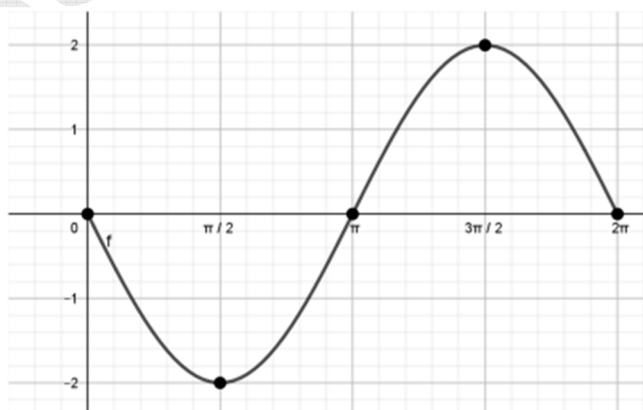
Λύση

α) Είναι $f(x) = \eta\mu(\pi + x) + \eta\mu(-x) = -\eta\mu x - \eta\mu x = -2\eta\mu x$.

Είναι της μορφής $f(x) = -\rho \eta\mu(\omega x)$ με $\rho = 2$ και $\omega = 1$ άρα είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$.

β)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = -2\eta\mu x$	0	-2	0	2	0



20867. Δίνεται η παράσταση $A = \sin^2 x - \eta\mu^2 x$.

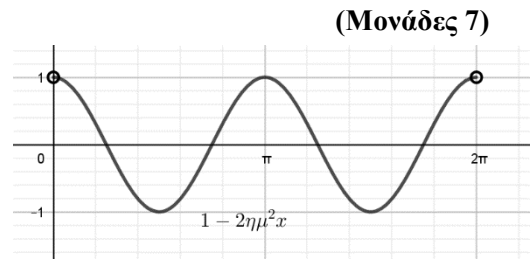
α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για $x = 0$.

β) Να δείξετε ότι $A = 1 - 2\eta\mu^2 x$.

(Μονάδες 9)

γ) Με χρήση της παρακάτω γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $1 - 2\eta\mu^2 x$ και του ερωτήματος β), να λύσετε την εξίσωση $A = 1$, για $0 < x < 2\pi$.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Για $x = 0$ είναι $A = \sin^2 0 - \eta\mu^2 0 = 1^2 - 0 = 1$

β) $A = \sin^2 x - \eta\mu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x - \eta\mu^2 x = 1 - 2\eta\mu^2 x$

γ) $A = 1 \Leftrightarrow 1 - 2\eta\mu^2 x = 1$

Οι λύσεις της εξίσωσης $A = 1$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της $y = 1 - 2\eta\mu^2 x$ με την ευθεία $y = 1$ που βρίσκονται στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

Επειδή το κοινό τους σημείο είναι το $(\pi, 1)$, η λύση της εξίσωσης $A = 1$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$ είναι η $x = \pi$.

22003. Δίδεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \eta\mu(2\pi x)$.

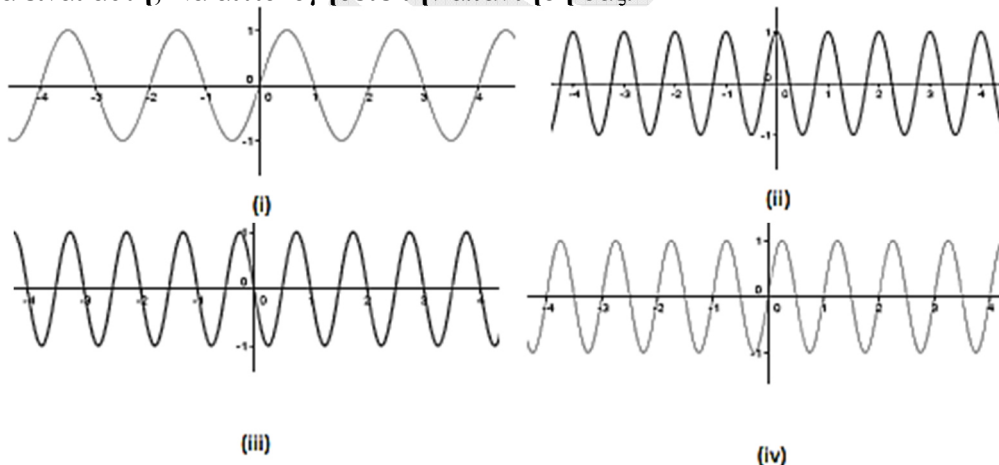
α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο $T = 1$.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

(Μονάδες 8)

γ) Μία από τις παρακάτω τέσσερις καμπύλες αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Ποια είναι αυτή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 9)

Λύση

α) Η περίοδος είναι $T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

β) Είναι $f(0) = \eta\mu 0 = 0$ και $f\left(\frac{1}{4}\right) = \eta\mu\left(2\pi \cdot \frac{1}{4}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$.

γ) Παρατηρούμε ότι περίοδο $T = 1$ έχουν οι καμπύλες (iii) και (iv).

Η συνάρτηση f στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ (1ο τεταρτημόριο) είναι θετική, οπότε η καμπύλη (iv) είναι η γραφική παράσταση της f .

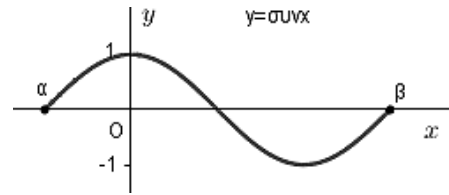
22007. Στο σχήμα φαίνεται απόσπασμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\sin x$.

α) Να βρείτε τα α και β .

(Μονάδες 12)

β) Προς ποια κατεύθυνση και κατά πόσο πρέπει να μετατοπιστεί η παραπάνω καμπύλη ώστε να συμπίσει με τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\eta \mu x$;

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Τα α, β είναι ρίζες της εξίσωσης $\sin x = 0$.

Οι ρίζες είναι της μορφής $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Το α είναι η μεγαλύτερη αρνητική ρίζα της εξίσωσης, οπότε:

$x < 0 \Leftrightarrow k\pi + \frac{\pi}{2} < 0 \Leftrightarrow k\pi < -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow k < -\frac{1}{2}$. Η μεγαλύτερη ακέραια τιμή του k είναι το -1 , άρα

$$\alpha = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Το β είναι η δεύτερη μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης, οπότε

$x > 0 \Leftrightarrow k\pi + \frac{\pi}{2} > 0 \Leftrightarrow k\pi > -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow k > -\frac{1}{2}$. Η μικρότερη τιμή του ακέραιου k είναι το 0 και η ρίζα είναι

$x = 0 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ και η δεύτερη τιμή του ακέραιου k είναι το 1 , τότε: $\beta = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$.

β) Γνωρίζουμε ότι $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta \mu x$, οπότε αρκεί να μετατοπιστεί δεξιά

κατά $\frac{\pi}{2}$ για να συμπίσει με την $y = \eta \mu x$.

Θέμα 4ο

14238. Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση

$$h(t) = 8 + 6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) \text{ και } 0 \leq t \leq 180.$$

- α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος. (Μονάδες 8)
 β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας. (Μονάδες 3)
 γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec; (Μονάδες 4+2=6)

δ) Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και :

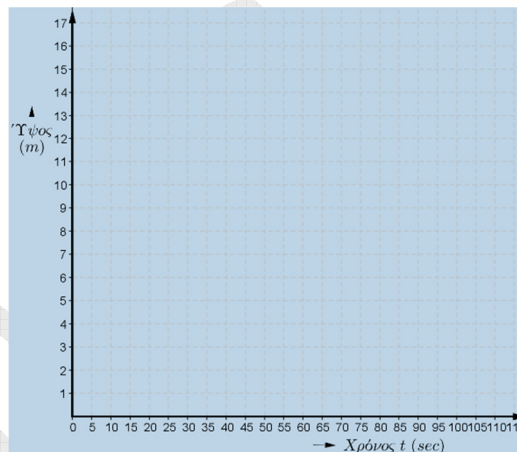
- i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους $h(t)$.

(Μονάδες 3)

t	0	15	30	45	60	75	90
$h(t)$							

- ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(t)$ με $0 \leq t \leq 90$.

(Μονάδες 5)



Λύση

α) Για την $h(t) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi \cdot t}{30}\right)$ με $0 \leq t \leq 180 \Leftrightarrow -1 \leq \eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -6 \leq 6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) \leq 6 \Leftrightarrow$

$$-6 + 8 \leq 6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) + 8 \leq 6 + 8 \Leftrightarrow 2 \leq h(t) \leq 14 \Leftrightarrow h(45) \leq h(t) \leq h(15)$$

Άρα το μέγιστο ύψος της h είναι $h_{\max} = 14$ και το ελάχιστο ύψος της συνάρτησης h είναι $h_{\min} = 2$.

Το μέγιστο ύψος της h συμβαίνει τις στιγμές t για τις οποίες $h(t) = 14 \Leftrightarrow$

$$8 + 6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) = 14 \Leftrightarrow 6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) = 6 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) = 1 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi t}{30} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 60\kappa + 15 \quad (1)$$

$$\text{Όμως } 0 \leq t \leq 180 \Leftrightarrow 0 \leq 60\kappa + 15 \leq 180 \Leftrightarrow -15 \leq 60\kappa \leq 165 \Leftrightarrow -\frac{15}{60} \leq \kappa \leq \frac{165}{60} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq \kappa \leq \frac{33}{12}$$

Επειδή ο αριθμός κ είναι ακέραιος $\kappa=0$ ή $\kappa=1$ ή $\kappa=2$

Όταν $\kappa=0$ τότε $(1) \Rightarrow t=15$ sec

Όταν $\kappa=1$ τότε $(1) \Rightarrow t=75$ sec

Όταν $\kappa=2$ τότε $(1) \Rightarrow t=135$ sec

Το ελάχιστο ύψος της h συμβαίνει τις στιγμές t για τις οποίες $h(t) = 2 \Leftrightarrow$

$$8 + 6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) = 2 \Leftrightarrow 6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) = -6 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) = -1 = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi t}{30} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$t = 60\kappa - 15 \quad (2)$$

$$\text{Όμως } 0 \leq t \leq 180 \Leftrightarrow 0 \leq 60\kappa - 15 \leq 180 \Leftrightarrow 15 \leq 60\kappa \leq 195 \Leftrightarrow \frac{15}{60} \leq \kappa \leq \frac{195}{60} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \kappa \leq \frac{39}{12}$$

Επειδή ο αριθμός κ είναι ακέραιος $\kappa=1$ ή $\kappa=2$ ή $\kappa=3$

Όταν $\kappa=1$ τότε $(2) \Rightarrow t=45$ sec

Όταν $\kappa=2$ τότε $(2) \Rightarrow t=105$ sec

Όταν $\kappa=3$ τότε $(1) \Rightarrow t=165 \text{ sec}$

β) Ισχύει : Διάμετρος_{ρόδας} = $h_{\max} - h_{\min} = 14 - 2 = 12 \text{ m}$ οπότε

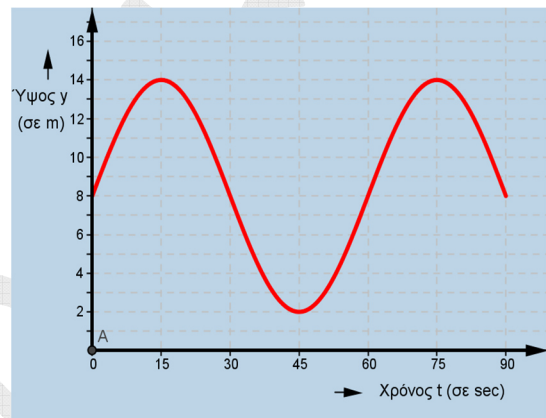
$$\text{Ακτίνα}_{\text{ρόδας}} = \frac{\text{Διάμετρος}_{\text{ρόδας}}}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ m}$$

γ) Η περίοδος της κίνησης είναι $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{30}} \Leftrightarrow T = 60 \text{ sec}$.

Οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec, έκαναν $\frac{180}{60} = 3$ γύρους

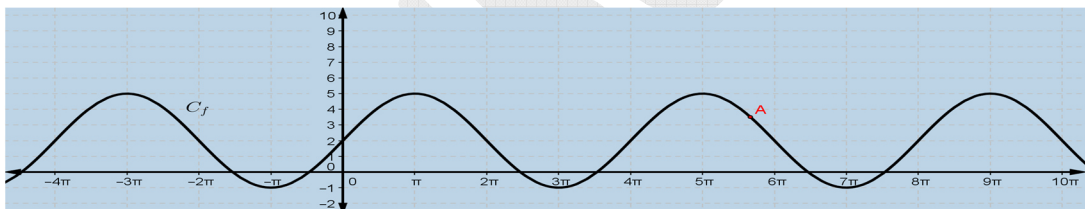
δ) i)

t	0	15	30	45	60	75	90
h(t)	8	14	8	2	8	14	8



δ) ii)

14239. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής $f(x) = \rho \mu(\omega x) + k$, με ρ, k πραγματικές σταθερές και $\omega > 0$.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

(Μονάδες 3)

ii. την περίοδο T της συνάρτησης f .

(Μονάδες 3)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ, ω και k . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι $\rho = 3, \omega = \frac{1}{2}$ και $k = 2$, να προσδιορίσετε αλγεβρικά την τετμημένη x_0

του σημείου $A\left(x_0, \frac{7}{2}\right)$ της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) i) Από το γράφημα της συνάρτησης παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή της είναι το 5 και η ελάχιστη το -1

ii) Η περίοδος T είναι το διάστημα μεταξύ δυο διαδοχικών τετμημένων των σημείων στα οποία η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο.

Οπότε $T = 5\pi - \pi = 4\pi$, όπου 5π και π είναι τα διαδοχικά μέγιστα.

$$\beta) T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{4\pi} \Rightarrow \omega = \frac{1}{2}$$

Από τη μορφή του γραφήματός βλέπουμε ότι $\rho > 0$ άρα μέγιστη τιμή της συνάρτησης f είναι $\rho + k$ ενώ η ελάχιστη τιμή είναι $-\rho + k$. Άρα με βάση το ερώτημα α) δημιουργούμε το σύστημα $\begin{cases} \rho + k = 5 \\ -\rho + k = -1 \end{cases}$ όπου με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $2k = 4 \Leftrightarrow k = 2$ και $\rho + k = 5 \Leftrightarrow \rho = 5 - k \Leftrightarrow \rho = 3$

γ) Για $\rho = 3$, $\omega = \frac{1}{2}$ και $k = 2$ έχουμε $f(x) = 3\eta\mu\left(\frac{1}{2}x\right) + 2$. Το σημείο A ανήκει στη γραφική παράσταση

$$\text{της } f \text{ οπότε: } f(x_0) = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 3\eta\mu\left(\frac{1}{2}x_0\right) + 2 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 3\eta\mu\left(\frac{1}{2}x_0\right) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\left(\frac{1}{2}x_0\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{1}{2}x_0\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \frac{1}{2}x_0 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 4k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x_0 = 4k\pi + \frac{5\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Λόγω του γραφήματος της f αυτές οι λύσεις για το x πρέπει να βρίσκονται στο διάστημα $(5\pi, 6\pi)$ άρα

$$\begin{cases} 5\pi < 4k\pi + \frac{\pi}{3} < 6\pi \\ \text{ή} \\ 5\pi < 4k\pi + \frac{5\pi}{3} < 6\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 < 4k + \frac{1}{3} < 6 \\ \text{ή} \\ 5 < 4k + \frac{5}{3} < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{14}{3} < 4k < \frac{17}{3} \\ \text{ή} \\ \frac{10}{3} < 4k < \frac{13}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{14}{12} < k < \frac{17}{12} \\ \text{ή} \\ \frac{10}{12} < k < \frac{13}{12} \end{cases}.$$

Επειδή $k \in \mathbb{Z}$ από τις δυο ανισώσεις έχουμε ότι η μόνη τιμή του k είναι $k = 1$ για τη δεύτερη ανίσωση το οποίο μας δίνει ότι $x_0 = 4\pi + \frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow x_0 = \frac{17\pi}{3}$.

15062. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι της μορφής $f(x) = \rho\eta\mu(ax)$, $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \rho > 0$.

α) Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδο της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 6)

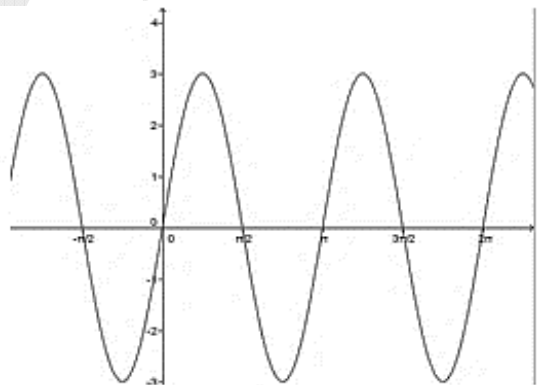
β) Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς a και ρ .

(Μονάδες 6)

Έστω $\rho = 3$ και $a = 2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4. (Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f , g δεν έχουν κοινό σημείο. (Μονάδες 6)



Λύση

α) Από το σχήμα είναι φανερό ότι η γραφική της παράσταση προκύπτει από επανάληψη του τμήματος της που αντιστοιχεί στο διάστημα $[0, \pi]$, οπότε η περίοδος της f είναι $T = \pi$.

Επιπλέον οι τεταγμένες των σημείων της γραφικής της παράστασης περιέχονται στο διάστημα $[-3, 3]$, οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -3 και η μέγιστη είναι ίση με 3 .

β) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \rho\eta\mu(ax)$ με $\alpha, \rho > 0$, οπότε έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\alpha}$ ελάχιστη τιμή

$-\rho$ και μέγιστη ίση με ρ . Έτσι, έχουμε $\frac{2\pi}{\alpha} = \pi \Leftrightarrow \alpha = 2$ και $\rho = 3$.

γ) Είναι $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5 = x^4 - 2x^2 + 1 + 4 = (x^2 - 1)^2 + 4$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(x^2 - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 + 4 \geq 4 \Leftrightarrow g(x) \geq 4$ και η ισότητα ισχύει όταν $(x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Άρα ο αριθμός 4 είναι η ελάχιστη τιμή της f .

δ) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) \geq 4$ και $-3 \leq f(x) \leq 3$, η εξίσωση $f(x) = g(x)$ είναι αδύνατη. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.

15992. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \rho \eta \mu(ax), g(x) = \eta \mu(\omega x)$ όπου $\omega, \rho > 0$.

α) Να βρεθούν οι τιμές των ρ, ω , αν είναι γνωστό ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι -2 και η περίοδος της g είναι π . Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 6)

β) i. Να κάνετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2\eta \mu x, x \in [0, \pi]$ και $g(x) = \eta \mu(2x), x \in [0, \pi]$. (Μονάδες 10)

ii. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $2\eta \mu \frac{5\pi}{9} > \eta \mu \frac{10\pi}{9}$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Το ρ είναι η μέγιστη τιμή της f και το $-\rho$ την ελάχιστη τιμή άρα είναι $\rho = 2$.

Η περίοδος της g είναι $T = \pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\omega} = \pi \Leftrightarrow \omega = 2$.

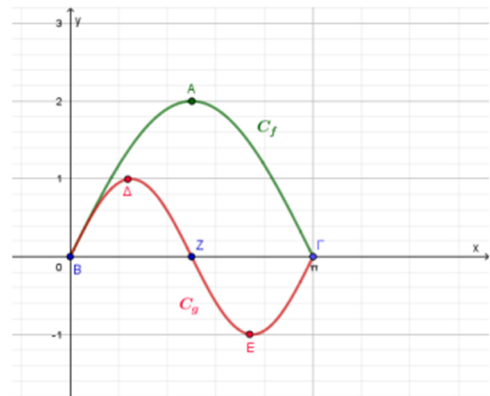
β) ii) Για την συνάρτηση $f(x) = 2\eta \mu x, x \in [0, \pi]$ έχουμε:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x) = 2\eta \mu x$	0	2	0

Για την συνάρτηση $g(x) = \eta \mu(2x), x \in [0, \pi]$ έχουμε:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$g(x) = \eta \mu(2x)$	0	1	0	-1	0

Άρα έχουμε τις διπλάνες γραφικές παραστάσεις:



20870. Το βάθος y , σε μέτρα, του νερού σε ένα λιμάνι επηρεάζεται από το φαινόμενο της παλίρροιας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (εντός 24 ωρών). Το πρώτο (μετά τα μεσάνυχτα) μέγιστο βάθος είναι 5,8 μέτρα και συμβαίνει στις 3:00 π.μ. Το πρώτο ελάχιστο βάθος είναι 2,6 μέτρα και συμβαίνει στις 9:00 π.μ. Το βάθος y δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες) από τη σχέση:

$y = \alpha \eta \mu(\omega t) + \beta$, με $\alpha, \omega, \beta > 0$ και $0 \leq t \leq 24$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, ω και β . (Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha = 1,6$, $\omega = \frac{\pi}{6}$ και $\beta = 4,2$,

i. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $y = 1,6 \cdot \eta \mu(\frac{\pi}{6}t) + 4,2$, με $0 \leq t \leq 24$. (Μονάδες 8)

ii. Ποιο θα είναι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι; (Μονάδες 4)

iii. Ένα μεγάλο πλοίο χρειάζεται τουλάχιστον 4,2 μέτρα βάθος νερού για να δέσει στο λιμάνι. Στη διάρκεια ποιου χρονικού διαστήματος από τις 12 το μεσημέρι και μετά θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια; (Μονάδες 7)

Λύση

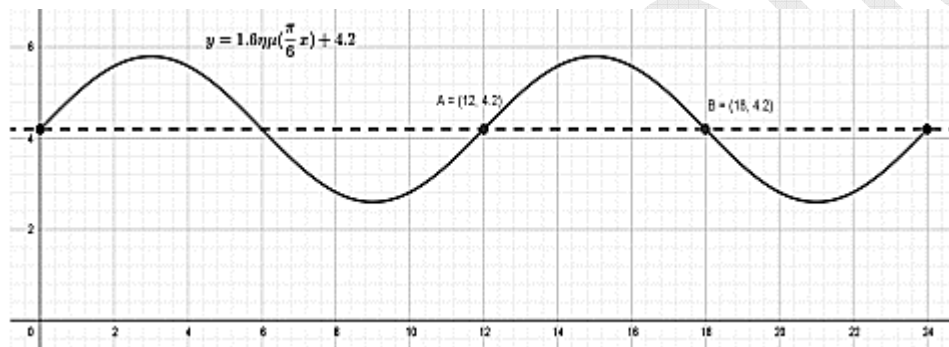
α) Το διάστημα ανάμεσα στο πρώτο μέγιστο βάθος και στο πρώτο ελάχιστο βάθος είναι 6 ώρες, που είναι η μισή περίοδος. Κατά συνέπεια η περίοδος είναι $T = 2 \cdot 6 = 12$ ώρες και $T = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow 12\omega = 2\pi \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{6}$.

Είναι $-1 \leq \eta\mu(\omega t) \leq 1 \Leftrightarrow -a \leq a\eta\mu(\omega t) \leq a \Leftrightarrow -a + \beta \leq a\eta\mu(\omega t) + \beta \leq a + \beta \Leftrightarrow -a + \beta \leq y \leq a + \beta$.

Επειδή το ελάχιστο βάθος είναι 2,6 μέτρα και το μέγιστο 5,8 μέτρα, είναι

$$\begin{cases} -a + \beta = 2,6 \\ a + \beta = 5,8 \end{cases} \Rightarrow 2\beta = 8,4 \Leftrightarrow \beta = 4,2 \text{ και } a + 4,2 = 5,8 \Leftrightarrow a = 1,6.$$

i. Η συνάρτηση έχει μέγιστο 5,8, ελάχιστο 2,6 και περίοδο 12, οπότε η γραφική της παράσταση σε διάστημα δυο περιόδων ($0 \leq t \leq 24$) είναι:



ii. Το βάθος του νερού, σε μέτρα, στις 12 το μεσημέρι είναι: $y = 1,6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} \cdot 12\right) + 4,2 = 1,6 \cdot 0 + 4,2 = 4,2$.

iii. Όπως βλέπουμε από τη γραφική παράσταση της $y = 1,6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} t\right) + 4,2$, το πλοίο θα δέσει με

ασφάλεια το χρονικό διάστημα $[12, 18]$, δηλαδή από τις 12 το μεσημέρι μέχρι τις 6 το απόγευμα, γιατί στο διάστημα αυτό το βάθος του νερού είναι $y \geq 4,2$.

Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

Θέμα 2ο

14280. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + 1, x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του $x \in [0, 2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή; (Μονάδες 15)

Λύση

α) Ισχύει ότι $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\eta\mu x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2\eta\mu x \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq 2\eta\mu x + 1 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 3$

Άρα η μέγιστη τιμή της f είναι $f_{\max} = 3$ και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f είναι $f_{\min} = -1$.

β) Έχουμε $f(x) = 3 \Leftrightarrow 2\eta\mu x + 1 = 3 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = 2 \Leftrightarrow \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ $x \in [0, 2\pi]$

14324. Έστω γωνία x για την οποία ισχύουν: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και $\eta\mu x + \eta\mu(\pi - x) = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την γωνία x . (Μονάδες 13)

Λύση

α) Για κάθε $0 < x < \frac{\pi}{2}$ είναι $\eta\mu x + \eta\mu(\pi - x) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x + \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2}$

β) $\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left(x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \right) \text{ ή } \left(x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \right)$

15036. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x, x \in \mathbb{R}$.

α) i. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f . (Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -3$ στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) i) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \rho\sigma\upsilon\nu(\omega x), \rho > 0$ με $\rho = 3$ και $\omega = 2$. Η μέγιστη τιμή της f είναι $\rho = 3$ και η ελάχιστη τιμή $-\rho = -3$.

ii) Η συνάρτηση έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$.

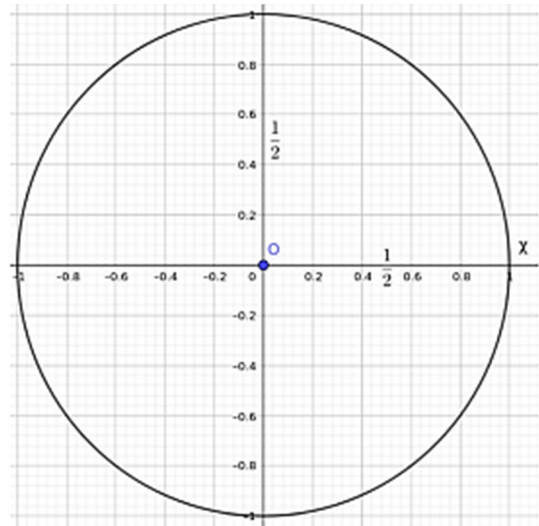
β) $f(x) = -3 \Leftrightarrow 3\sigma\upsilon\nu 2x = -3 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi + \pi \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

14977.α) Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τις τελικές πλευρές δύο γωνιών που ανήκουν στο διάστημα $[0, 2\pi)$, με αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox , οι οποίες να έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ και άλλες δύο οι οποίες να έχουν συνημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ για $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 13)

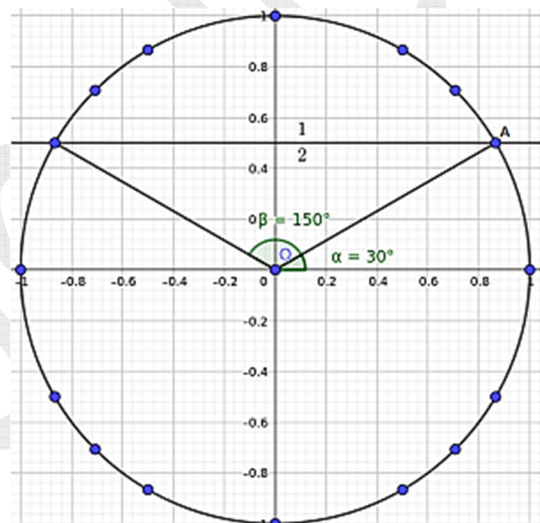


Λύση

α) Το ημίτονο μίας γωνίας με μία πλευρά την ημιευθεία Ox και δεύτερη πλευρά που τέμνει στο σημείο A του κύκλου, βρίσκεται από την προβολή του σημείου A στον άξονα $y'y$. Άρα, οι γωνίες που έχουν ημίτονο $\frac{1}{2}$ θα έχουν σημεία τομής με τον κύκλο τέτοια, ώστε η προβολή τους να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $\frac{1}{2}$.

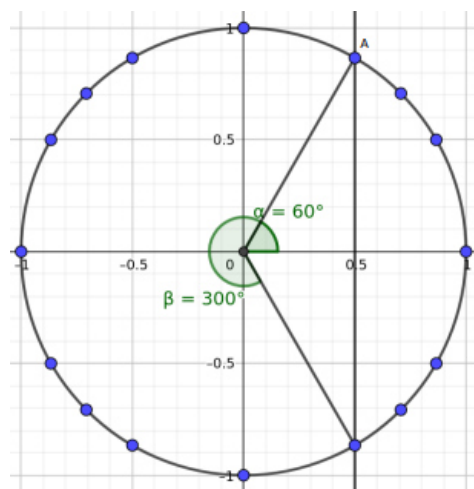
Οπότε φέρουμε την ευθεία $y = \frac{1}{2}$ και προκύπτουν δύο γωνίες στο διάστημα $[0, 2\pi)$ που έχουν αυτό το ημίτονο.

Είναι οι γωνίες $\frac{\pi}{6}$ και $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.



Το συνημίτονο μίας γωνίας με μία πλευρά την ημιευθεία Ox και δεύτερη πλευρά που τέμνει στο σημείο A του κύκλου, βρίσκεται από την προβολή του σημείου A στον άξονα $x'x$.

Άρα οι γωνίες που έχουν συνημίτονο $\frac{1}{2}$ θα έχουν σημεία τομής με τον κύκλο τέτοια, ώστε η προβολή τους να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $\frac{1}{2}$. Οπότε φέρουμε την ευθεία $x = \frac{1}{2}$ και προκύπτουν δύο γωνίες στο διάστημα $[0, 2\pi)$ που έχουν αυτό το συνημίτονο. Είναι οι γωνίες $\frac{\pi}{3}$ και $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.



β) $\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left(x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \right)$ ή
 $\left(x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \right)$

15969. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sin(13\pi + x) - 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

α) Να δείξετε ότι $\sin(13\pi + x) = -\sin x$.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $f(x) = -4\sin x$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) $\sin(13\pi + x) = \sin(12\pi + \pi + x) = \sin(\pi + x) = -\sin x$

β) $f(x) = 2\sin(13\pi + x) - 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -2\sin x - 2\sin x = -4\sin x$

γ) $f(x) = -2 \Leftrightarrow -4\sin x = -2 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

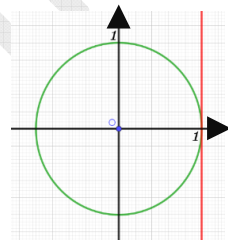
16131. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$, $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$ όπου $k \in \mathbb{Z}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

(Μονάδες 15)

β) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο να παραστήσετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.

(Μονάδες 10)



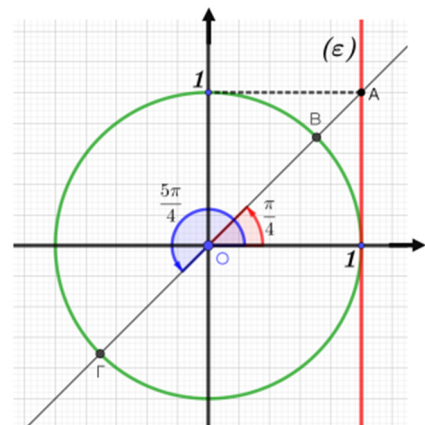
Λύση

α) $f(x) = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

Πρέπει $0 < x < 2\pi \Leftrightarrow 0 < k\pi + \frac{\pi}{4} < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < k\pi < \frac{7\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{7}{4} \Leftrightarrow k = 0$ ή $k = 1$ άρα τελικά είναι

$f(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{5\pi}{4}$

β) Η εφω μίας γωνίας ω είναι τεταγμένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της γωνίας ω με την ευθεία $(\varepsilon): x=1$, η οποία αποτελεί τον άξονα των εφαπτομένων. Οι ημιευθείες OB και OG είναι τελικές πλευρές των γωνιών $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ οι οποίες τέμνουν την $x=1$ στο A(1,1).



21995. Πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $\eta\mu x = \alpha$ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ όταν:

α) $\alpha = 1$.

(Μονάδες 13)

β) $\alpha = -2$.

(Μονάδες 12)

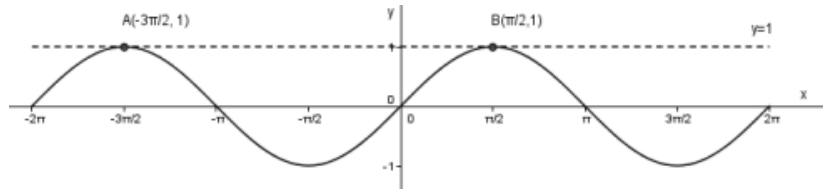
Να αιτιολογήσετε γραφικά, ή όπως αλλιώς θέλετε, την απάντησή σας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα.

Λύση

α) Για $\alpha = 1$ η εξίσωση γίνεται $\eta\mu x = 1$.

Σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση της $y = \eta\mu x$, βλέπουμε ότι τα σημεία τομής της με την ευθεία $y = 1$ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$, είναι τα $A\left(-\frac{3\pi}{2}, 1\right)$ και $B\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, οπότε οι λύσεις της εξίσωσης είναι

$$x = -\frac{3\pi}{2} \text{ ή } x = \frac{\pi}{2}.$$



β) Για $\alpha = -2$ η εξίσωση γίνεται $\eta\mu x = -2$ και είναι αδύνατη γιατί $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

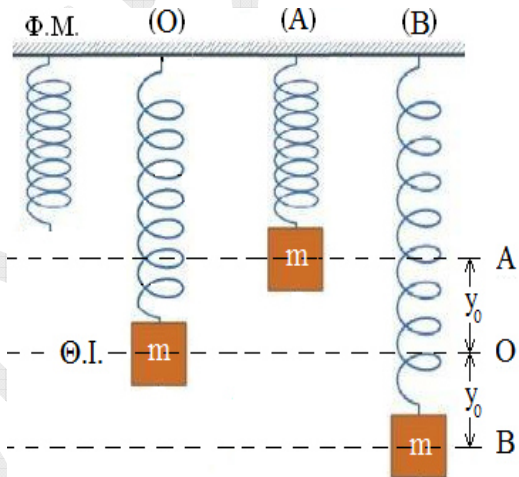
Θέμα 4ο

14975. Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος (Φ.Μ.) κρέμεται από το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα μάζας m και ισορροπεί στη θέση Ο (Θ.Ι. – Θέση Ισορροπίας), απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με 1 μέτρο.

Το σώμα ανεβοκατεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση Ο, εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων Α και Β, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με $2y_0$.

Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα), είναι:

$$y(t) = 1 + 0,2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$



α) Να βρείτε το y_0 και στη συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων Α και Β της ταλάντωσης.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

(Μονάδες 06)

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $t \in [0, 4]$.

(Μονάδες 06)

δ) Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με 1,1 μέτρα, για $t \in [0, 2]$.

(Μονάδες 07)

Λύση

α) Έστω η συνάρτηση $f(t) = 0,2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ η οποία είναι της μορφής $y = \rho \eta\mu(\omega x)$ με $\rho = 0,2$ και $\omega = \frac{\pi}{2}$

Είναι $y(t) = 1 + f(t)$ και επειδή 1m είναι απόσταση από το πάτωμα όταν βρίσκεται στην Θ.Ι. τότε είναι $y_0 = (OA) = (OB) = \rho = 0,2$ γιατί η f έχει μέγιστη τιμή την ρ και ελάχιστη τιμή την $-\rho$.

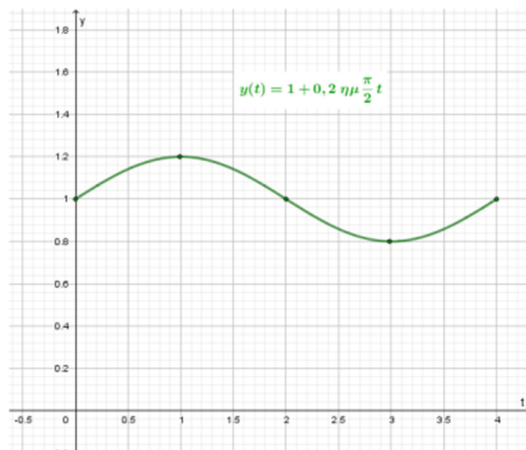
Για την $y(t)$ ισχύει ότι έχει μέγιστη τιμή την $1 + \rho = 1,2$ και ελάχιστη τιμή την $1 - \rho = 0,8$.

Άρα $d_{(AB)} = (OA) + (OB) = 0,4$.

β) Είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ γιατί $y(t) = 1 + f(t)$.

γ)

t	0	1	2	3	4
$y(t)$	1	1,2	1	0,8	1



$$\delta) y(t) = 1,1 \Leftrightarrow 1 + 0,2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 1,1 \Leftrightarrow 0,2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 0,1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2}t = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow t = 4\kappa + \frac{1}{3}\right) \text{ ή } \left(\frac{\pi}{2}t = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow t = 4\kappa + \frac{5}{3}\right) \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Είναι } 0 \leq 4\kappa + \frac{1}{3} \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq 4\kappa \leq \frac{5}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{5}{12} \Leftrightarrow \kappa = 0 \text{ άρα } t = \frac{1}{3} \text{ sec}$$

$$\text{Είναι } 0 \leq 4\kappa + \frac{5}{3} \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq 4\kappa \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq \kappa \leq \frac{1}{12} \Leftrightarrow \kappa = 0 \text{ άρα } t = \frac{5}{3} \text{ sec}$$

15003. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu ax \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - ax\right) + 2 \right] - \sigma\upsilon\nu ax \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - ax) - 1, \alpha \in \mathbb{R}.$

α) i. Να δείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu ax, x \in \mathbb{R}.$

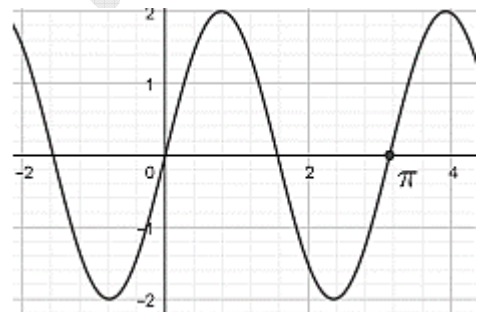
(Μονάδες 10)

ii. Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να δείξετε ότι $a = 2.$

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $\varepsilon: y = 1$ για $x \in [0, \pi].$

(Μονάδες 9)



Λύση

$$\alpha) i. f(x) = \eta\mu ax \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - ax\right) + 2 \right] - \sigma\upsilon\nu ax \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - ax) - 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \eta\mu ax \cdot (\eta\mu ax + 2) - \sigma\upsilon\nu ax \cdot (-\sigma\upsilon\nu ax) - 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \eta\mu^2 ax + 2\eta\mu ax + \sigma\upsilon\nu^2 ax - 1 = 1 + 2\eta\mu ax - 1 = 2\eta\mu ax$$

ii. Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f έχει περίοδο $T = \pi$, άρα $\frac{2\pi}{a} = \pi \Leftrightarrow a = 2.$

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με την $y = 1$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 1.$

$$\text{Είναι } f(x) = 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu 2x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 2x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left(2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{12}, \kappa \in \mathbb{Z}\right) \text{ ή}$$

$$\left(2x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{5\pi}{12}, \kappa \in \mathbb{Z} \right).$$

$$\text{Είναι } 0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq \kappa\pi + \frac{\pi}{12} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{12} \leq \kappa\pi \leq \frac{11\pi}{12} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{11}{12}, \text{ όμως } \kappa \in \mathbb{Z} \text{ άρα } \kappa = 0, \text{ οπότε}$$

$$x = \frac{\pi}{12}.$$

$$\text{Είναι } 0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq \kappa\pi + \frac{5\pi}{12} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{12} \leq \kappa\pi \leq \frac{7\pi}{12} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq \kappa \leq \frac{7}{12}, \text{ όμως } \kappa \in \mathbb{Z} \text{ άρα } \kappa = 0, \text{ οπότε}$$

$$x = \frac{5\pi}{12}. \text{ Τα ζητούμενα σημεία τομής έχουν συντεταγμένες } \left(\frac{\pi}{12}, 1 \right) \text{ και } \left(\frac{5\pi}{12}, 1 \right).$$

15014. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a\eta\mu bx$, με a, β ακέραιους θετικούς αριθμούς.

α) Να βρείτε την τιμή του a , αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2. (Μονάδες 6)

β) Αν $a = 2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του β για την οποία είναι $f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2$, είναι $\beta = 8$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $a = 2$ και $\beta = 8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Η μέγιστη τιμή της f είναι η a , άρα $a = 2$.

$$\text{β)} f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2 \Leftrightarrow 2\eta\mu \frac{\beta\pi}{16} = 2 \Leftrightarrow \eta\mu \frac{\beta\pi}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{\beta\pi}{16} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta\pi = 32\kappa\pi + 8\pi \Leftrightarrow \beta = 32\kappa + 8, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$\beta > 0 \Leftrightarrow 32\kappa + 8 > 0 \Leftrightarrow 32\kappa > -8 \Leftrightarrow \kappa > -\frac{1}{4}$. Όμως $\kappa \in \mathbb{Z}$, οπότε η μικρότερη τιμή του κ είναι το 0 και τότε η μικρότερη τιμή του β είναι 8.

$$\text{γ)} f(x) = 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu 8x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu 8x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 8x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left(8x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{48}, \kappa \in \mathbb{Z} \right) \text{ ή } \left(8x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{5\pi}{48}, \kappa \in \mathbb{Z} \right).$$

$$\text{Πρέπει } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{48} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq 12\kappa\pi + \pi \leq 24\pi \Leftrightarrow -\pi \leq 12\kappa\pi \leq 23\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{23}{12}.$$

$$\text{Επειδή ο } \kappa \text{ είναι ακέραιος, είναι } \kappa = 0 \text{ ή } \kappa = 1. \text{ Τότε } x = \frac{\pi}{48} \text{ ή } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{48} = \frac{13\pi}{48}$$

$$\text{Πρέπει } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq 12\kappa\pi + 5\pi \leq 24\pi \Leftrightarrow -5\pi \leq 12\kappa\pi \leq 19\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq \kappa \leq \frac{19}{12}.$$

$$\text{Επειδή ο } \kappa \text{ είναι ακέραιος, είναι } \kappa = 0 \text{ ή } \kappa = 1. \text{ Τότε } x = \frac{5\pi}{48} \text{ ή } x = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} = \frac{17\pi}{48}.$$

15025. Στο διπλανό σχήμα δίνεται μια γωνία $\theta = \widehat{AOM}$ με

$\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$, της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον

τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο M και την ευθεία $x = 1$ στο σημείο K.

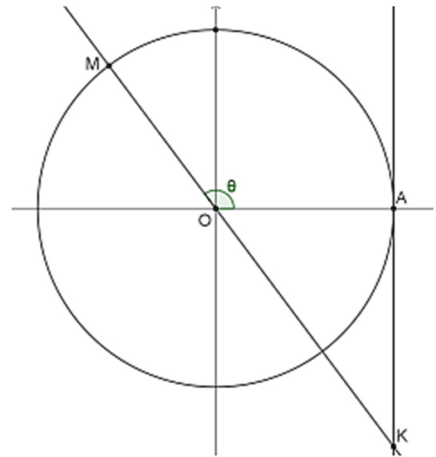
α) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sin\theta$, $\epsilon\phi\theta$, $\sigma\phi\theta$.
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και K.
(Μονάδες 6)

γ) Έστω μια γωνία $\varphi \in [0, 2\pi]$ για την οποία ισχύει $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$ και $\sin\theta < 0$.

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία φ έχει την τελική πλευρά της στο 2ο τεταρτημόριο.
(Μονάδες 5)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί $\theta < \varphi$.
(Μονάδες 6)



Λύση

$$\alpha) \eta\mu^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow \sin^2\theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sin\theta = \pm \frac{3}{5}$$

$$\text{Επειδή } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ είναι } \sin\theta < 0, \text{ άρα } \sin\theta = -\frac{3}{5}. \text{ Είναι } \epsilon\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}, \sigma\phi\theta = \frac{1}{\epsilon\phi\theta} = -\frac{3}{4}$$

β) Έστω ότι το M έχει συντεταγμένες (x, y) , τότε $x = \sin\theta = -\frac{3}{5}$ και $y = \eta\mu\theta = \frac{4}{5}$, άρα $M\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Η ευθεία $x = 1$ είναι ο άξονας των εφαπτομένων, οπότε η τεταγμένη του K είναι η $\epsilon\phi\theta$ και το K έχει συντεταγμένες $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$.

γ) i. η γωνία φ έχει την τελική πλευρά της στο 2ο τεταρτημόριο γιατί μόνο εκεί είναι $\eta\mu\varphi > 0$ και $\sin\varphi < 0$.

ii. Είναι $\eta\mu\theta > \eta\mu\varphi$ και η συνάρτηση $y = \eta\mu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, οπότε $\theta < \varphi$.

15026. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right), x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $(f(x) - 1)^2 + (f(1 - x) - 1)^2 = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

Λύση

$$\alpha) T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$$\beta) \text{ Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } -1 \leq \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 3$$

άρα η f έχει ελάχιστο το -1 όταν $\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 4\kappa - 1, \kappa \in \mathbb{Z}$ και μέγιστο το 3

όταν $\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 4\kappa + 1, \kappa \in \mathbb{Z}.$

$$\begin{aligned} \gamma) f(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \\ &\left(\frac{\pi x}{2} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \pi x = 4\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 4\kappa - \frac{1}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}\right) \text{ ή } \\ &\left(\frac{\pi x}{2} = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \pi x = 4\kappa\pi + \frac{7\pi}{3} \Leftrightarrow x = 4\kappa + \frac{7}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}\right) \end{aligned}$$

Οπότε οι ζητούμενες τετμημένες είναι $x = 4\kappa - \frac{1}{3}$ ή $x = 4\kappa + \frac{7}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(1-x) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi(1-x)}{2}\right) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi - \pi x}{2}\right) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right) = 1 + 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right), \text{ οπότε}$$

$$(f(x) - 1)^2 + (f(1-x) - 1)^2 = \left(\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^2 + \left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - 1)^2 + (f(1-x) - 1)^2 = 4\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 4\left[\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right] = 4 \cdot 1 = 4$$

15049. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu(\pi + x), x \in \mathbb{R}.$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x.$

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $-2 \leq f(x) \leq 2.$ Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε:

i. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y.$

(Μονάδες 3)

ii. Δυο σημεία τομής της C_f με τον $x'x.$

(Μονάδες 6)

Λύση

α) Είναι $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu(\pi + x) = -\eta\mu x$, οπότε $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x.$

β) Είναι $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$ (1) και $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -\eta\mu x \geq -1 \Leftrightarrow -1 \leq -\eta\mu x \leq 1$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει ότι $-2 \leq \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq f(x) \leq 2.$

Για να είναι ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της f πρέπει να υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο $\sigma\upsilon\nu x = 1$ και $-\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = -1$ που είναι αδύνατο γιατί $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 + 1 = 2 \neq 1.$

γ) i. Είναι $f(0) = \sigma\upsilon\nu 0 - \eta\mu 0 = 1$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,1).$

ii. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x$

Για $x = \frac{\pi}{4}$ είναι $\sin \frac{\pi}{4} = \eta\mu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ και για $x = 2\pi + \frac{\pi}{4}$ είναι

$$\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ οπότε } f\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Δύο σημεία τομής της C_f με τον $x'x$ είναι τα $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ και $\left(\frac{9\pi}{4}, 0\right)$.

15050. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 1$.

(Μονάδες 5)

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ και $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

(Μονάδες 6)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 6)

Λύση

α) Είναι $f_{\min} = -2$ και $f_{\max} = 2$.

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία $y = 1$ προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης

$$f(x) = 1. \text{ Είναι } f(x) = 1 \Leftrightarrow 2\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Για $k = 0$ είναι $x = \frac{\pi}{3}$ και για $k = 1$ είναι $x = 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$. Άρα δύο κοινά σημεία της C_f με την ευθεία

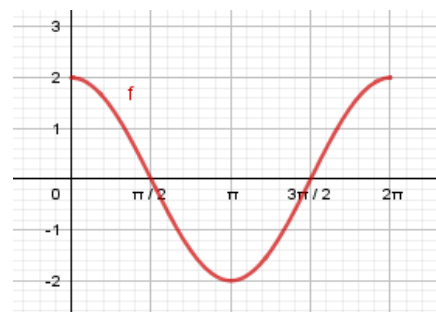
$$y = 1 \text{ είναι τα } \left(\frac{\pi}{3}, 1\right), \left(\frac{7\pi}{3}, 1\right).$$

γ) Οι αριθμοί $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}$ βρίσκονται στο 1ο τεταρτημόριο όπου η συνάρτηση $\sin x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

$$\text{Είναι } \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{5} = -\frac{\pi}{15} < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{5} \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{\pi}{3}\right) > f\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

δ)

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$f(x)$	2	0	-2	0	2



15287. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x)$, όπου $\omega > 0$, $\rho > 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα,

α) Να δείξετε ότι $\rho = 3$ και $\omega = 2$.

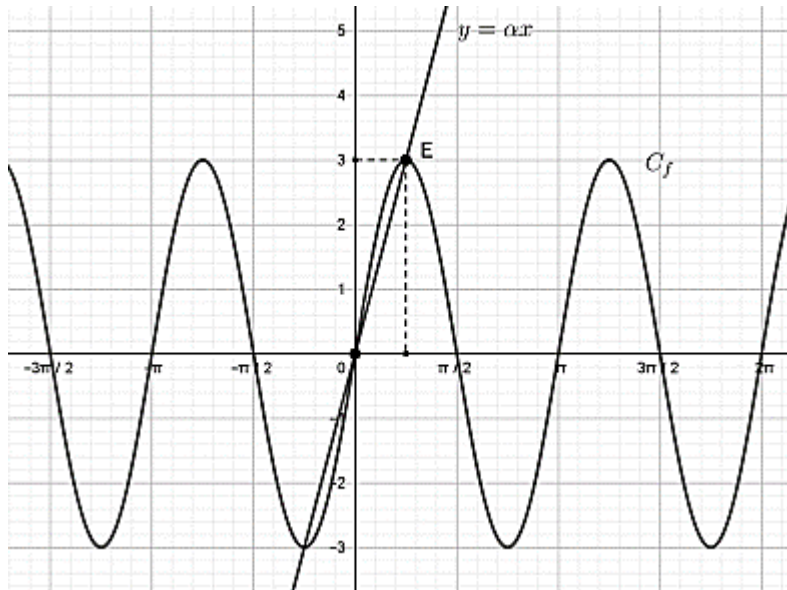
(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $3\eta\mu(2x) - \frac{12}{\pi}x = 0$.

(Μονάδες 10)



Λύση

α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f έχει μέγιστο το 3 και ελάχιστο το -3, άρα $\rho = 3$.

Ακόμη παρατηρούμε ότι η f έχει περίοδο π , άρα $\frac{2\pi}{\omega} = \pi \Leftrightarrow 2 = \omega$. Άρα $f(x) = 3\eta\mu(2x)$

β) Η ευθεία $y = ax$ διέρχεται από το σημείο E της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη 3, η οποία είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης. Η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστη τιμή σε διάστημα μιας περιόδου στο $\frac{1}{4}$ της περιόδου, δηλαδή στο $\frac{\pi}{4}$, άρα $E\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$, οπότε $3 = a \cdot \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{12}{\pi} = a$ και η ευθεία έχει εξίσωση $y = \frac{12}{\pi}x$.

$$\gamma) 3\eta\mu(2x) - \frac{12}{\pi}x = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{12}{\pi}x$$

Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \frac{12}{\pi}x$. Με βάση το σχήμα τα σημεία τομής είναι 3, οι τετμημένες των οποίων είναι:

- $x = 0$
- $x = \frac{\pi}{4}$ και
- $x = -\frac{\pi}{4}$ αφού $y = \frac{12}{\pi}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -3$ και $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 3\eta\mu\left(2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3(-1) = -3$

Άρα η εξίσωση έχει λύσεις τις $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ και $x = -\frac{\pi}{4}$.

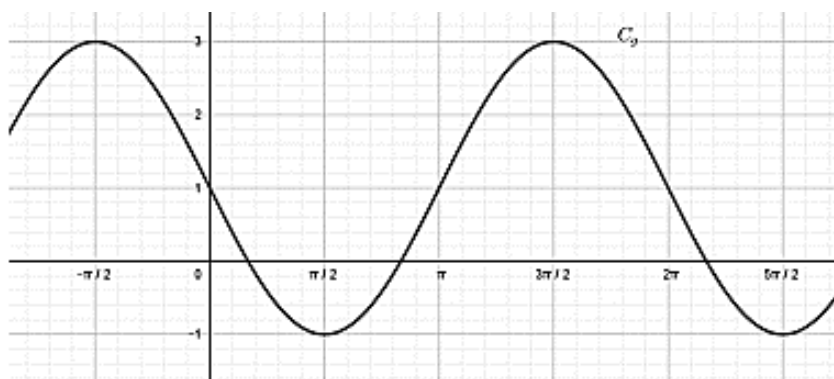
15288. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο T , τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .

(Μονάδες 3)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \alpha\eta\mu\beta x + \gamma$, με

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , β , και γ .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ii. Για $\alpha = -2$, $\beta = 1$ και $\gamma = 1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ στο διάστημα $[0, \pi)$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Είναι $T = \frac{2\pi}{3}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-1 \leq \eta\mu 3x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\eta\mu 3x \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq 2\eta\mu 3x + 1 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 3$, επομένως η f έχει ελάχιστο το -1 όταν $\eta\mu 3x = -1$ και μέγιστο το 3 όταν $\eta\mu 3x = 1$.

β) i. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι η g έχει περίοδο π , άρα $\frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \Leftrightarrow \beta = 1$.

Επειδή η γραφική παράσταση της g διέρχεται από τα σημεία $(0, 1)$ και $(\frac{\pi}{2}, -1)$ ισχύει ότι:

$$g(0) = 1 \Leftrightarrow \gamma = 1 \text{ και } g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \alpha\eta\mu\frac{\pi}{2} + 1 = -1 \Leftrightarrow \alpha = -2.$$

ii. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2\eta\mu 3x + 1 = 2\eta\mu x + 1 \Leftrightarrow \eta\mu 3x = \eta\mu x \xrightarrow{x \in [0, \pi)} \Leftrightarrow (3x = x \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0) \text{ ή } (3x = \pi - x \Leftrightarrow 4x = \pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4})$.

15289. Δίνεται το σύστημα: $(\Sigma): \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) i. Αν $\lambda = -1$, να λύσετε το σύστημα.

(Μονάδες 2)

ii. Αν (x_0, y_0) είναι η λύση του συστήματος για $\lambda = -1$, να βρείτε γωνία $\theta \in (0, 2\pi]$ τέτοια, ώστε

$$x_0 = \sigma\upsilon\nu\theta \text{ και } y_0 = \eta\mu\theta.$$

(Μονάδες 4)

β) Αν $\lambda = 1$ και (x_1, y_1) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία ω , τέτοια ώστε $x_1 = \sigma\upsilon\nu\omega$ και $y_1 = \eta\mu\omega$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση την (x_2, y_2) με

$$x_2 = \sigma\upsilon\nu\varphi \text{ και } y_2 = \eta\mu\varphi, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

i. Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{3}{5}$ και $\eta\mu\varphi = \frac{4}{5}$.

(Μονάδες 6)

ii. Να υπολογίσετε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

Λύση

α) i. Για $\lambda = -1$ το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} y = 0 \\ x - 0 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$, οπότε η λύση του συστήματος είναι $(x_0, y_0) = (-1, 0)$.

ii. Είναι $\begin{cases} \sin \theta = -1 \\ \eta \mu \theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \in (0, 2\pi] \\ \theta = \pi \end{cases}$

β) Για $\lambda = 1$ το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} 3y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ x + \frac{2}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Αν υπήρχε γωνία ω με $\sin \omega = \frac{1}{3}$ και $\eta \mu \omega = \frac{2}{3}$, τότε

$$\sin^2 \omega + \eta \mu^2 \omega = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{9} = 1 \text{ αδύνατο. Άρα δεν υπάρχει τέτοια γωνία } \omega.$$

γ) i. Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_2, y_2) , τότε

$$-x_2 + 2y_2 = 1 \Leftrightarrow -\sin \varphi + 2\eta \mu \varphi = 1 \Leftrightarrow 2\eta \mu \varphi - 1 = \sin \varphi \quad (1).$$

$$\text{Είναι } \eta \mu^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \Leftrightarrow \eta \mu^2 \varphi + (2\eta \mu \varphi - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta \mu^2 \varphi + 4\eta \mu^2 \varphi - 4\eta \mu \varphi + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$5\eta \mu^2 \varphi - 4\eta \mu \varphi = 0 \Leftrightarrow \eta \mu \varphi (5\eta \mu \varphi - 4) = 0 \Leftrightarrow \eta \mu \varphi = 0 \text{ απορρίπτεται αφού } \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ ή } \eta \mu \varphi = \frac{4}{5} \text{ δεκτή.}$$

$$\text{Τότε από την (1) προκύπτει ότι } \sin \varphi = 2 \cdot \frac{4}{5} - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}.$$

ii. Όμως η λύση (x_2, y_2) επαληθεύει και την εξίσωση $x + \lambda y = \lambda$, άρα

$$x_2 + \lambda y_2 = \lambda \Leftrightarrow \sin \varphi + \lambda \eta \mu \varphi = \lambda \Leftrightarrow \frac{3}{5} + \lambda \cdot \frac{4}{5} = \lambda \Leftrightarrow 3 + 4\lambda = 5\lambda \Leftrightarrow \lambda = 3.$$

15422. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 2\eta \mu(\pi + 2x)$, $\alpha > 0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = (\alpha + 2)\eta \mu 2x$.

(Μονάδες 5)

β) i. Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 4, να δείξετε ότι $\alpha = 2$.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε την περίοδο της f .

(Μονάδες 5)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου.

(Μονάδες 5)

δ) Αν $g(x) = 5 - \sin^2 2x$, να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f με την C_g , όπου C_f, C_g οι γραφικές παραστάσεις των f, g αντίστοιχα.

(Μονάδες 5)

Λύση

$$\alpha) f(x) = \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 2\eta\mu(\pi + 2x) =$$

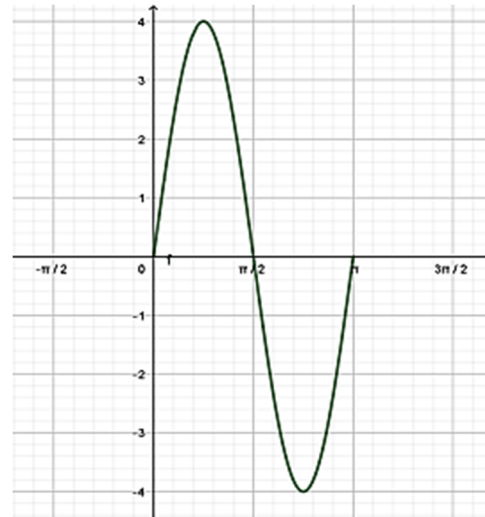
$$\alpha\eta\mu 2x - 2(-\eta\mu 2x) = \alpha\eta\mu 2x + 2\eta\mu 2x = (\alpha + 2)\eta\mu 2x$$

β) i. Επειδή $\alpha > 0$ η f έχει μέγιστη τιμή το $\alpha + 2$, άρα $\alpha + 2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

ii. Η περίοδος της f είναι $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

γ)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$4\eta\mu 2x$	0	4	0	-4	0



δ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.

$$\text{Είναι } f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4\eta\mu 2x = 5 - \sigma\upsilon\nu^2 2x \Leftrightarrow 4\eta\mu 2x = 5 - (1 - \eta\mu^2 2x) \Leftrightarrow$$

$$4\eta\mu 2x = 5 - 1 + \eta\mu^2 2x \Leftrightarrow \eta\mu^2 2x - 4\eta\mu 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\eta\mu 2x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu 2x = 2 \text{ αδύνατη.}$$

Αφού η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, δεν υπάρχουν σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.

15347. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha$. (Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$. (Μονάδες 5)

δ) Για $\alpha = 2$ και $g(x) = 2\eta\mu^2 x + 9\sigma\upsilon\nu x - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 7)

Λύση

α) $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha = 2(-\sigma\upsilon\nu x)^2 - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha \Leftrightarrow f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha$

β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } f(-x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(-x) - 3\sigma\upsilon\nu(-x) + \alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha = f(x), \text{ οπότε η } f \text{ είναι άρτια.}$$

γ) Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$, ισχύει ότι:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{3} - 3\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} + \alpha = 1 \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + \alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{4} - \frac{3}{2} + \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

δ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.

$$\text{Είναι } f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 2\eta\mu^2 x + 9\sin x - 9 \Leftrightarrow$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 2 - 2(1 - \sin^2 x) - 9\sin x + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sin^2 x - 12\sin x + 11 - 2 + 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 4\sin^2 x - 12\sin x + 9 = 0 \Leftrightarrow (2\sin x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{3}{2} \text{ αδύνατη.}$$

Αφού η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, δεν υπάρχουν σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.

15821.α) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sin x = 0$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι εξίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x = 3 \cdot \sin x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$ και κατόπιν να τη λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi]$. (Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{3} \cdot \eta\mu x$ και $g(x) = 3 \cdot \sin x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β). (Μονάδες 7)

δ) Αξιοποιώντας το ερώτημα γ) να λύσετε γραφικά την ανίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x < 3 \cdot \sin x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Έστω ότι υπάρχει γωνία x με $\eta\mu x = \sin x = 0$, τότε $\eta\mu^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow 0 + 0 = 1$ άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τέτοια γωνία.

β) Αν $\sin x = 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x = 3 \cdot 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0$ αδύνατο από προηγουμένως, άρα $\eta\mu x \neq 0$ και η εξίσωση γίνεται

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \eta\mu x}{\sqrt{3} \cdot \sin x} = \frac{3 \cdot \sin x}{\sqrt{3} \cdot \sin x} \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \frac{3\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

γ) Με βάση τον παρακάτω πίνακα τιμών

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$f(x) = \sqrt{3} \cdot \eta\mu x$	0	$\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	0
$g(x) = 3 \cdot \sin x$	3	0	-3	0	3

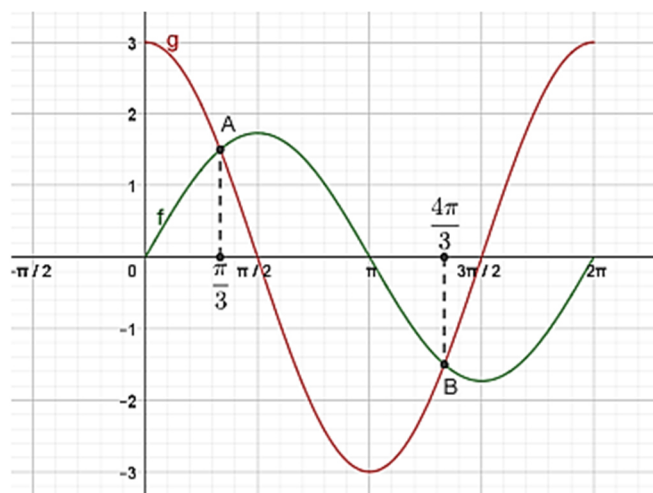
οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

δ) Οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g .
Με βάση τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ στο β σκέλος τα σημεία τομής τους A, B έχουν τετμημένες

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ και } x = \frac{4\pi}{3} \text{ αντίστοιχα.}$$

Στο σχήμα βλέπουμε ότι η C_f βρίσκεται

κάτω από τη C_g στο $\left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$, άρα στο



διάστημα $[0, 2\pi]$ είναι: $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x < 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$.

18234. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x - 1$, $x \in [0, 2\pi]$.

α) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτές;

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με τους άξονες x' και $y'y$.

(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 7)

δ) Αν για κάποιο αριθμό α με $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Είναι $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\eta\mu x \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq 2\eta\mu x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq f(x) \leq 1$

Είναι $f(x) = -3 \Leftrightarrow 2\eta\mu x - 1 = -3 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = -2 \Leftrightarrow \eta\mu x = -1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

Είναι $0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \kappa \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow \kappa = 1$ άρα $x = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

Άρα είναι $f(x) \geq -3$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = \frac{3\pi}{2}$ άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για

$x = \frac{3\pi}{2}$ το $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3$.

Είναι $f(x) = 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu x - 1 = 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = 2 \Leftrightarrow \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

Είναι $0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq \kappa \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \kappa = 0$ άρα $x = \frac{\pi}{2}$

Άρα είναι $f(x) \leq 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = \frac{\pi}{2}$ άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = \frac{\pi}{2}$

το $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

β) Είναι $f(0) = -1$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -1)$.

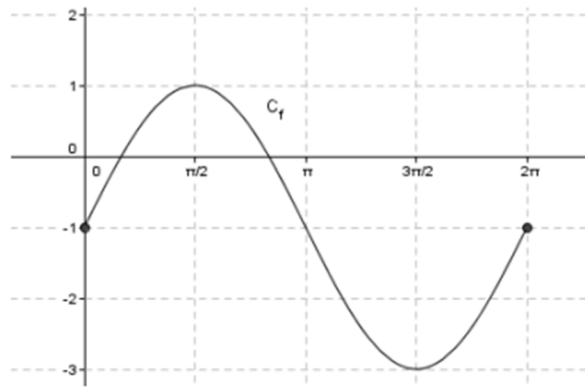
Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

Είναι $0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{11\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{11}{12} \Leftrightarrow \kappa = 0$ άρα $x = \frac{\pi}{6}$

Είναι $0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{6} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{7}{12} \Leftrightarrow \kappa = 0$ άρα $x = \frac{5\pi}{6}$

γ)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0
$f(x)$	-1	1	-1	-3	-1



$$\delta) f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Leftrightarrow 2\eta\mu\alpha - 1 = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu\alpha = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad (A)$$

$$1^{\text{ος}} \text{ τρόπος: } (A) \Leftrightarrow \left(\alpha = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha \Leftrightarrow 2\alpha = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \right) \text{ ή}$$

$$\left(\alpha = \kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + \alpha \Leftrightarrow \kappa\pi + \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow \kappa\pi = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \kappa = -\frac{1}{2} \text{ αδύνατη αφού } \kappa \in \mathbb{Z} \right)$$

$$\text{Είναι } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\kappa\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \kappa \leq \frac{1}{4} \xrightarrow{\kappa \in \mathbb{Z}} \kappa = 0 \text{ άρα } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$2^{\text{ος}} \text{ τρόπος: } (A) \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \sigma\upsilon\nu\alpha.$$

$$\text{Αν } \sigma\upsilon\nu\alpha = 0 \text{ τότε από (A) και } \eta\mu\alpha = 0 \text{ άρα } \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 \Leftrightarrow 0 = 1 \text{ άτοπο.}$$

$$\text{Άρα για } \sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0 \text{ είναι } (1) \Leftrightarrow \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 1 \Leftrightarrow \epsilon\varphi\alpha = \epsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \alpha = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Είναι } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \kappa\pi \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq \kappa \leq \frac{1}{4} \xrightarrow{\kappa \in \mathbb{Z}} \kappa = 0 \text{ άρα } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

20645. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $g(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από τη γραφική παράσταση της g προκύπτει η γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 6)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(\pi)$. (Μονάδες 6)

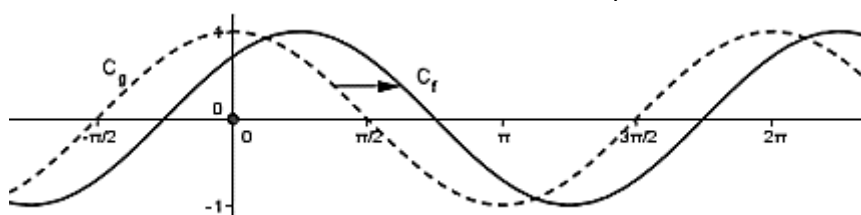
δ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}f(x) + 1 = 0$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = g\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, άρα η γραφική παράσταση της f προκύπτει από

οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά $\frac{\pi}{4}$ προς τα δεξιά.

β)



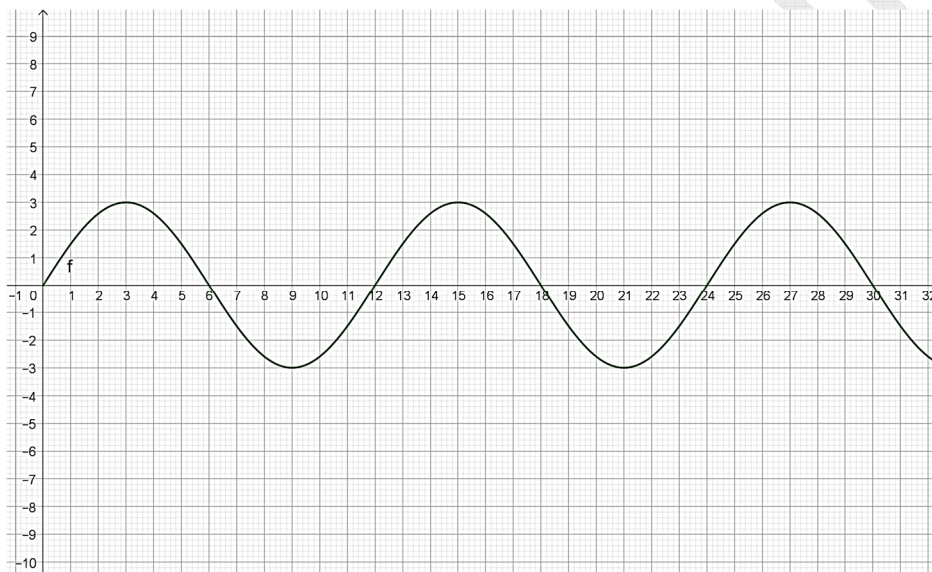
$$\gamma) f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, f(\pi) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\delta) \sqrt{2}f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}f(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\right) \text{ ή } \left(x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right)$$

20712. Σε μια θαλάσσια περιοχή, λόγω της παλίρροιας, η στάθμη των υδάτων αυξομειώνεται. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης f , που δίνει σε μέτρα το ύψος της στάθμης των υδάτων συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες. Να βρείτε :



- α) την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη (πλημμυρίδα) και τη χαμηλότερη στάθμη (άμπωτη). (Μονάδες 6)
 β) την περίοδο του φαινομένου της παλίρροιας. (Μονάδες 6)
 γ) τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)
 δ) ποιες ώρες, στη διάρκεια μιας ημέρας, η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Από το σχήμα προκύπτει ότι η f έχει μέγιστο το 3 και ελάχιστο το -3 , άρα υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη και τη χαμηλότερη στάθμη είναι $3 - (-3) = 6$ μέτρα.

β) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι το μικρότερο διάστημα που απαιτείται για να αρχίσει να επαναλαμβάνεται η γραφική παράσταση είναι 12 ώρες. Συνεπώς η f έχει περίοδο 12 ώρες.

γ) Η f έχει τύπο της μορφής $f(t) = \rho \eta\mu(\omega t)$, $\rho, \omega > 0$, $t \geq 0$.

Επειδή η f έχει μέγιστο το 3, είναι $\rho = 3$.

Επειδή η f έχει περίοδο 12, είναι $\frac{2\pi}{\omega} = 12 \Leftrightarrow 2\pi = 12\omega \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{6}$, άρα $f(t) = 3\eta\mu\left(\frac{\pi t}{6}\right)$, $t \geq 0$.

$$\delta) f(t) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3\eta\mu\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\pi t}{6} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \pi t = 12\kappa\pi + \pi \Leftrightarrow t = 12\kappa + 1, \kappa \in \mathbb{Z}\right) \text{ ή }$$

$$\left(\frac{\pi t}{6} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \pi t = 12\kappa\pi + 5\pi \Leftrightarrow t = 12\kappa + 5, \kappa \in \mathbb{Z}\right).$$

Επειδή μας ενδιαφέρει ποιες ώρες της ημέρας η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα, ισχύει ότι

$$0 \leq t \leq 24 \Leftrightarrow 0 \leq 12\kappa + 1 \leq 24 \Leftrightarrow -1 \leq 12\kappa \leq 23 \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{23}{12}.$$

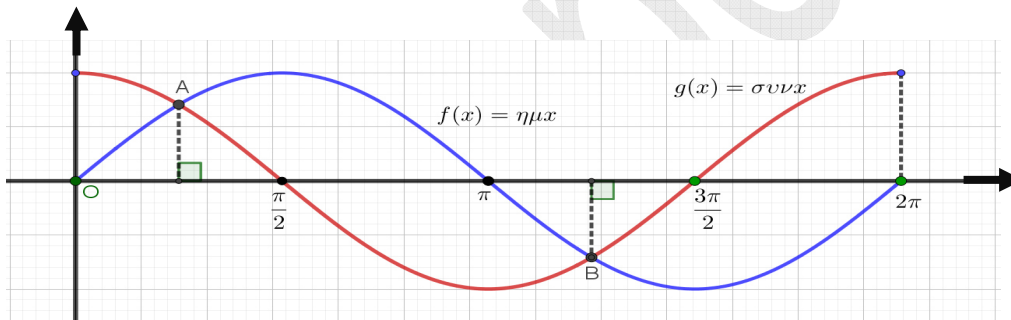
Επειδή $\kappa \in \mathbb{Z}$, είναι $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$. Για $\kappa = 0$ είναι $t = 12 \cdot 0 + 1 = 1$ και για $\kappa = 1$ είναι $t = 12 \cdot 1 + 1 = 13$.

$$\text{Όμοια } 0 \leq t \leq 24 \Leftrightarrow 0 \leq 12\kappa + 5 \leq 24 \Leftrightarrow -5 \leq 12\kappa \leq 19 \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq \kappa \leq \frac{19}{12}.$$

Επειδή $\kappa \in \mathbb{Z}$, είναι $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$. Για $\kappa = 0$ είναι $t = 12 \cdot 0 + 5 = 5$ και για $\kappa = 1$ είναι $t = 12 \cdot 1 + 5 = 17$.

Θέμα 3ο

15391. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, 2\pi]$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης g στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και την μονοτονία της συνάρτησης f στο

$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. (Μονάδες 4)

γ) Με την βοήθεια του ερωτήματος β) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να συγκρίνετε, με δικαιολόγηση, τους αριθμούς:

i. $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}$. (Μονάδες 5)

ii. $\eta\mu\frac{5\pi}{3}$ και $\eta\mu\left(\frac{11\pi}{6}\right)$. (Μονάδες 6)

Λύση

α) 1^{ος} τρόπος: Αρκεί να βρούμε τις ρίζες της εξίσωσης $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$ στο $[0, 2\pi]$ οι οποίες όπως φαίνεται στο σχήμα είναι ακριβώς δύο.

Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\frac{\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα η μία ρίζα είναι η $x = \frac{\pi}{4}$ επειδή $0 \leq \frac{\pi}{4} \leq 2\pi$.

Επίσης είναι $\eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{4} = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ άρα η δεύτερη ρίζα είναι η

$$x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \text{ επειδή } 0 \leq \frac{5\pi}{4} \leq 2\pi.$$

Άρα είναι $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και $B\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2ος τρόπος: Αρκεί να βρούμε τις ρίζες της εξίσωσης $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$ (1) στο $[0, 2\pi]$ οι οποίες όπως φαίνεται στο σχήμα είναι ακριβώς δύο.

Αν $\sigma\upsilon\nu x = 0$ τότε από (1) και $\eta\mu x = 0$ άρα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$ άτοπο.

Άρα για $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ είναι $(1) \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$

Για $\kappa = 0$ είναι $x = \frac{\pi}{4}$ και επειδή $0 \leq \frac{\pi}{4} \leq 2\pi$ είναι δεκτή.

Για $\kappa = 1$ είναι $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ και επειδή $0 \leq \frac{5\pi}{4} \leq 2\pi$ είναι δεκτή.

Επειδή από το σχήμα έχει ακριβώς δύο ρίζες οι παραπάνω είναι και οι μοναδικές.

Αλλιώς μπορούμε να κάνουμε: $0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \leq 2\pi \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \kappa\pi \leq \frac{7\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq \kappa \leq \frac{7}{4} \Leftrightarrow \kappa = 0 \text{ ή } \kappa = 1$$

β) Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

γ) i) Είναι $\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6} < \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} < \pi = \frac{6\pi}{6}$ άρα $\frac{2\pi}{3} < \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow g\left(\frac{2\pi}{3}\right) > g\left(\frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} > \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}$

ii) Είναι $\frac{3\pi}{2} = \frac{9\pi}{6} < \frac{5\pi}{3} = \frac{10\pi}{6} < \frac{11\pi}{6} < 2\pi = \frac{12\pi}{6}$ άρα $\frac{5\pi}{3} < \frac{11\pi}{6} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{5\pi}{3}\right) < f\left(\frac{11\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \eta\mu\frac{5\pi}{3} < \eta\mu\frac{11\pi}{6}$$

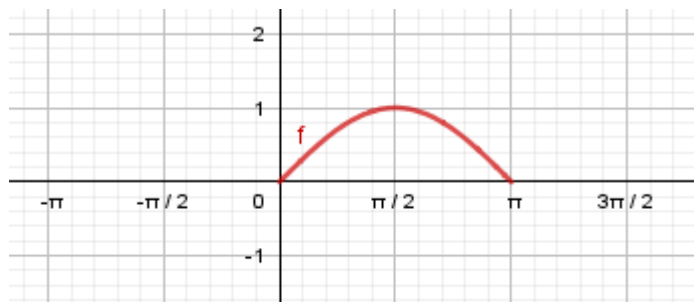
15789. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ με $x \in [0, \pi]$.

α) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και μετατοπίζοντας κατάλληλα την f να σχεδιάσετε την συνάρτηση

$$g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right). \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

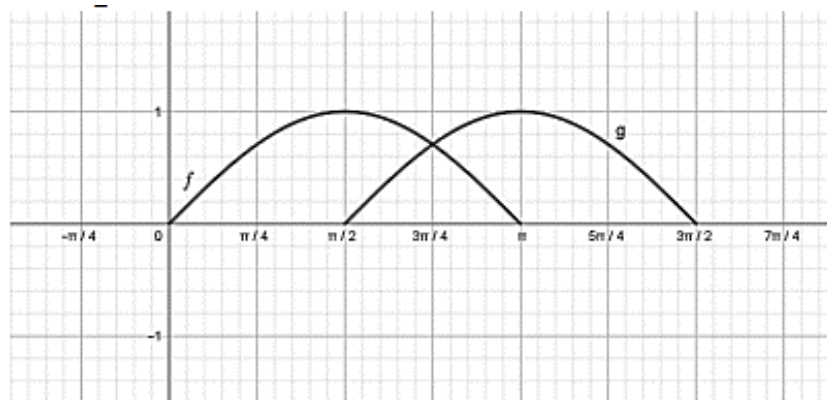
ii. Ποιος είναι ο τύπος της g και σε ποιο διάστημα ορίζεται; (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$. (Μονάδες 9)



Λύση

α) i) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά $\frac{\pi}{2}$ μονάδες προς τα δεξιά.



ii) Είναι $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sigma\upsilon\nu x$ με $0 \leq x - \frac{\pi}{2} \leq \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

β) 1^{ος} τρόπος: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + x - \frac{\pi}{2} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - x + \frac{\pi}{2} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \text{Αδύνατη} \\ x = \kappa\pi + \frac{3\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{3\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

2^{ος} τρόπος: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x$ (1). Έστω ότι $\sigma\upsilon\nu x = 0$ τότε από την (1) είναι και $\eta\mu x = 0$.
Επομένως $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$ άτοπο, άρα $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = -1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = -\epsilon\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{3\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = \frac{3\pi}{4}$$

21244. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha+1}{2} \sigma\upsilon\nu(\beta x)$, με $\alpha, \beta > 0$, η οποία έχει ελάχιστο -2 και περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 4$.

(Μονάδες 5)

β) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \epsilon\phi(\pi - x) \cdot \eta\mu(2\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi - x) \cdot \sigma\phi\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$. Να δείξετε ότι $A = -1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2A$, στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Η f έχει ελάχιστο το $-\frac{\alpha+1}{2}$, άρα $-\frac{\alpha+1}{2} = -2 \Leftrightarrow \frac{\alpha+1}{2} = 2 \Leftrightarrow \alpha+1 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 3$.

Η f έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\beta}$, άρα $\frac{2\pi}{\beta} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\beta} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta = 4$.

β) Είναι $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x$, $\epsilon\varphi(\pi - x) = \epsilon\varphi x$, $\eta\mu(2\pi + x) = \eta\mu x$,

$$\sigma\upsilon\nu(3\pi - x) = \sigma\upsilon\nu(2\pi + \pi - x) = \sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x,$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = \sigma\varphi\left(4\pi - \frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\varphi\left(-\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) =$$

$$-\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = -\epsilon\varphi(-x) = \epsilon\varphi x, \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\eta\mu x$$

$$A = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \epsilon\varphi(\pi - x) \cdot \eta\mu(2\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi - x) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{\cancel{\sigma\upsilon\nu x} \cdot (-\epsilon\varphi x) \cdot \eta\mu x}{-\cancel{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \epsilon\varphi x \cdot (-\eta\mu x)} = -\frac{\epsilon\varphi x \cdot \eta\mu x}{\epsilon\varphi x \cdot \eta\mu x} = -1$$

γ) Για $\alpha = 3$ και $\beta = 4$ είναι $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu(4x)$, οπότε:

$$f(x) = 2A \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu(4x) = -2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(4x) = -1 \Leftrightarrow 4x = 2\kappa\pi + \pi \Leftrightarrow x = \kappa\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Πολυώνυμα**Θέμα 2ο**

15113. Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9$ και $Q(x) = \alpha x^2 + 7$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Είναι το πολυώνυμο $P(x)$ 3ου βαθμού; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του α , ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Είναι $P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9 = -\cancel{2x^3} + 4x^2 + \cancel{2x^3} - 2 + 9 = 4x^2 + 7$, οπότε το πολυώνυμο είναι 2ου βαθμού και όχι 3ου.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $P(x) = Q(x) \Leftrightarrow \alpha = 4$.

20640. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 7x - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1. (Μονάδες 9)

β) Έστω $Q(x)$ πολυώνυμο το οποίο δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

i. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_1(x) = P(x) + Q(x)$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1. (Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_2(x) = P(x) \cdot Q(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Είναι $P(1) = 2 - 8 + 7 - 1 = 0$ άρα ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Αφού το πολυώνυμο $Q(x)$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1 τότε $Q(1) \neq 0$

i) Είναι $R_1(1) = P(1) + Q(1) = 0 + Q(1) = Q(1) \neq 0$ άρα δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

ii) Είναι $R_2(1) = P(1) \cdot Q(1) = 0 \cdot Q(1) = 0$ άρα έχει ρίζα τον αριθμό 1.

21998. Δίδεται το πολυώνυμο $P(x) = (x - 2)(x^6 + 1)$.

α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών, οπότε το $P(x)$ είναι $1 + 6 = 7$, δηλαδή 7ου βαθμού.

β) $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^6 + 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2) \text{ ή } (x^6 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^6 = -1 \text{ αδύνατη})$

Διαίρεση πολυωνύμων

Θέμα 2ο

14981. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x + 6$.

α) Να υπολογίσετε το $P(-2)$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το $x + 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

(Μονάδες 5)

γ) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) $P(-2) = (-2)^3 - (-2) + 6 = -8 + 2 + 6 = 0$

β) Επειδή $P(-2) = 0$ το $x + 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

γ) $P(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 3)$

1	0	-1	6	$\rho = -2$
	-2	4	-6	
1	-2	3	0	

15012. Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 3$ έχει πηλίκο $x^2 + 2$ και υπόλοιπο 4.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$.

(Μονάδες 8)

γ) Είναι το $x = 3$ ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Από τον τύπο της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι $P(x) = (x - 3)(x^2 + 2) + 4$

β) $P(x) = (x - 3)(x^2 + 2) + 4 \Leftrightarrow P(x) = x^3 + 2x - 3x^2 - 6 + 4 = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$

γ) Για να είναι το $x = 3$ ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ πρέπει $P(3) = 0 \Leftrightarrow$

$3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 2 = 0 \Leftrightarrow 27 - 27 + 6 - 2 = 0$ αδύνατο. Άρα το $x = 3$ δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

15096. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 και το -1 δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x) : (x^2 + x - 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Είναι $P(1) = 2 \cdot 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 \neq 0$ και

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 = 3 \neq 0$ άρα δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου.

β) Είναι $P(x) = (x^2 + x - 1)(2x - 1)$

$2x^3 + x^2 - 3x + 1$	$x^2 + x - 1$
$-2x^3 - 2x^2 + 2x$	$2x - 1$
$-x^2 - x + 1$	
$x^2 + x - 1$	
0	

15642. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2(x-1)^{20} - 3(x-1)^{10} + 5x^2 - 3x - 2$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$. (Μονάδες 10)

β) i. Να υπολογίσετε την τιμή $P(0)$. (Μονάδες 5)

ii. Είναι το x παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Είναι $P(1) = 2(1-1)^{20} - 3(1-1)^{10} + 5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = 5 - 3 - 2 = 0$ άρα το $x-1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) i. $P(0) = 2(0-1)^{20} - 3(0-1)^{10} + 5 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 - 2 = 2 - 3 - 2 = -3$

ii. Επειδή $P(0) \neq 0$ το x δεν είναι παράγοντας του $P(x)$.

21997. Δίδεται το πολυώνυμο $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Ποιο είναι το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ που προκύπτει από την διαίρεση $P(x)$: $(x-2)$; (Μονάδες 13)

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός του γινομένου μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών, οπότε το $P(x)$ είναι $1 + 1 + 1 = 3$, δηλαδή 3ου βαθμού.

β) Για $x \neq 2$ είναι $P(x) : (x-2) = \frac{P(x)}{(x-2)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-2)} = (x-1)(x-3)$, οπότε το πηλίκο της

διαίρεσης $P(x) : (x-2)$ είναι $\pi(x) = (x-1)(x-3)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ είναι μηδέν.

Πολυωνυμικές εξισώσεις - ανισώσεις

Θέμα 2ο

15040. Δίνεται η εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της. (Μονάδες 5)

β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το

πηλίκο της διαίρεσης $(x^3 - 7x + 6) : (x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης. (Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Για να είναι το 1 ρίζα πρέπει $1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 1 - 7 + 6 = 0$ ισχύει.

β) Είναι $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6)$

Το πηλίκο της διαίρεσης είναι το $x^2 + x - 6$.

1	0	-7	6	$\rho=1$
	1	1	-6	
1	1	-6	0	

γ) $x^3 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow (x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$ ή

$$\left(x^2 + x - 6 = 0, \Delta = 25, x = \frac{-1+5}{2} = 2 \text{ ή } x = \frac{-1-5}{2} = -3 \right)$$

15047. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο έχει και άλλη ακέραια ρίζα.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Είναι $P(1) = 1^4 - 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 2 = 1 - 1 - 5 + 7 - 2 = 0$, άρα το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου είναι οι $\pm 1, \pm 2$.

Είναι $P(-1) = (-1)^4 - (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot (-1) - 2 = -12 \neq 0$,

$P(2) = 2^4 - 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 - 2 = 0$, άρα και το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

15175. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $P(x) = (x-1)(x^2+1)$.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Είναι $P(1) = 1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 0$ άρα το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) 1^{ος} τρόπος: Εφαρμόζουμε σχήμα Horner με $\rho = 1$:

1	-1	1	-1	$\rho=1$
	1	0	1	
1	0	1	0	

Προκύπτει ότι $P(x) = (x-1)(x^2+1)$

2^{ος} τρόπος: $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^2+1)$

15176. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι το $x-1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

(Μονάδες 12)

β) Αν $P(x) = (x-1)(x^2 - x + 2)$, να βρείτε για ποιες τιμές του x είναι $P(x) > 0$.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Είναι $P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 1 - 2 + 3 - 2 = 0$ άρα το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου, οπότε το $x-1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) Το τριώνυμο $x^2 - x + 2$ έχει $\Delta = -7 < 0$, άρα $x^2 - x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$P(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x + 2) > 0 \stackrel{x^2 - x + 2 > 0}{\Leftrightarrow} x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

15246. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $P(x) = (x+1)^2(x-1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$.

(Μονάδες 15)

Λύση

$$\alpha) P(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x+1) - (x+1) = (x+1)(x^2 - 1) = (x+1)(x+1)(x-1) = (x+1)^2(x-1)$$

$$\beta) P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1, +\infty) \cup \{-1\}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$(x+1)^2$	+	+	+	+
$x-1$	-	-	+	+
$P(x)$	-	-	+	+

15247. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $P(x) = (2x-1)(x^2+1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$.

(Μονάδες 15)

Λύση

$$\alpha) P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1 = x^2(2x-1) + (2x-1) = (2x-1)(x^2+1)$$

$$\beta) P(x) \geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x^2+1) \geq 0 \Leftrightarrow \overset{x^2+1>0}{2x-1 \geq 0} \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

15248. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $2x-1$ δίνει πηλίκο x^2-2 και υπόλοιπο 1.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$

i. να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x-1)$.

(Μονάδες 7)

ii. να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 6)

Λύση

α) Από τον τύπο της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι $P(x) = (2x-1)(x^2-2) + 1 \Leftrightarrow$

$$P(x) = 2x^3 - 4x - x^2 + 2 + 1 = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$$

β) i. Είναι $P(1) = 2 \cdot 1^3 - 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0$, οπότε το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου. Με βάση το διπλανό σχήμα Horner είναι

$$P(x) = (x-1)(2x^2 + x - 3)$$

2	-1	-4	3	$\rho=1$
	2	1	-3	
2	1	-3	0	

ii. $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$ ή

$$\left(2x^2 + x - 3 = 0, \Delta = 1 + 24 = 25, x_1 = \frac{-1+5}{4} = 1, x_2 = \frac{-1-5}{4} = -\frac{3}{2} \right)$$

15618.α) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - x$ ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 15)

Λύση

$$\alpha) P(x) = 2x^3 + x^2 - x = x(2x^2 + x - 1)$$

β) $P(x) = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή

$\left(2x^2 + x - 1 = 0, \Delta = 1 + 8 = 9, x_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{-1-3}{4} = -1 \right)$

15653. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$.

α) i. Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $(x+1)$.

(Μονάδες 8)

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x+1)$.

(Μονάδες 5)

β) Αν $P(x) = (x-1)(x^2 + 2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) i. ii. $P(x) = (x+1)(x^2 + 2)$

1	1	2	2	$\rho = -1$
	-1	0	-2	
1	0	2	0	

β) $P(x) < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 2) < 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$

15654. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 7x + 6$.

α) Να δείξετε ότι το $x - 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Είναι $P(2) = 2^3 - 7 \cdot 2 + 6 = 8 - 14 + 6 = 0$ άρα το $x - 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow$

$(x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$ ή

$\left(x^2 + x - 6 = 0, \Delta = 25, x = \frac{-1+5}{2} = 2 \text{ ή } x = \frac{-1-5}{2} = -3 \right)$

1	0	-7	6	$\rho = 1$
	1	1	-6	
1	1	-6	0	

15674. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - x^2 - x + 2$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 10)

β) Αν $P(x) = (x-1)(3x^2 + 2x + 1) + 3$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 3$.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Με βάση το διπλανό σχήμα Horner το πηλίκο της διαίρεσης είναι $\pi(x) = 3x^2 + 2x + 1$ και το υπόλοιπο είναι 3, άρα

$P(x) = (x-1)(3x^2 + 2x + 1) + 3$

3	-1	-1	2	$\rho = 1$
	3	2	1	
3	2	1	3	

β) $P(x) < 3 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 2x + 1) + 3 < 3 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 2x + 1) < 0$ (1)

Το τριώνυμο $3x^2 + 2x + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -8 < 0$, άρα $3x^2 + 2x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η (1) γίνεται $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

15695. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x - 3, x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. (Μονάδες 13)
 β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) + 6 = 0$. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Με βάση το σχήμα Horner είναι

$$P(x) = x^3 + 2x - 3 = (x+1)(x^2 + x + 3) - 6$$

1	0	2	-3	$\rho = -1$
	-1	1	-3	
1	-1	3	-6	

β) $P(x) + 6 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 + x + 3) - 6 + 6 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 + x + 3) = 0 \Leftrightarrow$
 $(x+1=0 \Leftrightarrow x=-1) \text{ ή } (x^2 + x + 3 = 0, \Delta < 0 \text{ αδύνατη})$

17241. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x + 2$.

- α) I. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x+1)$. (Μονάδες 7)
 II. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x+1)$. (Μονάδες 10)
 β) Αν $P(x) = (x+1)(x^2 - x + 2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$. (Μονάδες 8)

Λύση

α) I. Επειδή $P(-1) = (-1)^3 - 1 + 2 = -1 - 1 + 2 = 0$ το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x+1)$.

II. Με βάση το διπλανό σχήμα Horner το πηλίκο της διαίρεσης είναι $\pi(x) = x^2 - x + 2$ και το υπόλοιπο είναι 0, άρα

$$P(x) = (x+1)(x^2 - x + 2)$$

1	0	1	2	$\rho = -1$
	-1	1	-2	
1	-1	2	0	

β) Το τριώνυμο $x^2 - x + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -7 < 0$, άρα $x^2 - x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε:
 $P(x) < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 2) < 0 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$.

18230. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$.

- α) Να αποδείξετε ότι έχει παράγοντα το $(x-2)$. (Μονάδες 9)
 β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο. (Μονάδες 9)
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Είναι $P(2) = 2 \cdot 2^3 + 2^2 - 8 \cdot 2 - 4 = 16 + 4 - 16 - 4 = 0$ άρα το $x - 2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

β) Είναι $P(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4 = x^2(2x+1) - 4(2x+1) = (2x+1)(x^2 - 4) = (2x+1)(x-2)(x+2)$

γ) $P(x) = 0 \Leftrightarrow (2x+1)(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left(2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \right) \text{ ή } (x-2=0 \Leftrightarrow x=2) \text{ ή } (x+2=0 \Leftrightarrow x=-2)$

20856. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

(Μονάδες 12)

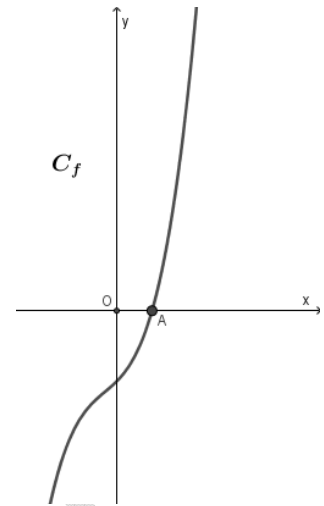
β) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

i. Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα.

(Μονάδες 04)

ii. Να αποδείξετε ότι η ρίζα αυτή βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$.

(Μονάδες 09)



Λύση

α) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου -1 που είναι το 1 και το -1 . Είναι $f(1) = 2 + 1 + 1 - 1 = 3 \neq 0$ και $f(-1) = -2 + 1 - 1 - 1 = -3 \neq 0$, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

β) i. Επειδή η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στο σημείο A , η τετμημένη του A είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

ii. Είναι $f(1) = 3 > 0$ και $f(0) = -1 < 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα που προσδιορίζει τη ρίζα μιας πολυωνυμικής συνάρτησης με προσέγγιση, υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης μεταξύ των αριθμών 0 και 1 .

Θέμα 4ο

14955. Η μέση θερμοκρασία T (σε βαθμούς Κελσίου) στην επιφάνεια ενός πλανήτη, μετά από x εκατομμύρια χρόνια, έχει εκτιμηθεί ότι είναι $T(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$.

α) Αποδείξτε ότι 2 εκατομμύρια χρόνια μετά, η μέση θερμοκρασία στον πλανήτη θα είναι μηδέν $^{\circ}\text{C}$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma$ ώστε να ισχύει $T(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$.

(Μονάδες 10)

γ) Θεωρούμε ότι μια χρονική περίοδος παγετώνων στον πλανήτη είναι αυτή στην οποία η μέση θερμοκρασία T είναι συνεχώς κάτω από μηδέν $^{\circ}\text{C}$. Ποιες χρονικές περιόδους θα έχουμε παγετώνες στον πλανήτη; (Μονάδες 10)

Λύση

α) Για $x = 2$ εκατομμύρια χρόνια, είναι $T(2) = 2^3 - 10 \cdot 2^2 + 31 \cdot 2 - 30 = 8 - 40 + 62 - 30 = 0$ $^{\circ}\text{C}$.

β) Με βάση το διπλανό σχήμα Horner, είναι

$$T(x) = (x - 2)(x^2 - 8x + 15)$$

Το τριώνυμο $x^2 - 8x + 15$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 4$ και ρίζες $x_1 = 3, x_2 = 5$, οπότε

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5), \text{ άρα } T(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 5), \text{ οπότε } \alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 5.$$

γ) Θέλουμε να βρούμε τα διαστήματα για τις τιμές x των οποίων θα είναι $T(x) < 0$

1	-10	31	-30	$\rho=2$
	2	-16	30	
1	-8	15	0	

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου των τιμών $T(x)$ για θετικές τιμές του x . Διαπιστώνουμε ότι παγετώνες θα υπάρχουν στον πλανήτη τα δύο πρώτα εκατομμύρια χρόνια και την χρονική περίοδο από τρία έως πέντε εκατομμύρια χρόνια.

x	0	2	3	5	$+\infty$
$x - 2$	-	+	+	+	
$x^2 - 8x + 15$	+	+	-	+	
$T(x)$	-	+	-	+	

15005. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

(Μονάδες 10)

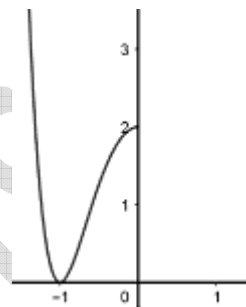
γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f για $x \leq 0$.

Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.

(Μονάδες 4)

δ) Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 6)



Λύση

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$.

Είναι $f(-x) = (-x)^6 - 3(-x)^2 + 2 = x^6 - 3x^2 + 2 = f(x)$, άρα η f είναι άρτια.

β) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^6 - 3x^2 + 2 = 0$ (1)

Θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$ και η (1) γίνεται $\omega^3 - 3\omega + 2 = 0$.

Παρατηρούμε ότι $1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$, οπότε με βάση το σχήμα Horner η εξίσωση γίνεται $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega - 2) = 0 \Leftrightarrow \omega = 1$ ή $\omega^2 + \omega - 2 = 0$

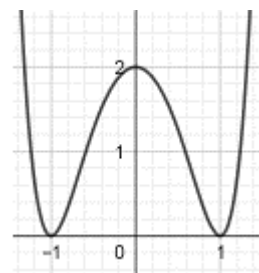
Το τριώνυμο $\omega^2 + \omega - 2$ έχει ρίζες $\omega = 1$ ή $\omega = -2$ που απορρίπτεται.

Άρα $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Επομένως η C_f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $(1, 0)$ και $(-1, 0)$.

1	0	-3	2	$\rho = 1$
	1	1	-2	
1	1	-2	0	

γ) Επειδή η f είναι άρτια, η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$, οπότε έχει την διπλανή μορφή.



δ) Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[1, +\infty)$.

15037. Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x+3}$ και $g(x) = 3x-1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g .

(Μονάδες 4)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

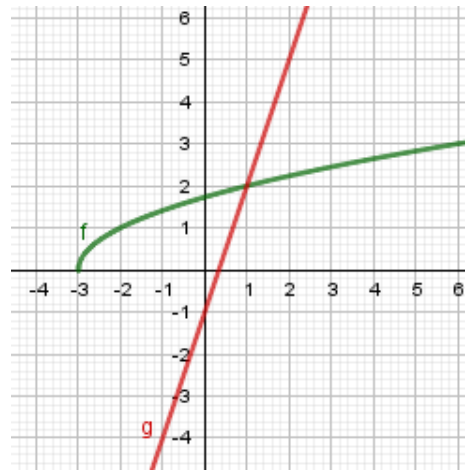
(Μονάδες 6)

γ) i. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$.

(Μονάδες 7)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του i ερωτήματος.

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Η συνάρτηση f ορίζεται μόνο για $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$, άρα $A_f = [-3, +\infty)$.

Σύμφωνα με το σχήμα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Η συνάρτηση g παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή του x και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_g και επειδή κοινό τους σημείο είναι το $(1, 2)$, έχουμε: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1$.

γ) i. Η ανίσωση $f(x) < g(x)$ λύνεται γραφικά με το να βρούμε τις τετμημένες, δηλαδή τα x , όπου η C_f είναι κάτω από C_g . Από το σχήμα προκύπτει πως αυτό συμβαίνει για $x \in (1, +\infty)$.

ii. $f(x) < g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x+3} < 3x-1$ (1)

Αν $3x-1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$, άρα $x \in \left[-3, \frac{1}{3}\right)$ η (1) είναι αδύνατη.

Αν $3x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$ η (1) γίνεται $(\sqrt{x+3})^2 < (3x-1)^2 \Leftrightarrow x+3 < 9x^2-6x+1 \Leftrightarrow 9x^2-7x-2 > 0 \Leftrightarrow$

$x \in \left(-\infty, -\frac{2}{9}\right) \cup (1, +\infty)$. Σύμφωνα με τους περιορισμούς η ανίσωση αληθεύει για $x \in (1, +\infty)$.

15066. Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του.

ii. Αν ο αριθμός p είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{p}$ είναι επίσης ρίζα του.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του.

(Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) i. Είναι $P(0) = 2 \neq 0$ οπότε το 0 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

ii. Ο αριθμός p είναι ρίζα του πολυωνύμου, αν και μόνο αν $P(p) = 0 \Leftrightarrow 2p^4 - 5p^3 + 4p^2 - 5p + 2 = 0$ (1)

Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα του πολωνύμου, αν και μόνο αν

$$P\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{\rho}\right)^4 - 5\left(\frac{1}{\rho}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 - 5\frac{1}{\rho} + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\frac{1}{\rho^4} - 5\frac{1}{\rho^3} + 4\frac{1}{\rho^2} - \frac{5}{\rho} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\rho^4 - 5\rho^3 + 4\rho^2 - 5\rho + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 - 5\rho + 4\rho^2 - 5\rho^3 + 2\rho^4 = 0 \text{ που ισχύει λόγω της (1).}$$

β) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του πολωνύμου είναι $\pm 1, \pm 2$. Επειδή θέλουμε θετική ρίζα, πιθανές είναι το 1 και το 2. Είναι $P(2) = 2 \cdot 16 - 5 \cdot 8 + 4 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 2 = 16 - 40 + 16 - 10 + 2 = 0$ οπότε ο αριθμός 2 είναι θετική ακέραια ρίζα του πολωνύμου.

2	-5	4	-5	2	$\rho = 2$
	4	-2	4	-2	
2	-1	2	-1	0	

γ) Με βάση το διπλανό σχήμα Horner, είναι

$$P(x) = (x-2)(2x^3 - x^2 + 2x - 1) \Leftrightarrow$$

$$P(x) = (x-2)[x^2(2x-1) + (2x-1)] = (x-2)(2x-1)(x^2+1)$$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x-1)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2=0 \Leftrightarrow x=2) \text{ ή } \left(2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\right) \text{ ή}$$

$$(x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1 \text{ αδύνατη})$$

x	$-\infty$	$1/2$	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	0	+
$2x-1$	-	0	+	+
x^2+1	+	+	+	+
$P(x)$	+	0	-	+

δ) Με βάση τον διπλανό πίνακα προσήμων είναι

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

15094. Το διάστημα $S(t)$ σε μέτρα που έχει διανύσει ένα κινητό τη χρονική στιγμή σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τη σχέση: $S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t$.

α) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 2$.

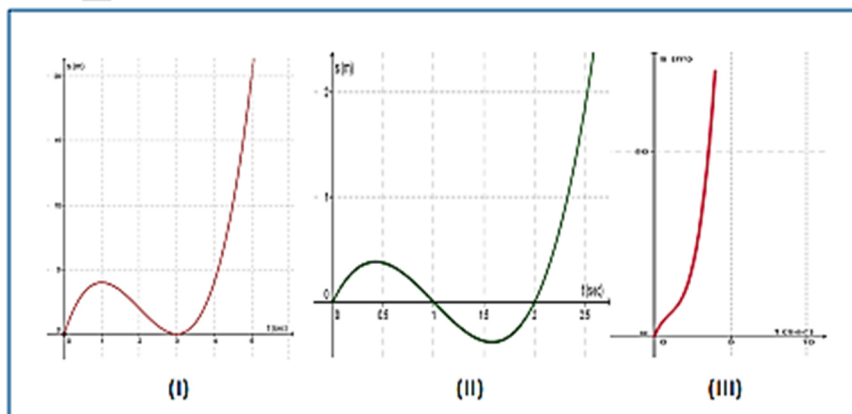
(Μονάδες 03)

β) Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση 30 μέτρων. (Μονάδες 10)

γ) Επειδή το $S(t)$ εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη

αρνητικό. Να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό. (Μονάδες 08)

δ) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολωνύμων $S(t)$. Μία από αυτές εκφράζει το διάστημα $S(t)$ της εκφώνησης. Να βρείτε ποια από τις τρεις είναι αυτή, δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 04)



Λύση

α) $S(0)=0, S(t)=2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 = 16 - 24 + 20 = 12$ μέτρα

β) $S(t)=30 \Leftrightarrow 2t^3 - 6t^2 + 10t = 30 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 5t - 15 = 0 \Leftrightarrow$
 $(t-3)(t^2+5)=0 \Leftrightarrow t=3 \text{ ή } t^2=-5 \text{ αδύνατο}$

1	-3	5	-15	$\rho=3$
	3	0	15	
1	0	5	0	

γ) Είναι $S(t)=2t^3 - 6t^2 + 10t = 2t(t^2 - 3t + 5)$

Το τριώνυμο $t^2 - 3t + 5$ έχει $\Delta = -11 < 0$, οπότε για κάθε $t \geq 0$ είναι $t^2 - 3t + 5 > 0$, οπότε και $S(t) \geq 0$.

δ) Με βάση το φυσικό πλαίσιο του προβλήματος, η συνάρτηση $S(t)$ πρέπει να είναι μη αρνητική και σε κανένα χρονικό διάστημα γνήσια φθίνουσα. Επομένως, είναι:

H (I) είναι μεν μη αρνητική, αλλά δε διατηρεί το ίδιο είδος μονοτονίας.

H (II) παίρνει και αρνητικές τιμές.

H (III) είναι μη αρνητική και γνήσιως αύξουσα παντού, ως εκ τούτου αποτελεί την ενδεδειγμένη απάντηση.

15174. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^4 + x^3 + ax - 4$ και $\delta(x) = x^2 - 3x + 2$.

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $\upsilon(x) = 24x - 24$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού a .

(Μονάδες 8)

β) Για $a = 2$,

i. να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$.

(Μονάδες 2)

ii. να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$.

(Μονάδες 8)

iii. να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$$P(x) = \delta(x)(x^2 + 4x + 10) + (a + 22)x - 24$$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει να ισχύει

$$(a + 22)x - 24 = 24x - 24 \Leftrightarrow a + 22 = 24 \Leftrightarrow a = 2$$

β) Για $a = 2$ είναι $P(x) = x^4 + x^3 + 2x - 4$.

i. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$

$$\text{είναι το } P(1) = 1^4 + 1^3 + 2 \cdot 1 - 4 = 0$$

ii. $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^3 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow$

$$x = 1 \text{ ή }$$

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+2) + 2(x+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+2)(x^2+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x^2 + 2 = 0 \text{ αδύνατη.}$$

1	1	0	2	-4	$\rho=1$
	1	2	2	4	
1	2	2	4	0	

$x^4 + x^3$	$+ ax - 4$	$x^2 - 3x + 2$
$-x^4 + 3x^3 - 2x^2$		$x^2 + 4x + 10$
$4x^3 - 2x^2$	$+ ax - 4$	
$-4x^3 + 12x^2$	$- 8x$	
$10x^2$	$+ (a - 8)x - 4$	
$-10x^2$	$+ 30x - 20$	
	$(a + 22)x - 24$	

Επομένως, τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι τα $(-2,0)$ και $(1,0)$.

iii. $P(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$x-1$		-	0	+	
$x+2$	-	0	+	+	
x^2+2	+		+	+	
$P(x)$	+	0	-	0	+

15250. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$ το οποίο διαιρούμενο με το $x^2 - 4$ δίνει υπόλοιπο $4x + 1$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 4)$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές των α και β .

(Μονάδες 7)

γ) Έστω $\alpha = 4$ και $\beta = 5$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$ είναι το $\pi(x) = x^3 - 1$, τότε:

i. να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$.

(Μονάδες 4)

ii. να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 4x + 1$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α)

$$\begin{array}{r|l}
 x^5 - 4x^3 - x^2 + \alpha x + \beta & x^2 - 4 \\
 + \quad -x^5 + 4x^3 & \\
 \hline
 & -x^2 + \alpha x + \beta \\
 & + \quad x^2 - 4 \\
 \hline
 & \alpha x + \beta - 4
 \end{array}$$

β) Πρέπει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να είναι $\alpha x + \beta - 4 = 4x + 1$ και αυτό ισχύει όταν $\alpha = 4$ και $\beta - 4 = 1 \Leftrightarrow \beta = 5$.

γ) i. $P(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 1) + 4x + 1$

ii. $P(x) < 4x + 1 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^3 - 1) + 4x + 1 < 4x + 1 \Leftrightarrow (1)$

$$(x^2 - 4)(x - 1)(x^2 + x + 1) < 0$$

το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει $\Delta < 0$ οπότε

$x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οι λύσεις της (1) είναι $x \in (-\infty, -2) \cup (1, 2)$

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
$x^2 - 4$	+	0	-	0	+	
$x - 1$	-	-	0	+	+	
$x^2 + x + 1$	+	+	+	+	+	
$P(x)$	-	0	0	-	0	+

15431.α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 5$, με $x \in \mathbb{R}$.

i. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x-2)$

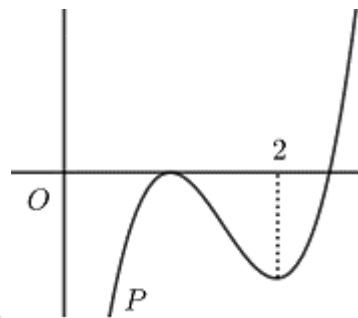
είναι -1 , να δείξετε ότι: $\begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases}$ και . (Μονάδες 6)

ii. Να δείξετε ότι $\alpha = -9$ και $\beta = 12$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν η γραφική παράσταση της $P(x)$ είναι η διπλανή, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της. (Μονάδες 4)



Λύση

α) i. Επειδή το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-1)$, ισχύει ότι $P(1) = 0 \Leftrightarrow 2 + \alpha + \beta - 5 = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 3$. Επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου με το $(x-2)$ είναι -1 , ισχύει ότι

$$P(2) = -1 \Leftrightarrow 16 + 4\alpha + 2\beta - 5 = -1 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta = -12 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = -6. \text{ Άρα } \begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases}.$$

$$\text{ii. } \begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3 - \alpha = -6 \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -9 \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -9 \\ \beta = 3 - (-9) = 12 \end{cases}$$

β) Από το σχήμα Horner προκύπτει ότι

$$P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 = (x-1)(2x^2 - 7x + 5)$$

Το τριώνυμο $2x^2 - 7x + 5$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 9$ και ρίζες

$$x = 1 \text{ ή } x = \frac{5}{2}.$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ είναι κάτω από τον

άξονα $x'x$ όταν $P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup \left(1, \frac{5}{2}\right)$.

γ) Από το ερώτημα β) προκύπτει ότι η γραφική παράσταση της P τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία

$(1, 0)$ και $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, οπότε βλέπουμε ότι η P είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[2, +\infty)$,

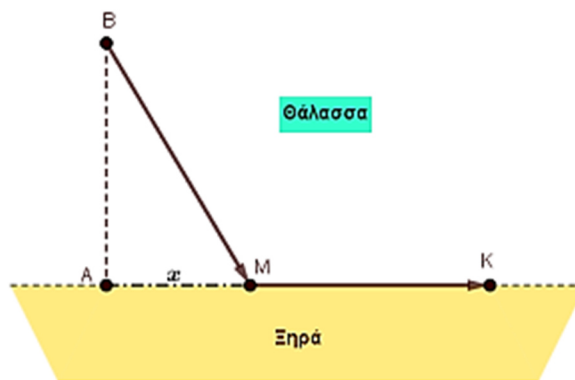
ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 2]$.

2	-9	12	-5	$\rho = 1$
	2	-7	5	
2	-7	5	0	

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$x-1$	-	o	+	+
$2x^2-7x+5$	+	o	-	o
$P(x)$	-	o	-	o

15436. Ένας κολυμβητής βρίσκεται στη θάλασσα, στο σημείο B σε απόσταση 2 km από το κοντινότερο σημείο A μιας ευθύγραμμης ακτής. Ο προορισμός του είναι ένα σημείο K της ακτής, το οποίο απέχει 4km από το A. Η διαδρομή που κάνει είναι η BM κολυμπώντας στη θάλασσα με σταθερή ταχύτητα 3km/h και η MK τρέχοντας στην ακτή με σταθερή ταχύτητα 5km/h. Γνωρίζουμε ότι η σχέση μεταξύ του διαστήματος που διανύεται, της ταχύτητας και του αντίστοιχου χρόνου

κίνησης, είναι $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$.



Αν το σημείο M απέχει από το A απόσταση x km, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $BM = \sqrt{4 + x^2}$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή – δρομέα ως προς την απόσταση x (σε km) είναι η:

$$t(x) = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3} + \frac{4 - x}{5}, x \in [0, 4].$$

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου M της ακτής, έτσι ώστε ο χρόνος της διαδρομής του κολυμβητή να είναι $\frac{4}{3}$ ώρες.

(Μονάδες 10)

Λύση

Είναι $AM = x$, $AB = 2$ και $MK = AK - AM = 4 - x$.

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} AM \geq 0 \\ MK \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0, 4].$$

α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο BAM προκύπτει:

$$BM^2 = AB^2 + AM^2 \Leftrightarrow BM^2 = 4 + x^2 \stackrel{BM \geq 0}{\Leftrightarrow} BM = \sqrt{4 + x^2}$$

β) Ο χρόνος κίνησης από το B στο M είναι $t_1 = \frac{BM}{u_k} = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3}$ και ο χρόνος κίνησης από το M στο K

$$\text{είναι } t_2 = \frac{MK}{u_t} = \frac{4 - x}{5}. \text{ Άρα είναι } t(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3} + \frac{4 - x}{5}, x \in [0, 4].$$

$$\begin{aligned} \gamma) \text{ Είναι } t(x) &= \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3} + \frac{4 - x}{5} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 5\sqrt{4 + x^2} + 3(4 - x) = 20 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5\sqrt{4 + x^2} + 12 - 3x = 20 \Leftrightarrow 5\sqrt{4 + x^2} = 3x + 8 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Αφού } x \in [0, 4] \text{ τότε } 3x + 8 > 0 \text{ άρα } (1) \Leftrightarrow 25(4 + x^2) = (3x + 8)^2 \Leftrightarrow 100 + 25x^2 = 9x^2 + 48x + 64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 48x + 36 = 0 \Leftrightarrow (4x - 6)^2 = 0 \Leftrightarrow 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ δεκτή.}$$

Άρα το σημείο M θα απέχει 1,5 Km από το σημείο A.

15677. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β , αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο

$$Q(x) = x^2 - 2x + 1. \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

β) Για $\alpha = 4, \beta = -2$

i. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 + 5)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. (Μονάδες 8)

ii. Αν $P(x) = (x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) + 14x + 28$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 14(x + 2)$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Αφού το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x)$, θα πρέπει το υπόλοιπο της παραπάνω διαίρεση να είναι το μηδενικό πολυώνυμο, που συμβαίνει μόνο όταν

$$\begin{cases} \alpha - 4 = 0 \\ \beta + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = -2 \end{cases}.$$

β) i. Είναι $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 2$.

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι

$$P(x) = (x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) + 14x + 28$$

ii. $P(x) = 14(x + 2) \Leftrightarrow$

$$(x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) + 14x + 28 = 14x + 28 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -5 \text{ αδύνατη}) \text{ ή } (x^2 - 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{7})$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 2x^3 - x^2 + \alpha x + \beta & x^2 - 2x + 1 \\ \hline -x^4 + 2x^3 - x^2 & x^2 - 2 \\ \hline -2x^2 + \alpha x + \beta & \\ 2x^2 & -4x + 2 \\ \hline (\alpha - 4)x + \beta + 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 2 & x^2 + 5 \\ \hline -x^4 - 5x^2 & x^2 - 2x - 6 \\ \hline -2x^3 - 6x^2 + 4x - 2 & \\ 2x^3 + 10x & \\ \hline -6x^2 + 14x - 2 & \\ 6x^2 + 30 & \\ \hline 14x + 28 & \end{array}$$

15960. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + \kappa x - 1$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

β) Για $\kappa = 0$,

i. να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$. (Μονάδες 6)

ii. να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

iii. να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$.

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } f(-x) = f(x) \Leftrightarrow (-x)^4 + \kappa(-x) - 1 = x^4 + \kappa x - 1 \Leftrightarrow$$

$$x^4 - \kappa x - 1 = x^4 + \kappa x - 1 \Leftrightarrow -\kappa = \kappa \Leftrightarrow 2\kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 0$$

β) Για $\kappa = 0$ είναι $f(x) = x^4 - 1$.

i. Για κάθε $x_1 < x_2 \leq 0$ είναι $x_1^4 > x_2^4 \Leftrightarrow x_1^4 - 1 > x_2^4 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f \searrow (-\infty, 0]$.

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^4 \geq 0 \Leftrightarrow x^4 - 1 \geq -1 \Leftrightarrow f(x) \geq -1 = f(0)$.

iii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ όταν $f(x) < 0 \Leftrightarrow x^4 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^4 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

15790. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ και $g(x) = -x^2 + 4$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-x) = f(x)$ και $g(-x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το $\mathbb{R}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

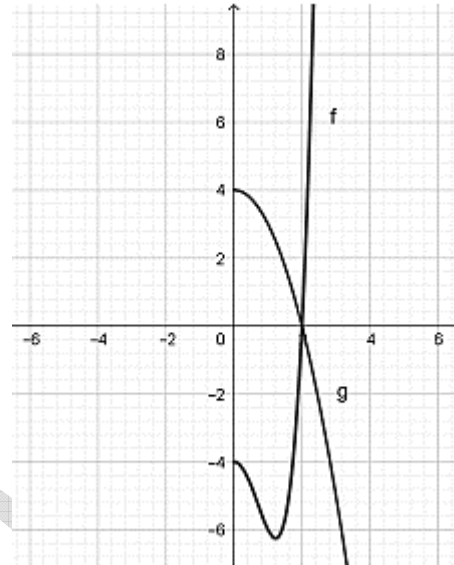
γ) Να λύσετε, αλγεβρικά ή γραφικά:

i. την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 6)

ii. την ανίσωση $f(x) < g(x)$.

(Μονάδες 6)



Λύση

α) Οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για $x \in \mathbb{R}$ το $-x \in \mathbb{R}$ και είναι :

$$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 - 4 = x^4 - 3x^2 - 4 = f(x) \quad \text{και}$$

$$g(-x) = -(-x)^2 + 4 = -x^2 + 4 = g(x)$$

β) Οι συναρτήσεις f, g είναι άρτιες άρα οι γραφικές τους παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.

γ) i) Γραφικά παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται στα σημεία με τετμημένες -2 και 2 άρα

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Αλγεβρικά έχουμε

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = -x^2 + 4 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Θέτουμε } x^2 = y \geq 0 \text{ και είναι } (1) \Leftrightarrow y^2 - 2y - 8 = 0$$

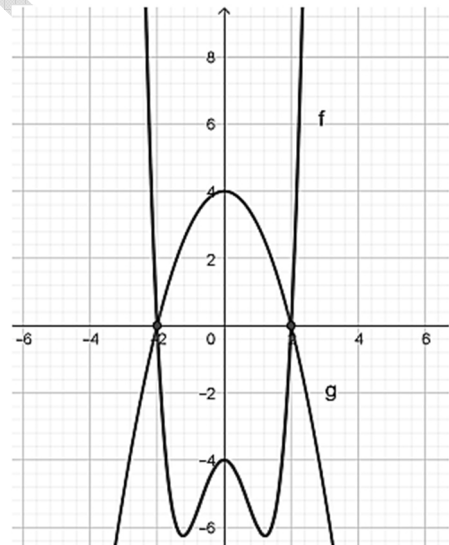
με διακρίνουσα $\Delta = 36$ και ρίζες $y_1 = -2$, η οποία απορρίπτεται και $y_2 = 4$ δεκτή.

$$\text{Άρα } y = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

ii) Γραφικά παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της g στο διάστημα $(-2, 2)$. Άρα $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in (-2, 2)$.

Αλγεβρικά ομοίως θέτουμε όπως στο προηγούμενο ερώτημα $x^2 = y \geq 0$ και είναι

$$y^2 - 2y - 8 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \in (-2, 4) \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq y < 4 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$



17943. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E = 60 \text{ m}^2$, του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 2 cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση: $x^3 + x^2 - 3600 = 0$. (Μονάδες 10)

β) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 16, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων τριγώνων που ικανοποιούν τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

Λύση

α) Το ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές με μήκη x και y αντίστοιχα και υποτείνουσα με μήκος $x + 2$. Επίσης έχει εμβαδόν $E = 60 \Leftrightarrow \frac{xy}{2} = 60 \Leftrightarrow y = \frac{120}{x}$

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{120}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Από το πυθαγόρειο θεώρημα είναι } (x+2)^2 &= x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + \frac{14400}{x^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^3 + 4x^2 - 14400 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 3600 = 0 \end{aligned}$$

β) Οι πιθανές ακέραιες και θετικές ($x > 0$) ρίζες της εξίσωσης $x^3 + x^2 - 3600 = 0$, οι οποίες είναι μικρότερες του 16 είναι οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15.

Δοκιμάζοντας τις τιμές 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12 παρατηρούμε ότι δεν είναι ρίζες.

$$\text{Βάζοντας το 15 είναι } 15^3 + 15^2 - 3600 = 15^2(15+1) - 3600 = 225 \cdot 16 - 3600 = 0$$

Άρα η μία κάθετη έχει μήκος 15 cm, η δεύτερη μήκος 8 cm και η υποτείνουσα μήκος 17 cm

γ) Εκτελούμε την διαίρεση $(x^3 + x^2 - 3600) : (x - 15)$:

$$\text{Είναι } x^3 + x^2 - 3600 = 0 \Leftrightarrow (x - 15)(x^2 + 16x + 240) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 15 \quad \text{ή} \quad x^2 + 16x + 240 = 0 \quad \text{αδύνατη γιατί έχει διακρίνουσα}$$

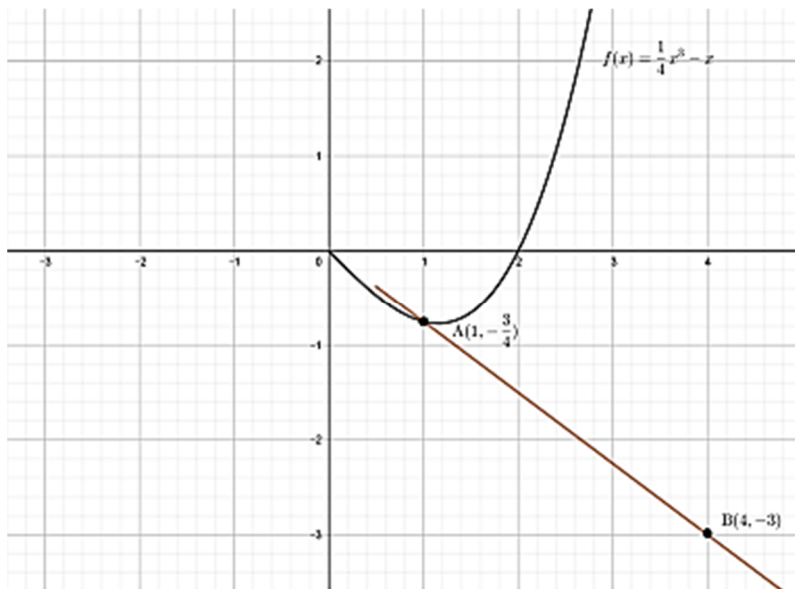
$$\Delta = 256 - 240 = -704 < 0$$

Άρα υπάρχει μόνο ένα τέτοιο ορθογώνιο τρίγωνο.

$x^3 + x^2 + 0x - 3600$	$x - 15$
(+) $-x^3 + 15x^2$	$x^2 + 16x + 240$
$16x^2 + 0x - 3600$	
(+) $-16x^2 + 240x$	$240x - 3600$
$240x - 3600$	
(+) $-240x + 3600$	0

17919. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x, x \in \mathbb{R} \text{ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία } A\left(1, -\frac{3}{4}\right) \text{ και } B(4, -3).$$



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

(Μονάδες 6)

β) i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x < 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν η ευθεία AB έχει εξίσωση $y = -\frac{3}{4}x$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο

θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με την γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Η ευθεία AB είναι της μορφής $y = ax + \beta$ με $a \neq 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$. Διέρχεται από τα σημεία $A\left(1, -\frac{3}{4}\right)$ και $B(4, -3)$ άρα προκύπτει το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} -\frac{3}{4} = a + \beta \\ -3 = 4a + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = 4a + 4\beta \\ -3 = 4a + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - 4a = 4\beta \\ -3 - 4a = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 4\beta \\ -3 - 4a = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Άρα η ευθεία AB έχει εξίσωση $y = -\frac{3}{4}x$.

β) i) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το $-x \in \mathbb{R}$ και

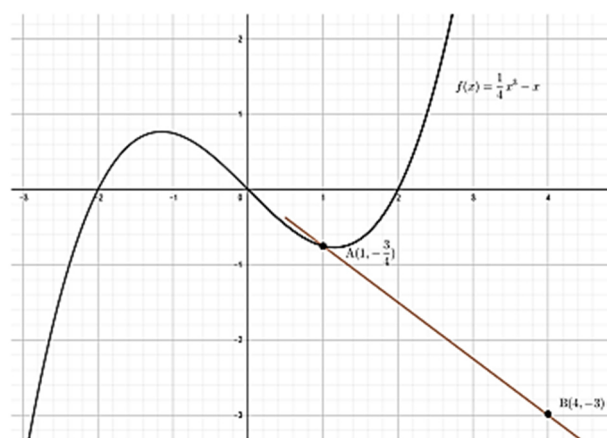
$$f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^3 - (-x) = -\frac{1}{4}x^3 + x = -f(x)$$

ii) Από το προηγούμενο ερώτημα η f είναι περιττή άρα η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

γ) 1^{ος} τρόπος: Είναι $f(0) = 0$ και

$$f(-1) = -f(1) = \frac{3}{4} \text{ και λόγω συμμετρίας της } f \text{ ως}$$

προς την αρχή των αξόνων και αφού αυτά είναι σημεία και της ευθείας τότε τα κοινά σημεία της ευθείας με την συνάρτηση f είναι τα



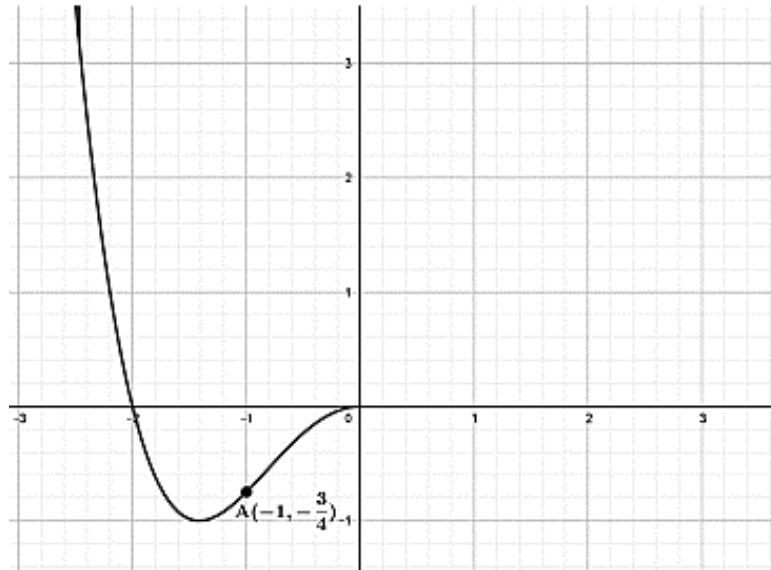
$$A\left(1, -\frac{3}{4}\right), O(0,0), K\left(-1, \frac{3}{4}\right).$$

$$2^{\text{ος}} \text{ τρόπος: } f(x) = -\frac{3}{4}x \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^3 - x = -\frac{3}{4}x \Leftrightarrow x^3 - 4x = -3x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } (x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1)$$

17925. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \alpha x^2, x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R} \text{ και το σημείο } A\left(-1, -\frac{3}{4}\right) \text{ αυτής.}$$



α) Να δείξετε ότι $\alpha = -1$. (Μονάδες 6)

β) Για $\alpha = -1$, i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x > 0$. (Μονάδες 6)

γ) Αφού επιβεβαιώσετε ότι $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{4}$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο

θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $y = -\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

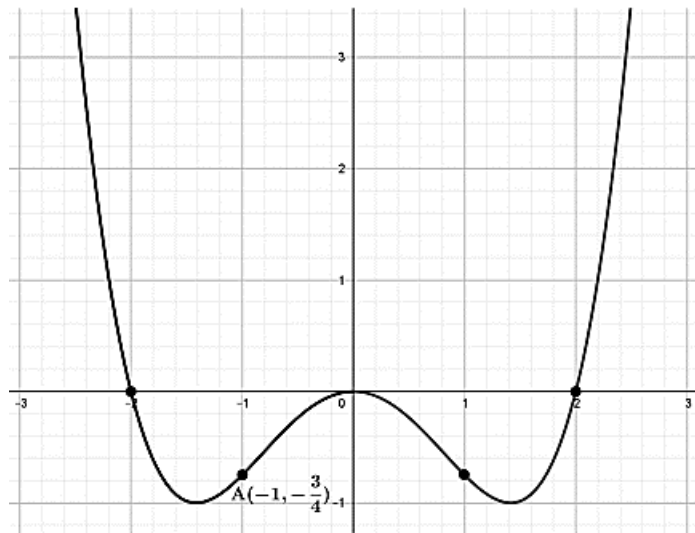
Λύση

$$\alpha) \text{ Από το σχήμα είναι } f(-2) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(-2)^4 + \alpha(-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{16}{4} + 4\alpha = 0 \Leftrightarrow 4\alpha = -4 \Leftrightarrow \alpha = -1$$

β) i) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ το } -x \in \mathbb{R} \text{ και } f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - (-x)^2 = \frac{1}{4}x^4 - x^2 = f(x)$$

ii) Η f είναι άρτια σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα άρα είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.



$$\beta) f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = \frac{1}{4}\sqrt{3}^4 - \sqrt{3}^2 = \frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4}$$

18221. Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η παραβολή $y = 3 - x^2$ και τα σημεία της Γ, Δ . Δίνεται ακόμα ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $\alpha \in (0, \sqrt{3})$.

α) Αν E είναι το εμβαδό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, τότε:

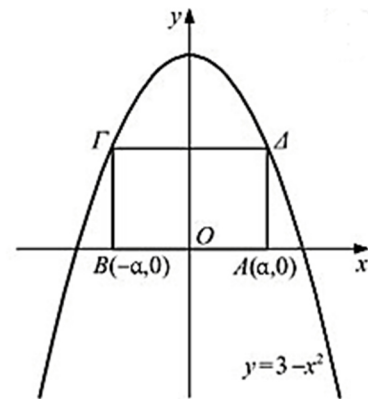
i. να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (0, \sqrt{3})$ είναι

$$E = f(\alpha) = -2\alpha^3 + 6\alpha \text{ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 08)}$$

ii. να βρεθεί το εμβαδό E στη θέση $\alpha = 1$. (Μονάδες 02)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό E δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 4 τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 12)

γ) Να βρεθεί η θέση του α , ώστε το εμβαδό E να πάρει τη μέγιστη τιμή του. (Μονάδες 03)



Λύση

α) i. Για κάθε $\alpha \in (0, \sqrt{3})$ είναι $(AB) = \alpha - (-\alpha) = 2\alpha$ και $(A\Delta) = y_\Delta = 3 - \alpha^2$, άρα

$$E = f(\alpha) = (AB)(A\Delta) = 2\alpha(3 - \alpha^2) = -2\alpha^3 + 6\alpha \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

ii. Για $\alpha = 1$ είναι $E = f(1) = -2 + 6 = 4$ τετραγωνικές μονάδες.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $\alpha \in (0, \sqrt{3})$ είναι $E \leq 4 \Leftrightarrow -2\alpha^3 + 6\alpha \leq 4 \Leftrightarrow \alpha^3 - 3\alpha + 2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha - 2) \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha^2 - 1 + \alpha - 1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 1)[(\alpha - 1)(\alpha + 1) + (\alpha - 1)] \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 1)(\alpha - 1)(\alpha + 1 + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2(\alpha + 1) \geq 0 \text{ που ισχύει}$$

1	0	-3	2	$\rho = 1$
	1	1	-2	
1	1	-2	0	

γ) Επειδή $f(\alpha) \leq 4 = f(1)$, το εμβαδό έχει μέγιστη τιμή το 4 για $\alpha = 1$.

22013. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε δύο αριθμούς α, β τέτοιους ώστε: $x^4 + 1 = (x^2 + \alpha x + 1) \cdot (x^2 + \beta x + 1)$. (Μονάδες 10)

γ) Θεωρούμε την ακόλουθη πρόταση: «Κάθε πολυώνυμο που μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πολυωνύμων μικρότερου μη μηδενικού βαθμού, έχει πραγματικές ρίζες». Είναι η πρόταση αυτή Σωστή ή Λάθος; Αν η πρόταση είναι σωστή, να δώσετε απόδειξη. Αν η πρόταση είναι λάθος, να δώσετε αντιπαράδειγμα. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Είναι $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -1$ αδύνατη, άρα το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

$$\beta) x^4 + 1 = (x^2 + \alpha x + 1) \cdot (x^2 + \beta x + 1) \Leftrightarrow x^4 + 1 = x^4 + \beta x^3 + x^2 + \alpha x^3 + \alpha \beta x^2 + \alpha x + x^2 + \beta x + 1 \Leftrightarrow$$

$$x^4 + 1 = x^4 + (\alpha + \beta)x^3 + (\alpha\beta + 2)x^2 + (\alpha + \beta)x + 1$$

Η τελευταία ισότητα αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha\beta + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \alpha(-\alpha) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ -\alpha^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \alpha^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \alpha = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Αν $\alpha = \sqrt{2}$, τότε $\beta = -\sqrt{2}$ και αν $\alpha = -\sqrt{2}$ τότε $\beta = \sqrt{2}$.

$$\text{Επομένως } x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

γ) Η πρόταση είναι λάθος γιατί από το προηγούμενο σκέλος έχουμε ότι

$$P(x) = x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 - \sqrt{2}x + 1) \text{ και γνωρίζουμε ότι το } P(x) \text{ δεν έχει ρίζες, καθώς και τα}$$

δύο πολυώνυμα 2ου βαθμού στα οποία παραγοντοποιήθηκε δεν έχουν ρίζες αφού έχουν διακρίνουσα $\Delta = -2 < 0$.

22016. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Να λύσετε:

α) Την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 9)

β) Την ανίσωση $P(x) \geq 0$. (Μονάδες 8)

γ) Την εξίσωση $1 + \sqrt{P(x)} = x$. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Από το σχήμα Horner έχουμε: $P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$,

$$\text{οπότε } P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1) \text{ ή } (x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3).$$

1	-6	11	-6	$\rho = 1$
	1	-5	6	
1	-5	6	0	

$$\beta) P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1, 2] \cup [3, +\infty)$$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+	+	+
$x^2 - 5x + 6$	+	+	0	-	0
P(x)	-	0	+	0	+

γ) Αρχικά πρέπει

$$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1, 2] \cup [3, +\infty)$$

$$1 + \sqrt{P(x)} = x \Leftrightarrow \sqrt{P(x)} = x - 1 \Leftrightarrow P(x) = (x - 1)^2 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 5x + 6) - (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 1)[x^2 - 5x + 6 - (x - 1)] = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 5x + 6 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 1)(x^2 - 6x + 7) = 0 \Leftrightarrow (x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ δεκτή}) \text{ ή }$$

$$\left(x^2 - 6x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(3 \pm \sqrt{2})}{2} \Leftrightarrow x_1 = 3 + \sqrt{2} \text{ δεκτή ή } x_2 = 3 - \sqrt{2} \right)$$

Θα εξετάσουμε αν και η λύση $x_2 = 3 - \sqrt{2}$ είναι δεκτή.

Είναι $1 < \sqrt{2} < 2 \Leftrightarrow -1 > -\sqrt{2} > -2 \Leftrightarrow 1 < 3 - \sqrt{2} < 2$, οπότε και η λύση $x_2 = 3 - \sqrt{2}$ είναι δεκτή.

Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

Θέμα 4ο

15187. Για τη γωνία ω του διπλανού σχήματος ισχύει

$$5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0.$$

α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε:

i. την τιμή του συνω,

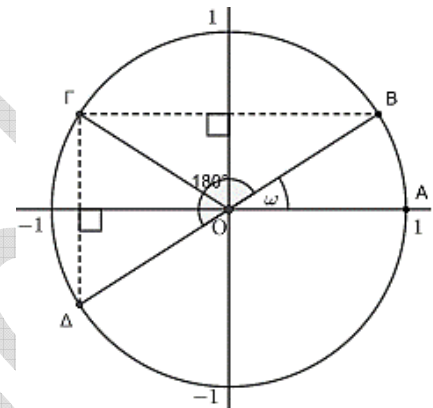
(Μονάδες 6)

ii. τις συντεταγμένες των σημείων Β, Γ και Δ, (Μονάδες 6)

iii. το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών

$\widehat{AOB}$, $\widehat{AOG}$ και $\widehat{AOD}$.

(Μονάδες 5)



Λύση

α) Θέτουμε $\eta\mu\omega = x$ και η εξίσωση γράφεται: $5x^3 - 8x^2 - 7x + 6 = 0$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του 6, δηλαδή οι $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Με δοκιμή διαπιστώνουμε ότι ο -1 είναι ρίζα.

$$5x^3 - 8x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(5x^2 - 13x + 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1) \text{ ή } \left(5x^2 - 13x + 6 = 0, \Delta = 49, x_1 = 2, x_2 = \frac{3}{5} \right)$$

Επειδή $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$, είναι $0 < \eta\mu\omega < 1$, άρα $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.

5	-8	-7	6	$\rho = -1$
	-5	13	-6	
5	-13	6	0	

β) i. Ισχύει ότι: $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow{\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)} \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5}$

ii. Από τον τριγωνομετρικό κύκλο γνωρίζουμε ότι το σημείο Β έχει συντεταγμένες $(\sigma\upsilon\nu\omega, \eta\mu\omega)$, άρα $B\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$. Τα σημεία Γ και Δ είναι συμμετρικά του Β ως προς τον άξονα $y'y$ και την αρχή Ο αντίστοιχα.

Οπότε είναι: $\Gamma\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \Delta\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

iii. Το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOG}$ και $\widehat{AOD}$ είναι οι τεταγμένες και οι τετμημένες των σημείων Β, Γ και Δ αντίστοιχα. Άρα, $\eta\mu\widehat{AOB} = \frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\widehat{AOB} = \frac{4}{5}$, $\eta\mu\widehat{AOG} = \frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\widehat{AOG} = -\frac{4}{5}$ και

$$\eta\mu\widehat{AOD} = -\frac{3}{5}, \sigma\upsilon\nu\widehat{AOD} = -\frac{4}{5}$$

15270. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την μονοτονία της και την μέγιστη τιμή της.

(Μονάδες 6)

β) Αν $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ και $0 < \alpha < \frac{1}{4} < \beta$, να βρείτε το πρόσημο του

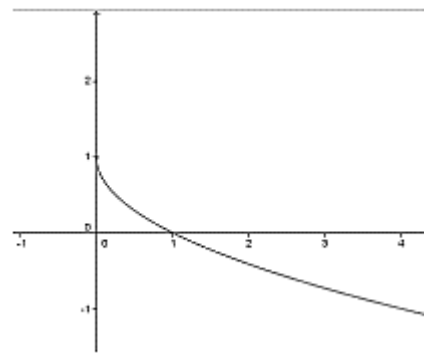
γινομένου $P = (2f(\alpha) - 1)(2f(\beta) - 1)$.

(Μονάδες 10)

γ) Έστω ότι η συνάρτηση του προβλήματος είναι η

$f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y = 2x$.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Από το σχήμα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. Η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 1 και επιτυγχάνεται όταν $x = 0$.

β) Είναι $\alpha < \frac{1}{4} \Leftrightarrow f(\alpha) > f\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow f(\alpha) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(\alpha) > 1 \Leftrightarrow 2f(\alpha) - 1 > 0$ και

$\beta > \frac{1}{4} \Leftrightarrow f(\beta) < f\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow f(\beta) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(\beta) < 1 \Leftrightarrow 2f(\beta) - 1 < 0$, άρα $P = (2f(\alpha) - 1)(2f(\beta) - 1) < 0$

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία, δίνονται από τη λύση της εξίσωσης $f(x) = 2x$. Για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) = 2x \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x} = 2x \Leftrightarrow 2x + \sqrt{x} - 1 = 0$ (1)

Θέτουμε $\sqrt{x} = u \geq 0$, οπότε $x = u^2$ και η (1) γίνεται: $2u^2 + u - 1 = 0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με $\Delta = 9$ και ρίζες $u = -1$ απορρίπτεται ή

$$u = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Άρα το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την ευθεία είναι το $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

15377. Μία κυβική δεξαμενή Α έχει ακμή με μήκος x μέτρα. Αν αυξηθεί η μία μόνο ακμή της κατά μία μονάδα θα μετατραπεί στη δεξαμενή Β σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με τετράγωνη βάση.

α) Να βρείτε τη διαφορά $\Delta(x)$ των όγκων των δύο δεξαμενών ως συνάρτηση του x . (Μονάδες 4)

β) Αν ο όγκος της δεξαμενής Β είναι 36 κυβικά μέτρα να βρείτε:

(Μονάδες 9)

i. Τις διαστάσεις των δεξαμενών Α και Β.

(Μονάδες 4)

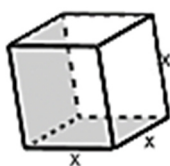
ii. Τη διαφορά των όγκων $\Delta(x)$.

γ) Αν επιπλέον αυξηθεί η μία ακμή της βάσης της δεξαμενής Β κατά 2 μονάδες, να βρείτε τη μικρότερη τιμή του x ώστε ο όγκος της νέας δεξαμενής Γ να είναι τουλάχιστον 60 κυβικά μέτρα.

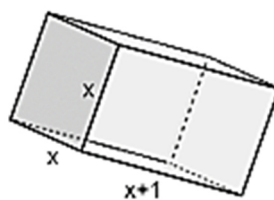
(Μονάδες 8)

Βοηθητικά δίνονται τα σχήματα των δεξαμενών Α, Β και Γ

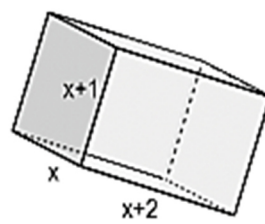
Δεξαμενή Α



Δεξαμενή Β



Δεξαμενή Γ



Λύση

α) Ο όγκος της κυβικής δεξαμενής A υπολογίζεται από τον τύπο του όγκου κύβου, δηλαδή $V_A(x) = x^3$ και ο όγκος της δεξαμενής B, από τον τύπο του όγκου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου,
 $V_B(x) = (x+1) \cdot x^2$

$$\text{Είναι } \Delta(x) = V_B(x) - V_A(x) = (x+1) \cdot x^2 - x^3 = x^3 + x^2 - x^3 = x^2$$

β) i. $V_B(x) = 36 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 4x + 12) = 0 \Leftrightarrow (x-3=0 \Leftrightarrow x=3)$ ή
 $(x^2 + 4x + 12 = 0 \text{ αδύνατη γιατί έχει } \Delta < 0)$

Η διάσταση της δεξαμενής A είναι $x = 3$ μέτρα. Οι διαστάσεις της δεξαμενής B είναι 3 μέτρα, 3 μέτρα και 4 μέτρα.

ii. Η διαφορά των όγκων είναι $\Delta(x) = 3^2 = 9$ κυβικά μέτρα.

γ) Η νέα δεξαμενή Γ θα έχει όγκο $V_\Gamma(x) = (x+1)(x+2)x$.

$$V_\Gamma(x) \geq 60 \Leftrightarrow (x+1)(x+2)x \geq 60 \Leftrightarrow (x^2+x)(x+2) - 60 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x - 60 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 2x - 60 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 6x + 20) \geq 0 \quad (1)$$

Το τριώνυμο $x^2 + 6x + 20$ έχει $\Delta < 0$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 + 6x + 20 > 0$, οπότε η (1) γίνεται:
 $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Επομένως, η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το x είναι το 3, που είναι και η ζητούμενη ακμή.

17941. Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (1).

α) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η εξίσωση (1).

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1) για $\alpha = 0$.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2}$ είναι άρτια.

(Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι:

i) Για $\alpha = 2\sqrt{2}$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα.

ii) Για $\alpha \neq 2\sqrt{2}$ αν η εξίσωση (1) έχει ως ρίζα τον αριθμό $\rho \in [-2, 2]$ τότε θα έχει ως ρίζα και τον αριθμό $-\rho$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Η εξίσωση (1) ορίζεται όταν $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2, 2]$.

β) Για $\alpha = 0$ η εξίσωση γίνεται: $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = -\sqrt{x+2}$ (2).

Επειδή για κάθε $x \in [-2, 2]$ είναι $\sqrt{2-x} \geq 0$ και $-\sqrt{x+2} \leq 0$ η (1) αληθεύει μόνο όταν

$$\begin{cases} \sqrt{2-x} = 0 \\ -\sqrt{x+2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \text{ αδύνατο. Συνεπώς, η εξίσωση είναι αδύνατη.}$$

γ) Η g έχει πεδίο ορισμού $A = [-2, 2]$. Για κάθε $x \in A$ είναι και $-x \in A$ και

$$g(-x) = \sqrt{2+(-x)} + \sqrt{(-x)+2} = g(x), \text{ άρα η } g \text{ είναι άρτια.}$$

δ) i. Για $\alpha = 2\sqrt{2}$ η εξίσωση γίνεται: $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = 2\sqrt{2}$ και για κάθε $x \in [-2, 2]$, είναι:

$$(\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2})^2 = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 2-x + 2\sqrt{2-x} \cdot \sqrt{x+2} + x+2 = 8 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{(2-x)(x+2)} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(2-x)(x+2)} = 2 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Άρα έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

ii. Για $\alpha \neq 2\sqrt{2}$ η εξίσωση αν η εξίσωση (1) έχει ως ρίζα τον αριθμό $\rho \in [-2, 2]$ τότε $g(\rho) = 0$.

Επειδή η g είναι άρτια ισχύει ότι $g(-\rho) = g(\rho) = 0$, οπότε και η $x = -\rho$ θα είναι ρίζα της εξίσωσης (1).

20647. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x + 3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 2, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας συντελεστής του δεν είναι ακέραιος. (Μονάδες 7)

Αν επιπλέον $P(1) = 0$, τότε:

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$ και $\beta = \frac{21}{2}$. (Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$. (Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $P(\sin x) = 0$. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Επειδή το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου, ισχύει ότι $P(2) = 0 \Leftrightarrow 8\alpha + 4\beta - 2\beta + 3 = 0 \Leftrightarrow 8\alpha + 2\beta = -3$ (1)

$$\text{Είναι } 2\beta = -3 - 8\alpha \Leftrightarrow \beta = -\frac{3}{2} - 4\alpha.$$

Αν ο α είναι ακέραιος τότε ο αριθμός -4α είναι ακέραιος, οπότε ο $\beta = -\frac{3}{2} - 4\alpha$ δεν είναι ακέραιος.

Αν ο β είναι ακέραιος τότε $8\alpha + 2\beta = -3 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{4}\beta - \frac{3}{8}$ και ο α δεν είναι ακέραιος.

Άρα τουλάχιστον ένας συντελεστής του πολυωνύμου δεν είναι ακέραιος.

β) Είναι $P(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta - \beta + 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -3$. Τότε από τη σχέση (1) έχουμε

$$-24 + 2\beta = -3 \Leftrightarrow 2\beta = 21 \Leftrightarrow \beta = \frac{21}{2}.$$

γ) Για $\alpha = -3$ και $\beta = \frac{21}{2}$ είναι $P(x) = -3x^3 + \frac{21}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + 3$.

$$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(-3x^2 + \frac{15}{2}x - 3\right) \leq 0 \quad (2)$$

Το τριώνυμο $-3x^2 + \frac{15}{2}x - 3$ έχει $\Delta = \frac{225}{4} - 36 = \frac{81}{4}$ και ρίζες

$$x_1 = \frac{-\frac{15}{2} + \frac{9}{2}}{-6} = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{-\frac{15}{2} - \frac{9}{2}}{-6} = 2, \text{ οπότε}$$

$$-3x^2 + \frac{15}{2}x - 3 = -3\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2) \text{ και η (2) γίνεται}$$

$$-3(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup [2, +\infty)$$

$$\delta) P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(-3x^2 + \frac{15}{2}x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow$$

-3	$\frac{21}{2}$	$-\frac{21}{2}$	3	$\rho = 1$
	-3	$\frac{15}{2}$	-3	
-3	$\frac{15}{2}$	-3	0	

x	$-\infty$	$1/2$	1	2	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+	+
$x-\frac{1}{2}$	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+
Γινόμενο	-	0	+	0	+

$$x = 1 \text{ ή } -3x^2 + \frac{15}{2}x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = \frac{1}{2}$$

$$P(\sin x) = 0 \Leftrightarrow (\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}) \text{ ή } (\sin x = 2 \text{ αδύνατη}) \text{ ή}$$

$$\left(\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z} \right).$$

21240. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου.

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $3\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^3 + 4\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{x^2+1}\right) - 2 > 0$.

(Μονάδες 11)

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι $P(1) = 3 + 4 - 5 - 2 = 0$

Με βάση το σχήμα Horner είναι $P(x) = (x-1)(3x^2 + 7x + 2)$.

Το τριώνυμο $3x^2 + 7x + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 25$

και ρίζες $x = -2$ ή $x = -\frac{1}{3}$, άρα $3x^2 + 7x + 2 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x + 2)$, οπότε

$$P(x) = 3(x-1)\left(x + \frac{1}{3}\right)(x+2) \text{ και } P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1=0 \Leftrightarrow x=1) \text{ ή } \left(x + \frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}\right) \text{ ή } (x+2=0 \Leftrightarrow x=-2)$$

β) Με βάση τον διπλανό πίνακα προσήμων

$P(x) > 0 \Leftrightarrow$

$$x \in \left(-2, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$$

γ) Αν θέσουμε $\frac{5}{x^2+1} = \omega > 0$, έχουμε:

$$3\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^3 + 4\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{x^2+1}\right) - 2 > 0 \Leftrightarrow 3\omega^3 + 4\omega^2 - 5\omega - 2 > 0 \Leftrightarrow P(\omega) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega \in \left(-2, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty). \text{ Όμως } \omega > 0 \text{ άρα } \omega > 1 \Leftrightarrow \frac{5}{x^2+1} > 1 \Leftrightarrow 5 > x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

3	4	-5	-2	$\rho = 1$
	3	7	2	
3	7	2	0	

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	είναι
$x-1$	-	-	-	0	+	
$3x^2+7x+2$	+	0	-	0	+	
$P(x)$	-	0	+	0	-	+

Εκθετική συνάρτηση

Θέμα 2ο

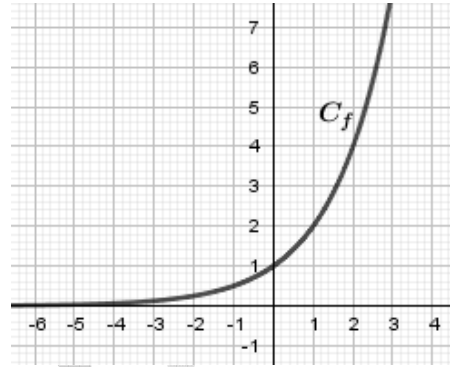
18866. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $2^x - 1 = 0$.

(Μονάδες 10)

β) i. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες συντεταγμένων. (Μονάδες 05)

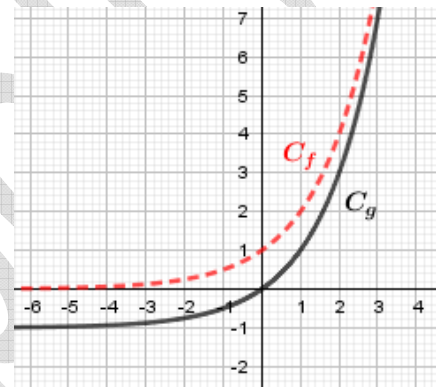


Λύση

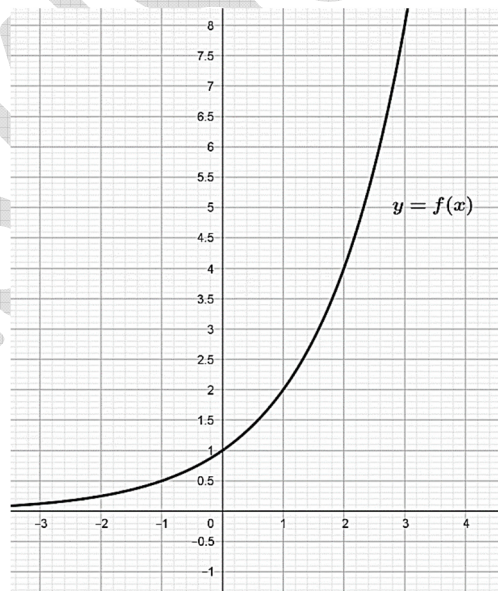
α) $2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

β) i. Επειδή $g(x) = f(x) - 1$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης προκύπτει από μία κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης κατά μονάδα προς τα κάτω.

ii. Είναι $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, επομένως η γραφική παράσταση της g διέρχεται από την αρχή O των αξόνων.



21091. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης f , με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.



α) i. Με βάση την γραφική της παράσταση, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f .

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$					

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε τον τύπο της εκθετικής συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 32$.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) i. Με βάση την γραφική παράσταση της f έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$0,5 = \frac{1}{2}$	1	2	4	8

ii. Επειδή η f είναι εκθετική, θα είναι της μορφής $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$.

Επειδή η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(1,2)$, ισχύει ότι $f(1) = 2 \Leftrightarrow a^1 = 2 \Leftrightarrow a = 2$,
 άρα $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

β) $f(x) = 32 \Leftrightarrow 2^x = 2^5 \Leftrightarrow x = 5$.

21163. Δίνεται το σημείο $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f .

α) Αν η συνάρτηση f είναι εκθετική συνάρτηση a^x , $0 < a < 1$, να βρείτε το a .

(Μονάδες 13)

β) Για $a = \frac{1}{2}$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $a^{\sqrt{2}}$, $a^{\sqrt{3}}$.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Εφόσον το σημείο A ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ισχύει ότι:

$$f(1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

β) Η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ είναι εκθετική με βάση $0 < \frac{1}{2} < 1$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα.

Επειδή $\sqrt{2} < \sqrt{3}$, είναι $f(\sqrt{2}) > f(\sqrt{3}) \Leftrightarrow a^{\sqrt{2}} > a^{\sqrt{3}}$.

21451. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3^x$, $x \in \mathbb{R}$.

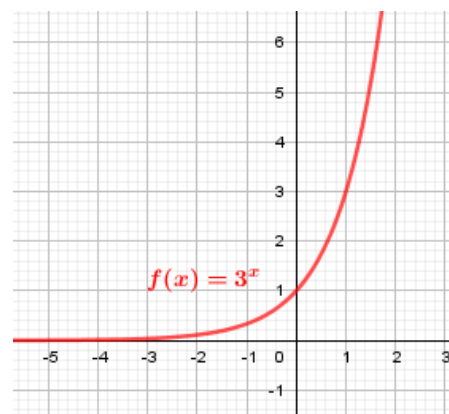
α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = 3^x + 1$ και $h(x) = 3^x - 1$, μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 12)

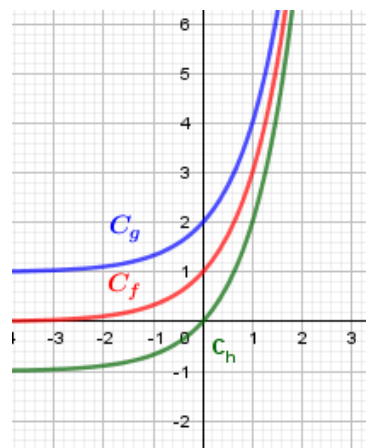
β) Ποια είναι η ασύμπτωτη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g και ποια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h ;

(Μονάδες 13)

Λύση



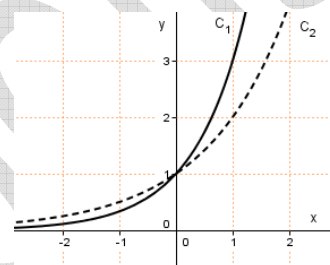
α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 3^x + 1$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα προς τα πάνω, ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτησης h προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων.



β) Η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$ (τον αρνητικό ημιάξονα των x). Η κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα πάνω θα μετατοπίσει και την ασύμπτωτη ευθεία κατά μία μονάδα προς τα πάνω. Άρα η γραφική παράσταση της g έχει ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y = 1$. Ομοίως, η κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω θα μετατοπίσει και την ασύμπτωτη ευθεία κατά μία μονάδα προς τα κάτω. Άρα η γραφική παράσταση της h έχει ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y = -1$.

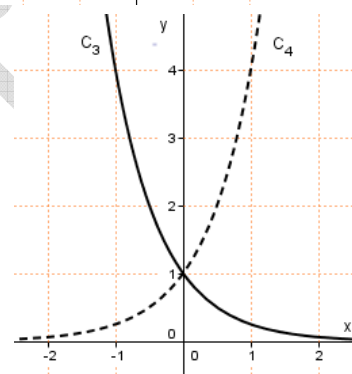
21993.α) Ποια από τις δύο καμπύλες C_1 (συνεχής γραμμή) και C_2 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x$ και ποια της συνάρτησης $g(x) = 3^x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)



β) Ποια από τις δύο καμπύλες C_3 (συνεχής γραμμή) και C_4 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = 4^x$ και ποια της συνάρτησης $\psi(x) = 4^{-x}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Για την f για $x = 1$ είναι $f(1) = 2^1 = 2$, δηλαδή το σημείο $(1, 2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f . Στο σχήμα όμως βλέπουμε ότι το σημείο $(1, 2)$ ανήκει στη C_2 , άρα η γραφική παράσταση της f είναι η C_2 και της g είναι η C_1 .

β) Για την φ για $x = 1$ είναι $\varphi(1) = 4^1 = 4$, δηλαδή το σημείο $(1, 4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της φ . Στο σχήμα όμως βλέπουμε ότι το σημείο $(1, 4)$ ανήκει στη C_4 , άρα η γραφική παράσταση της φ είναι η C_4 και της ψ είναι η C_3 .

21994. Η καμπύλη που φαίνεται στο παρακάτω σύστημα αξόνων δείχνει την εκθετική απόσβεση ενός ραδιενεργού υλικού σε συνάρτηση με το χρόνο. Ειδικότερα, ο οριζόντιος άξονας δηλώνει τον χρόνο t σε ημέρες (π.χ. η 1^η ημέρα αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα από $t = 0$ μέχρι $t = 1$, η 2^η ημέρα στο χρονικό διάστημα από $t = 1$ μέχρι $t = 2$ κ.λπ.) και ο κατακόρυφος άξονας δηλώνει την ποσότητα του υλικού σε γραμμάρια (gr).



- α) Πόσα γραμμάρια ήταν η αρχική ($t = 0$) ποσότητα του ραδιενεργού υλικού; (Μονάδες 8)
 β) Πόση είναι η ημιζωή (ή χρόνος υποδιπλασιασμού) του ραδιενεργού υλικού; (Μονάδες 9)
 γ) Κατά τη διάρκεια ποιας ημέρας θα έχει απομείνει ποσότητα ραδιενεργού υλικού μικρότερη από 1gr; (Μονάδες 8)

Σε όλα τα ερωτήματα, να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

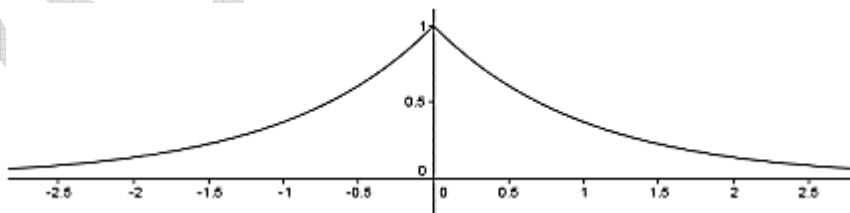
α) 6 γραμμάρια γιατί το σημείο $(0,6)$ ανήκει στη καμπύλη της εκθετικής απόσβεσης.

β) Η ημιζωή του ραδιενεργού υλικού είναι η τιμή του χρόνου t κατά την οποία η ποσότητα του υλικού μειώνεται στο ήμισυ της αρχικής, δηλαδή γίνεται 3 γραμμάρια.
 Επειδή το σημείο $(2,3)$ ανήκει στη καμπύλη, για $t = 2$ η ποσότητα του ραδιενεργού υλικού είναι 3 γραμμάρια.

γ) Το υψόμετρο της καμπύλης γίνεται μικρότερο του 1 στο χρονικό διάστημα $(5, 6)$, δηλαδή κατά τη διάρκεια της 6ης ημέρας. Άρα, κατά τη διάρκεια της 6ης ημέρας θα έχει απομείνει ποσότητα ραδιενεργού υλικού μικρότερη από 1gr.

Θέμα 4ο

15269. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διπλού τύπου.



α) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση αντιστοιχεί σε μια ακριβώς από τις παρακάτω συναρτήσεις να επιλέξετε ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f .

$$\text{A. } f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{B. } f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{Μονάδες 8})$$

β) Να βρείτε τη μονοτονία και την μέγιστη τιμή της. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του a , το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = a$, $a \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f με την παραβολή $y = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι το σημείο $(0, 1)$. (Μονάδες 5)

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από την $y = e^x$ για $x < 0$ και την $y = e^{-x}$ για $x \geq 0$, οπότε

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

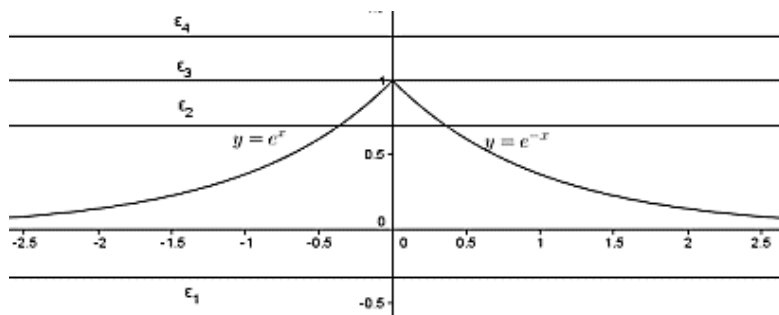
Παρατηρούμε ότι έχει μέγιστη τιμή το 1 για $x = 0$.

γ) Αν $a \leq 0$ (ευθεία ε_1) τότε η C_f δεν έχει κανένα κοινό σημείο με την ευθεία $y = a$.

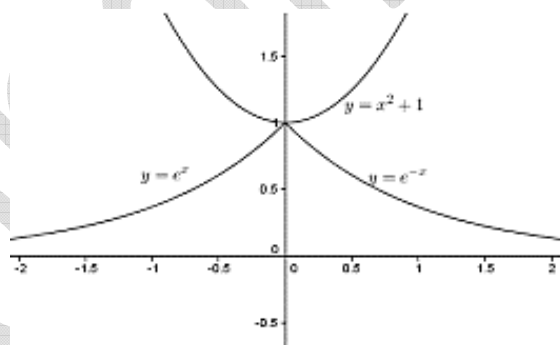
Αν $0 < a < 1$ (ευθεία ε_2) τότε η C_f και η ευθεία $y = a$ έχουν 2 κοινά σημεία.

Αν $a = 1$ (ευθεία ε_3) έχουν ένα κοινό σημείο το $(0, 1)$.

Τέλος αν $a > 1$ (ευθεία ε_4) δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.



δ) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 1$ η παραβολή έχει ελάχιστο το 1 για $x = 0$. Επειδή η f έχει μέγιστο το 1 για $x = 0$ το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την παραβολή είναι το $(0, 1)$.



20689. α) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x-2}{x+1} > 0$.

(Μονάδες 07)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha-2}{\alpha+1}\right)^x$, με $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι καλώς ορισμένη.

(Μονάδες 03)

ii. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα;

(Μονάδες 10)

iii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι σταθερή.

(Μονάδες 05)

Λύση

α) $\frac{x-2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 2$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x+1$	-	ο	+	+
$x-2$	-	-	ο	+
Γινόμενο	+	ο	-	ο

β) i. Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι καλώς ορισμένη όταν $\frac{\alpha-2}{\alpha+1} > 0 \Leftrightarrow \alpha < -1 \text{ ή } \alpha > 2$

ii. Η f είναι γνησίως φθίνουσα όταν $0 < \frac{\alpha-2}{\alpha+1} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha-2}{\alpha+1} > 0 \\ \frac{\alpha-2}{\alpha+1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < -1 \text{ ή } \alpha > 2 \\ \frac{\alpha-2}{\alpha+1} - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < -1 \text{ ή } \alpha > 2 \\ \frac{\alpha-2-\alpha-1}{\alpha+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha < -1 \text{ ή } \alpha > 2 \\ \frac{-3}{\alpha+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < -1 \text{ ή } \alpha > 2 \\ \alpha+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < -1 \text{ ή } \alpha > 2 \\ \alpha > -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha > 2.$$

iii. Η f είναι σταθερή όταν $\frac{\alpha-2}{\alpha+1} = 1 \Leftrightarrow \alpha-2 = \alpha+1 \Leftrightarrow -2 = 1$ αδύνατο. Άρα δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι σταθερή.

20854. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια. (Μονάδες 05)

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$ και να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 05)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f . (Μονάδες 10)

δ) Αν $g(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ τότε να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 05)

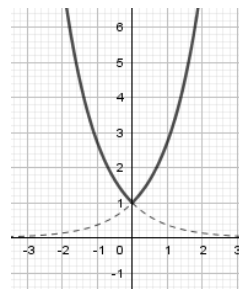
Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = e^{|-x|} = e^{|x|} = f(x)$, άρα η f είναι άρτια.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|x| \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$, άρα $e^{|x|} \geq e^0 \Leftrightarrow f(x) \geq 1 = f(0)$, άρα η f έχει ελάχιστο το 1 για $x=0$.

γ) Είναι $f(x) = e^{|x|} = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$. Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τα

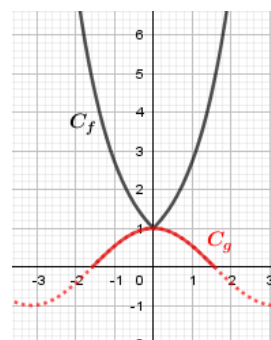
σημεία της $y = e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ για $x < 0$ και από τα σημεία της $y = e^x$ για $x \geq 0$



δ) Για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $0 \leq \sin x \leq 1$, άρα $g(x) \leq 1$ και επειδή $f(x) \geq 1$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = g(x)$ αληθεύει μόνο όταν

$$f(x) = 1 = g(x) \Leftrightarrow x = 0.$$



21471. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β . (Μονάδες 7)

$$\text{Αν } \alpha = 5 \text{ και } \beta = -7$$

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 4^x - 3$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$, οπότε:

$$\begin{cases} f(1)=3 \\ f(2)=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 3 \\ 4\alpha + \beta = 13 \end{cases} \xrightarrow{(-)} \begin{cases} 2\alpha + \beta = 3 \\ 4\alpha - 2\alpha + \beta - \beta = 13 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 3 \\ 2\alpha = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 + \beta = 3 \\ \alpha = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -7 \\ \alpha = 5 \end{cases}.$$

β) Για $\alpha = 5$ και $\beta = -7$ είναι $f(x) = 5 \cdot 2^x - 7$ και για $x = 0$ είναι $f(0) = 5 - 7 = -2$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -2)$.

γ) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $2^{x_1} < 2^{x_2} \Leftrightarrow 5 \cdot 2^{x_1} < 5 \cdot 2^{x_2} \Leftrightarrow 5 \cdot 2^{x_1} - 7 < 5 \cdot 2^{x_2} - 7 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

$$\delta) f(x) > 4^x - 3 \Leftrightarrow 5 \cdot 2^x - 7 > 4^x - 3 \Leftrightarrow 0 > (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4$$

Θέτουμε $2^x = y > 0$ και η εξίσωση γίνεται $y^2 - 5y + 4 < 0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με $\Delta = 9$ και ρίζες $y = 1$ ή $y = 4$, άρα

$$y^2 - 5y + 4 < 0 \Leftrightarrow 1 < y < 4 \Leftrightarrow 1 < 2^x < 4 \Leftrightarrow 2^0 < 2^x < 2^2 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

21448. Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου τη χρονική στιγμή $t = 0$, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του $f(t)$ (σε mg) να μειώνεται μετά από t ημέρες σύμφωνα με τη συνάρτηση $f(t) = q_0 \cdot \alpha^t$, $t \geq 0$, όπου οι αριθμοί α, q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0 < \alpha < 1$. (Μονάδες 6)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f , εκφράζοντας τις τιμές $f(t)$ ως συνάρτηση της αρχικής τιμής q_0 . (Μονάδες 4)

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$					

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha = \frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της 4ης ημέρας είναι 25 mg.

i. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής. (Μονάδες 5)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 6]$. (Μονάδες 5)

Λύση

α) Στο πλαίσιο του προβλήματος η σταθερά q_0 παριστάνει τη δόση του φαρμάκου που πήρε ο ασθενής (την ποσότητα του φαρμάκου στον οργανισμό τη χρονική στιγμή $t = 0$).

Η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό του ασθενούς μειώνεται όσο περνούν οι ημέρες, δηλαδή η εκθετική συνάρτηση $f(t) = q_0 \cdot \alpha^t$, $t \geq 0$ είναι φθίνουσα, το οποίο συμβαίνει όταν $0 < \alpha < 1$.

β) i. Μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί, δηλαδή $f(1) = \frac{1}{2} q_0 \Leftrightarrow q_0 \cdot \alpha = \frac{1}{2} q_0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$.

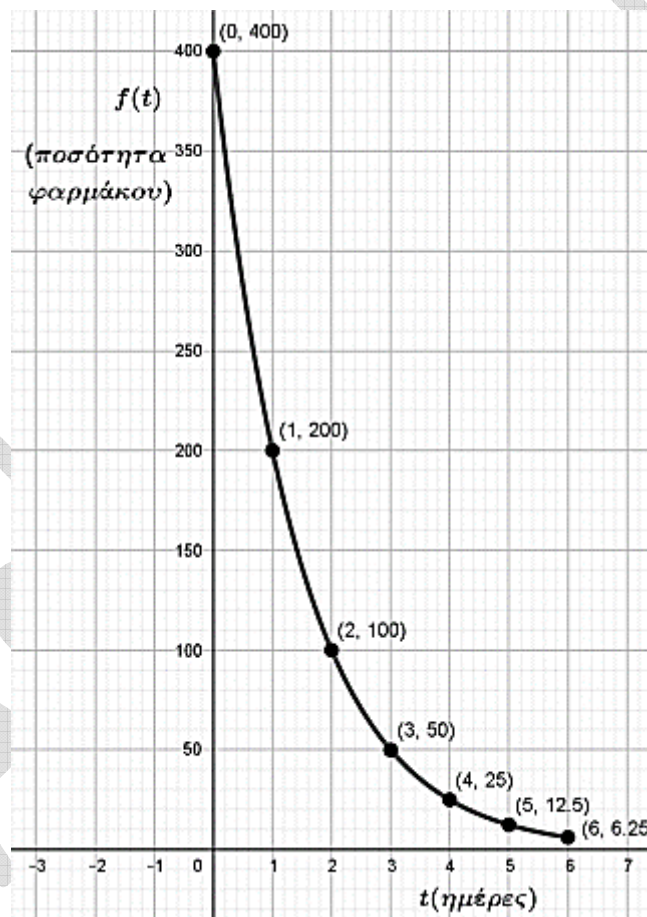
ii. $f(2) = q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{q_0}{4}$, $f(2) = q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{q_0}{8}$, $f(4) = q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{q_0}{16}$, $f(5) = q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{q_0}{32}$ και
 $f(6) = q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{q_0}{64}$.

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$	$\frac{q_0}{4}$	$\frac{q_0}{8}$	$\frac{q_0}{16}$	$\frac{q_0}{32}$	$\frac{q_0}{64}$

γ) i. Έχουμε $f(4) = 25 \Leftrightarrow \frac{q_0}{16} = 25 \Leftrightarrow q_0 = 400\text{mg}$

ii. Με τη βοήθεια του βii) ερωτήματος έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών για τη συνάρτηση

$f(t) = 400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ στο διάστημα $[0, 6]$:



21444. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = 4^x$ και $g(x) = 2^x - \frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο A , του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , με εξαίρεση το σημείο A . (Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . Έχουμε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4^x = 2^x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2 \cdot 2^x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot 2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Leftrightarrow x = -1$$

Είναι $f(-1) = 4^{-1} = \frac{1}{4}$, οπότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το $A\left(-1, \frac{1}{4}\right)$

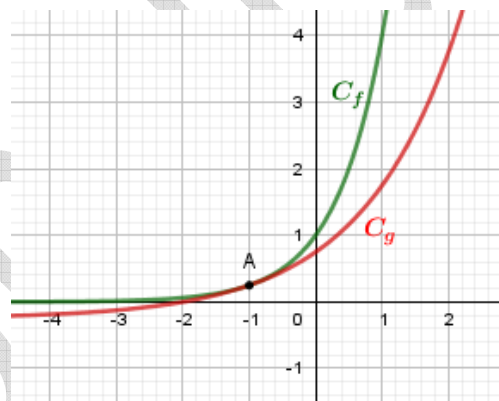
β) Είναι $f(x) > g(x) \Leftrightarrow 4^x > 2^x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 1 > 0 \Leftrightarrow (2 \cdot 2^x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow$

$2 \cdot 2^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 2^x \neq \frac{1}{2} = 2^{-1} \Leftrightarrow x \neq -1$, άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , με εξαίρεση το σημείο A .

γ)

x	-2	-1	0	1
$f(x) = 4^x$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4

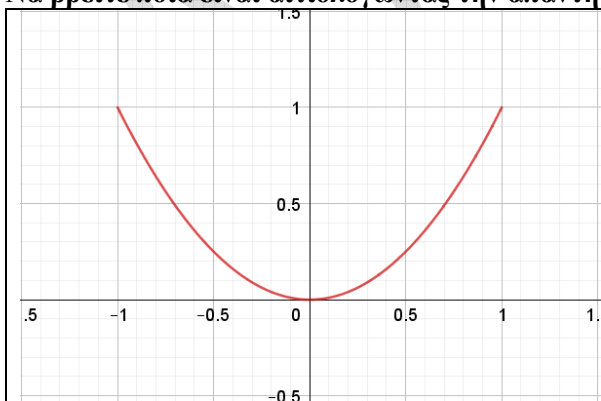
x	-2	-1	0	1
$g(x) = 2^x - \frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{4}$



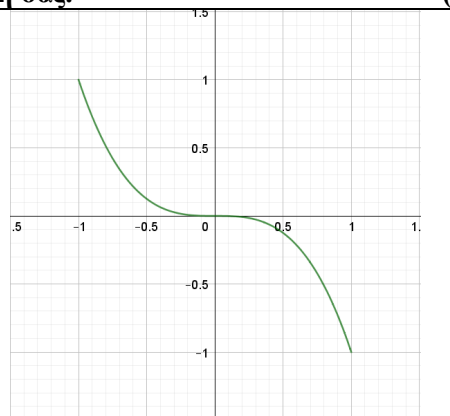
Θέμα 3ο

15023. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-1, 1]$, η οποία είναι περιττή και γνησίως φθίνουσα.

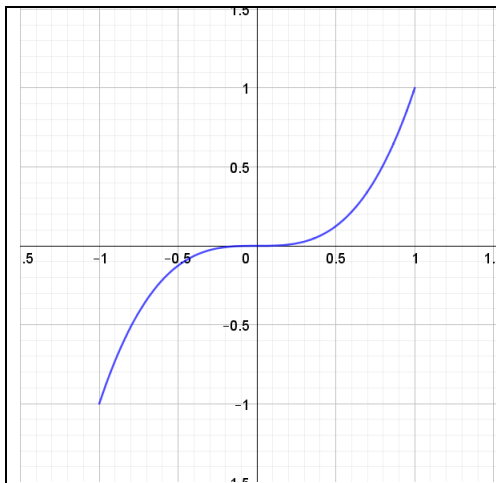
α) Από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις μόνο μία μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της f . Να βρείτε ποια είναι αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



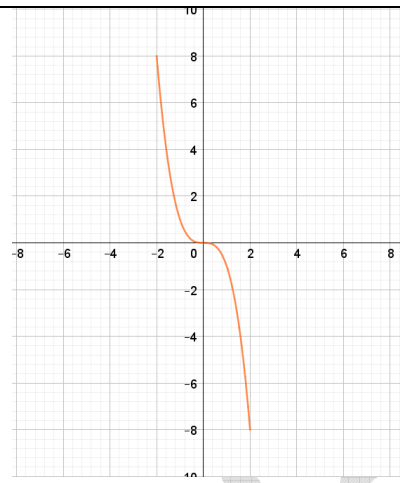
Σχήμα α



Σχήμα β



Σχήμα γ



Σχήμα δ

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 2$. (Μονάδες 5)

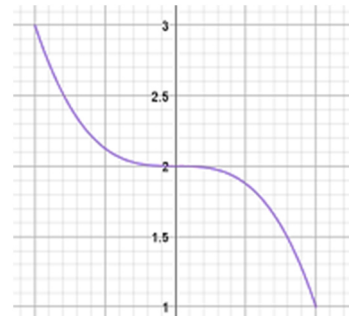
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = f(x - 1)$. (Μονάδες 5)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $s(x) = e^x - 1$ και να αποδείξετε (αλγεβρικά ή γραφικά) ότι η εξίσωση $s(x) = f(x)$ έχει μοναδική λύση τη $x = 0$. (Μονάδες 7)

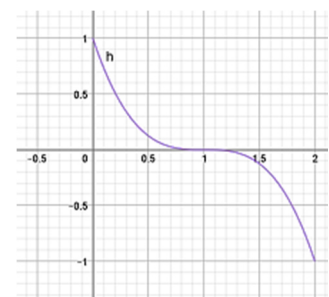
Λύση

α) Στο σχήμα α η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον y' οπότε είναι άρτια και όχι περιττή, οπότε δεν είναι. Στο σχήμα γ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα οπότε δεν είναι. Στο σχήμα δ η συνάρτηση είναι περιττή και γνησίως φθίνουσα, αλλά έχει πεδίο ορισμού το $[-2, 2]$ και όχι το $[-1, 1]$, οπότε δεν είναι. Συνεπώς σωστή απάντηση είναι το σχήμα β.

β) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά 2 μονάδες προς τα πάνω και φαίνεται στο διπλανό σχήμα

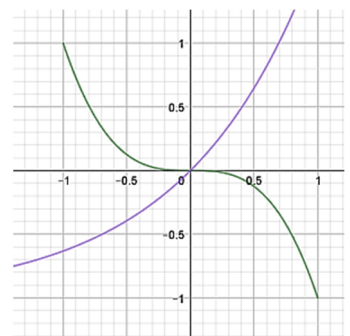


γ) Η γραφική παράσταση της h προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



δ) Η γραφική παράσταση της s προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y = e^x$ κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.

Σχεδιάζοντάς την στο ίδιο σχήμα με την f βλέπουμε ότι έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το $(0, 0)$, άρα $s(x) = f(x) \Leftrightarrow x = 0$



Λογάριθμοι

Θέμα 2ο

15687. Δίνεται η παράσταση $A = \log_4 3 + \log_4 \alpha - \log_4 \beta$ όπου α, β θετικοί αριθμοί.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \log_4 \frac{3\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 13)

β) Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $3\alpha = 16\beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης A . (Μονάδες 12)

Λύση

$$\alpha) A = \log_4 3 + \log_4 \alpha - \log_4 \beta = A = \log_4 (3\alpha) - \log_4 \beta = \log_4 \frac{3\alpha}{\beta}$$

$$\beta) A = \log_4 \frac{3\alpha}{\beta} = \log_4 \frac{16\beta}{\beta} = \log_4 4^2 = 2$$

15816. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2, \beta = \ln 4, \gamma = \ln 8$.

α) Να αποδείξετε ότι $2\beta = \alpha + \gamma$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\beta + \gamma = 5\alpha$. (Μονάδες 13)

Λύση

$$\alpha) 2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow 2\ln 4 = \ln 2 + \ln 8 \Leftrightarrow \ln 4^2 = \ln(2 \cdot 8) \Leftrightarrow \ln 16 = \ln 16 \text{ ισχύει}$$

$$\beta) \beta + \gamma = \ln 4 + \ln 8 = \ln(4 \cdot 8) = \ln 32 = \ln 2^5 = 5\ln 2 = 5\alpha$$

15817. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2$ και $\beta = \ln 3$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0 < \alpha < \beta$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\beta - \alpha < 1$. (Μονάδες 13)

Δίνεται $e \approx 2.71$.

Λύση

α) Είναι $2 < 3$ και η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε $f(2) < f(3) \Leftrightarrow \ln 2 < \ln 3 \Leftrightarrow \alpha < \beta$

$$\beta) \beta - \alpha < 1 \Leftrightarrow \ln 3 - \ln 2 < 1 \Leftrightarrow \ln \frac{3}{2} < \ln e \Leftrightarrow \frac{3}{2} < e \text{ ισχύει}$$

20663. Δίνεται το πολώνυμο $P(x) = (\log_2 8) \cdot x^3 + (4\log_2 \sqrt{2}) \cdot x^2 - (4\log_2 1) \cdot x + 1990$.

α) Να αποδείξετε ότι $\log_2 8 + 2\log_2 \sqrt{2} - \log_2 1 = 4$. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$. (Μονάδες 10)

Λύση

$$\alpha) \log_2 8 + 2\log_2 \sqrt{2} - \log_2 1 = \log_2 8 + \log_2 (\sqrt{2})^2 - 0 = \log_2 (8 \cdot 2) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$$

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$, είναι

$$v = P(2) = P(x) = 8\log_2 8 + 16\log_2 \sqrt{2} + 1990 = 8(\log_2 8 + 2\log_2 \sqrt{2}) + 1990 \Leftrightarrow$$

$$v = 8 \cdot 4 + 1990 = 32 + 1990 = 2022$$

20710. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log 20$ και $\beta = \log 50$. Να αποδείξετε ότι

α) $\beta + \alpha = 3$. (Μονάδες 7)

β) $\ln(\beta + \alpha) > 1$. (Μονάδες 6)

γ) $10^\beta - 10^\alpha = 10 \cdot (\beta + \alpha)$. (Μονάδες 12)

Δίνεται ότι $e \approx 2,71$.

Λύση

α) $\beta + \alpha = \log 50 + \log 20 = \log(50 \cdot 20) = \log 1000 = \log 10^3 = 3$

β) $\beta + \alpha = 3 \Leftrightarrow \ln(\beta + \alpha) > \ln 3$ και $3 > e$ άρα $\ln 3 > \ln e = 1$, άρα $\ln(\beta + \alpha) > 1$.

γ) $10^\beta - 10^\alpha = 10^{\log 50} - 10^{\log 20} = 50 - 20 = 30 = 10 \cdot 3 = 10(\beta + \alpha)$

20711. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log 3$ και $\beta = \log 4$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0 < \alpha < \beta$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι : i. $\beta + \alpha > 1$. (Μονάδες 6) ii. $\ln \frac{\alpha}{\beta} < 0$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \log x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, έχουμε:

$3 < 4 \Leftrightarrow \log 3 < \log 4 \Leftrightarrow \alpha < \beta$

β) i. $\beta + \alpha = \log 3 + \log 4 = \log 12 > \log 10 = 1$.

ii. Είναι $\log 3 < \log 4 \Leftrightarrow \frac{\log 3}{\log 4} < 1 \Leftrightarrow \log \frac{\alpha}{\beta} < \log 1 = 0$

21676. Αν είναι γνωστό ότι $\ln 4 = 1,386$ και $\ln 5 = 1,609$ τότε:

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \ln \frac{e}{5} - \ln \frac{4}{e}$. (Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια της ισότητας $80 = 5 \cdot 4^2$ να αποδείξετε ότι $\ln 80 = 4,381$. (Μονάδες 13)

Λύση

α) $A = \ln \frac{e}{5} - \ln \frac{4}{e} = \ln e - \ln 5 - \ln 4 + \ln e = 1 - 1,609 - 1,386 + 1 = 2 - 2,995 = -0,995$

β) $\ln 80 = \ln(5 \cdot 4^2) = \ln 5 + \ln 4^2 = \ln 5 + 2 \ln 4 = 1,609 + 2 \cdot 1,386 = 4,381$

21858. Δίνεται η παράσταση $A = 2 \log 5 + 2 \log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 2$. (Μονάδες 12)

β) Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία ισχύει ότι $e^\lambda = A$. (Μονάδες 6)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να αποδείξετε ότι $\ln \lambda < 0$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) $A = 2 \log 5 + 2 \log 2 = 2(\log 5 + \log 2) = 2 \log 10 = 2 \cdot 1 = 2$

β) $e^\lambda = A \Leftrightarrow e^\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = \ln 2$.

γ) Είναι $2 < e \Leftrightarrow \ln 2 < \ln e \Leftrightarrow \ln 2 < 1 \Leftrightarrow \lambda < 1 \Leftrightarrow \ln \lambda < \ln 1 \Leftrightarrow \ln \lambda < 0$

Θέμα 4ο

15251. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + (\alpha - 2)x - 6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x - 1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α .

(Μονάδες 6)

β) Για $\alpha = 15$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 3x + 2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 6)

ii. αν $P(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 7)

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2) < 0$.

(Μονάδες 6)

Λύση

α) Είναι $P(1) = 0 \Leftrightarrow 2 - 9 + \alpha - 2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 15$

β) i. Είναι $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6$ και

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

Κάνοντας τη διαίρεση του $P(x)$ με το $x - 1$ προκύπτει ότι $P(x) = (x - 1)(2x^2 - 7x + 6)$.

Το τριώνυμο $2x^2 - 7x + 6$ έχει $\Delta = 1$ και ρίζες $x = 2$, $x = \frac{3}{2}$, οπότε

$$2x^2 - 7x + 6 = 2\left(x - 2\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = (x - 2)(2x - 3), \text{ άρα}$$

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(2x - 3) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 3)$$

2	-9	13	-6	$\rho=1$
2	2	-7	6	
2	-7	6	0	

ii. $P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$

x	$-\infty$	1	$3/2$	2	$+\infty$		
$x^2 - 3x + 2$	+	o	-	-	o	+	
$2x - 3$	-	-	o	+	+		
$P(x)$	-	o	+	o	-	o	+

iii. Είναι $\ln 2 < \ln e = 1$ και $P(x) < 0$ για $x < 1$,

άρα $P(\ln 2) < 0$.

15474. Δίνεται η πολωνυμική συνάρτηση $P(x) = e^{\ln e} x^3 + 4x^2 \ln \sqrt{e} + 2$.

α) Να δείξετε ότι $P(x) = ex^3 + 2x^2 + 2$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία $\varepsilon: y = ex + 4$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y = ex + 4$.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $P(e) - e^2 - 4$.

(Μονάδες 4)

Λύση

$$\alpha) P(x) = e^{\ln e} x^3 + 4x^2 \ln \sqrt{e} + 2 = ex^3 + 4x^2 \ln e^{\frac{1}{2}} + 2 = ex^3 + 4x^2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = ex^3 + 2x^2 + 2$$

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολωνυμικής συνάρτησης $P(x)$

με την ευθεία $\varepsilon: y = ex + 4$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$P(x) = ex + 4 \Leftrightarrow ex^3 + 2x^2 + 2 = ex + 4 \Leftrightarrow ex^3 - ex + 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$ex(x^2 - 1) + 2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(ex + 2) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1) \text{ ή}$$

$$\left(ex + 2 = 0 \Leftrightarrow ex = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{e} \right)$$

x	$-\infty$	-1	$-e/2$	1	$+\infty$		
x^2-1	+	o	-	-	o	+	
$ex+2$	-		-	o	+	+	
$P(x)$	-	o	+	o	-	o	+

γ) Για να βρούμε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής

συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y = ex + 4$ θα λύσουμε την ανίσωση:

$$P(x) > ex + 4 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(ex + 2) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-1, -\frac{2}{e}\right) \cup (1, +\infty)$$

δ) Παρατηρούμε ότι το $P(e) - e^2 - 4$ είναι η τιμή του $P(x) - (ex + 4)$ για $x = e$, οπότε με βάση το προηγούμενο σκέλος είναι $P(e) - e^2 - 4 > 0$ αφού $e > 1$.

15591. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha + 5}\right)^x$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι εκθετική και ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 8)

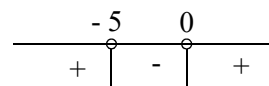
γ) Για τη μεγαλύτερη τιμή του $\alpha \in \mathbb{Z}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα εκθετική με βάση ακέραιο αριθμό, να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f(x+1) = 14$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι εκθετική και ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς όταν $\frac{\alpha}{\alpha + 5} > 0$ και $\frac{\alpha}{\alpha + 5} \neq 1$.

Είναι $\frac{\alpha}{\alpha + 5} \neq 1 \Leftrightarrow \alpha \neq \alpha + 5$ ισχύει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και

$$\frac{\alpha}{\alpha + 5} > 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha + 5) > 0 \Leftrightarrow \alpha < -5 \text{ ή } \alpha > 0.$$



β) Η f είναι γνησίως αύξουσα όταν

$$\frac{\alpha}{\alpha + 5} > 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha + 5} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha - \alpha - 5}{\alpha + 5} > 0 \Leftrightarrow \frac{-5}{\alpha + 5} > 0 \Leftrightarrow \alpha + 5 < 0 \Leftrightarrow \alpha < -5$$

γ) Η μεγαλύτερη ακέραια τιμή του α για την οποία η f είναι γνησίως αύξουσα είναι η -6 . Τότε

$$f(x) = \left(\frac{-6}{-6+5}\right)^x = 6^x.$$

$$f(x) + f(x+1) = 14 \Leftrightarrow 6^x + 6^{x+1} = 14 \Leftrightarrow 6^x + 6 \cdot 6^x = 14 \Leftrightarrow 7 \cdot 6^x = 14 \Leftrightarrow 6^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_6 2.$$

15822. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ και $\alpha \neq 0$ το οποίο το οποίο έχει 3 ακέραιες ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

α) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 0$. (Μονάδες 6)

γ) Με $\alpha = -1$ και $\beta = 0$,

i. να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

(Μονάδες 6)

ii. να αποδείξετε ότι $P(\log \sqrt{10}) > 0$.

(Μονάδες 6)

Λύση

α) Είναι $P(x) = ax^3 + bx^2 + x = x(ax^2 + bx + 1)$, οπότε μία ακέραια ρίζα του πολωνύμου είναι η $x = 0$ και οι άλλες δύο θα είναι ρίζες του τριωνύμου $ax^2 + bx + 1$ που επειδή έχει ακέραιους συντελεστές, θα πρέπει οι δύο αυτές ακέραιες ρίζες να είναι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή του 1. Δεδομένου ότι οι μόνοι διαιρέτες του 1 είναι το 1 και το -1, συμπεραίνουμε ότι οι άλλες δύο ακέραιες ρίζες είναι το 1 και το -1. Άρα οι ακέραιες ρίζες του πολωνύμου είναι το 0, το 1 και το -1.

β) Είναι $P(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = -1 - a$ (1).

$P(-1) = 0 \Leftrightarrow -a + b - 1 = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -a - 1 - a - 1 = 0 \Leftrightarrow -2a = 2 \Leftrightarrow a = -1$ και από τη σχέση (1) προκύπτει $b = 0$.

γ) i. Είναι $P(x) > 0 \Leftrightarrow -x^3 + x > 0 \Leftrightarrow x(1 - x^2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$1 - x^2$	-	0	+	0	-
x	-	-	0	+	+
P(x)	+	0	-	0	-

ii. $\log \sqrt{10} = \log 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

Επειδή $\frac{1}{2} \in (0, 1)$ είναι $P(\log \sqrt{10}) = P\left(\frac{1}{2}\right) > 0$

15823. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2 - 1$ δίνει πηλίκο $3x - 2$ και υπόλοιπο 1.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 1$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $P(\log 5) \neq 1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Είναι $P(x) = (4x^2 - 1)(3x - 2) + 1$

$P(x) = 1 \Leftrightarrow (4x^2 - 1)(3x - 2) + 1 = 1 \Leftrightarrow (4x^2 - 1)(3x - 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\left(4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}\right) \text{ ή } \left(3x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}\right)$

β) Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $P(x) = 1$ έχει λύσεις τις $x = \frac{1}{2}$ ή $x = -\frac{1}{2}$ ή $x = \frac{2}{3}$.

Είναι $\log 5 \neq \frac{1}{2}$ αφού $5 \neq 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$, $\log 5 \neq -\frac{1}{2}$ αφού $5 \neq 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ και

$\log 5 \neq \frac{2}{3}$ αφού $5 \neq 10^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{10^2} = \sqrt[3]{100}$, άρα $P(\log 5) \neq 1$.

γ) Είναι $P(-1) = (4(-1)^2 - 1)(3(-1) - 2) + 1 = 3 \cdot (-5) + 1 = -14 < 0$ και

$P(0) = (4 \cdot 0^2 - 1)(3 \cdot 0 - 2) + 12 + 1 = 3 > 0$.

Αφού οι τιμές $P(-1)$ και $P(0)$ είναι ετερόσημες, η εξίσωση $P(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

18110. α) i. Να λύσετε την εξίσωση $x(e^x - 1) = 0$. (Μονάδες 03)

ii. Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου $x(e^x - 1)$.

(Μονάδες 06)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 05)

ii. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(\ln 2)$ και $f(-\ln 2)$.

(Μονάδες 06)

iii. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παρακάτω ισχυρισμός:

« η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$ είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της ».

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 05)

Λύση

α) i. $x(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $(e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0)$,

ii. Αν $x > 0$, τότε $e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$, οπότε $x(e^x - 1) > 0$.

Αν $x < 0$, τότε $e^x < 1 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0$, οπότε $x(e^x - 1) > 0$.

β) i. Η f ορίζεται όταν $x(e^x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, άρα $A_f = \mathbb{R}$.

ii. $f(0) = \sqrt{0} = 0$, $f(\ln 2) = \sqrt{\ln 2(e^{\ln 2} - 1)} = \sqrt{\ln 2(2 - 1)} = \sqrt{\ln 2}$ και

$$f(-\ln 2) = \sqrt{-\ln 2(e^{-\ln 2} - 1)} = \sqrt{-\ln 2(e^{\ln 2^{-1}} - 1)} = \sqrt{-\ln 2\left(\frac{1}{2} - 1\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\ln 2}$$

iii. Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε επειδή $-\ln 2 < 0$ θα είναι

$$f(-\ln 2) < f(0) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}\ln 2} < 0 \text{ άτοπο.}$$

Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε επειδή $-\ln 2 < \ln 2$ θα είναι

$$f(-\ln 2) > f(\ln 2) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}\ln 2} > \sqrt{\ln 2} \text{ άτοπο. Επομένως η } f \text{ δεν είναι γνησίως μονότονη.}$$

18235. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική

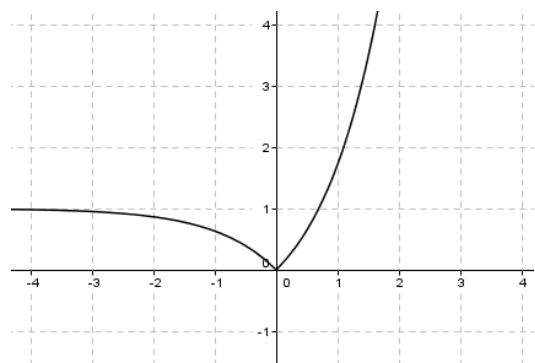
παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = |e^x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να περιγράψετε πως αυτή μπορεί να προκύψει από τη γνωστή γραφική παράσταση της $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να συμπεράνετε τη μονοτονία και την ελάχιστη τιμή της f .

(Μονάδες 6)



γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του a , το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής της παράστασης C_f με την ευθεία $y = a$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Για κάθε $x < 0$ $e^x < e^0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0$, άρα $f(x) = -e^x + 1$.

Για κάθε $x \geq 0$ είναι $e^x \geq e^0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0$, άρα $f(x) = e^x - 1$. Επομένως $f(x) = \begin{cases} -e^x + 1, & x < 0 \\ e^x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

β) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και έχει ελάχιστο το 0 για $x = 0$.

γ) Αν $x < 0$ είναι $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -e^x + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$ δεκτή.

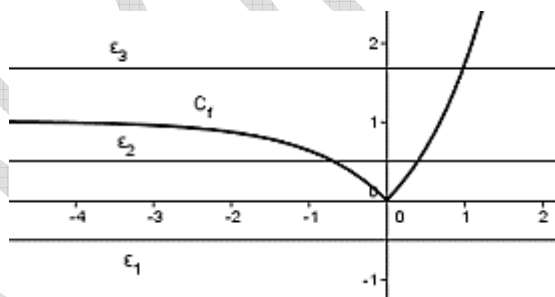
Αν $x \geq 0$ είναι $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x - 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \ln \frac{3}{2}$ δεκτή.

δ) Αν $a < 0$, (ευθεία ϵ_1) τότε η C_f και η ευθεία $y = a$ δεν έχουν κοινό σημείο.

• Αν $a = 0$, τότε η C_f και η ευθεία $y = 0$ (άξονας xx') έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

• Αν $0 < a < 1$, (ευθεία ϵ_2) τότε η C_f και η ευθεία $y = a$ έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία.

• Αν $a \geq 1$, (ευθεία ϵ_3) τότε η C_f και η ευθεία $y = a$ έχουν ένα κοινό σημείο.



18429. Η μονάδα μέτρησης της έντασης του ήχου είναι το ένα Watt ανά τετραγωνικό μέτρο ($1 \text{ w} / \text{m}^2$). Στο ανθρώπινο αυτί, η ελάχιστη ένταση που γίνεται αντιληπτή είναι $10^{-12} \text{ w} / \text{m}^2$. Για να μετρήσουμε την στάθμη της έντασης ενός ήχου, χρησιμοποιούμε την κλίμακα Decibel (Db). Το επίπεδο της στάθμης σε Db δίνεται από τη σχέση $D = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ όπου I_0 η ελάχιστη αντιληπτή ένταση και I η ένταση του ήχου.

α) Να βρείτε το επίπεδο των Db που παράγει ένα μαχητικό αεροσκάφος, αν γνωρίζουμε ότι η ένταση του ήχου του είναι $100 \text{ w} / \text{m}^2$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι μια αύξηση του επιπέδου στάθμης οποιουδήποτε ήχου κατά 20 Db αντιστοιχεί σε ήχο έντασης 100 φορές μεγαλύτερης.

(Μονάδες 10)

γ) Το όριο πόνου του ανθρώπινου αυτιού λόγω έντασης ήχου είναι 120 Db. Η έκθεση σε ήχους πάνω από 120 Db μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα ακοής ή κώφωση. Ποια είναι η αντίστοιχη ένταση ήχου στο όριο του πόνου για τον άνθρωπο;

(Μονάδες 7)

Λύση

$$\alpha) D = 10 \cdot \log\left(\frac{100}{10^{-12}}\right) = 10 \log(10^2 \cdot 10^{12}) = 10 \log(10^{14}) = 10 \cdot 14 = 140 \text{ Db}$$

$$\beta) D_2 - D_1 = 20 \Leftrightarrow 10 \cdot \log\left(\frac{I_2}{10^{-12}}\right) - 10 \cdot \log\left(\frac{I_1}{10^{-12}}\right) = 20 \Leftrightarrow \log\left(\frac{I_2}{10^{-12}}\right) - \log\left(\frac{I_1}{10^{-12}}\right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\log \left(\frac{\frac{I_2}{10^{-12}}}{\frac{I_1}{10^{-12}}} \right) = 2 \Leftrightarrow \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right) = 2 \Leftrightarrow \frac{I_2}{I_1} = 10^2 \Leftrightarrow I_2 = 100I_1$$

$$\gamma) 120 = 10 \cdot \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) \Leftrightarrow 12 = \log(I \cdot 10^{12}) \Leftrightarrow 10^{12} = 10^{12} I \Leftrightarrow I = 1 \text{ W} / \text{m}^2.$$

18434. Ο Νόμος των Bouguert-Lambert στη φωτομετρία, λέει ότι η ένταση I μιας ακτινοβολίας (ηλιακό φως, ακτίνες X, κ.λπ.) που εισχωρεί κατακόρυφα σε ένα διαφανές μέσο (νερό λιμνών, θαλάσσης, γυαλί, κ.λπ.) μειώνεται εκθετικά, απορροφούμενη από το μέσο, συναρτήσει του βάθους (πάχους) h του μέσου, σύμφωνα με τη συνάρτηση $I = I_0 \cdot e^{-\lambda h}$, όπου $\lambda > 0$ σταθερά και I_0 η αρχική ένταση.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει κάποιο βάθος h στο οποίο η ένταση της ακτινοβολίας να είναι μηδέν. (Μονάδες 3)

β) Γνωρίζουμε ότι για καθαρό νερό θαλάσσης είναι $\lambda = 1,4 \text{ m}^{-1}$ (το m παριστάνει μέτρα) και ότι μια συγκεκριμένη μορφή φυτικής ζωής δεν μπορεί να υπάρξει, όταν η ένταση του ηλιακού φωτός γίνει μικρότερη ή ίση από το $\frac{1}{4}$ της αρχικής έντασης. Να βρείτε για ποιες τιμές του βάθους h συμβαίνει αυτό. (Δίνεται ότι $\ln 2 = 0,7$) (Μονάδες 12)

γ) Σε κάποιο άλλο διαφανές μέσο, γνωρίζουμε ότι σε βάθος 10m η ένταση μιας ακτινοβολίας μειώνεται στο μισό της έντασης της αρχικής ακτινοβολίας. Να αποδείξετε ότι στην συγκεκριμένη κατάσταση ισχύει $I = I_0 \cdot 2^{-\frac{h}{10}}$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Επειδή $I_0 > 0$, $e^{-\lambda h} > 0$ για κάθε h , είναι $I > 0$, οπότε δεν υπάρχει κάποιο βάθος h στο οποίο η ένταση της ακτινοβολίας να είναι μηδέν.

$$\begin{aligned} \beta) \text{Θέλουμε } I &\leq \frac{1}{4} I_0 \Leftrightarrow I_0 \cdot e^{-\lambda h} \leq \frac{1}{4} I_0 \Leftrightarrow e^{-\lambda h} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\lambda h \leq \ln \frac{1}{4} \Leftrightarrow \\ -\lambda h &\leq -\ln 4 \Leftrightarrow h \geq \frac{\ln 4}{\lambda} = \frac{\ln 2^2}{1,4 \text{ m}^{-1}} = \frac{2 \cdot 0,7}{1,4} \text{ m} = 1 \text{ m} \end{aligned}$$

Άρα σε βάθος τουλάχιστον ενός μέτρου δεν υπάρχει η συγκεκριμένη μορφή φυτικής ζωής.

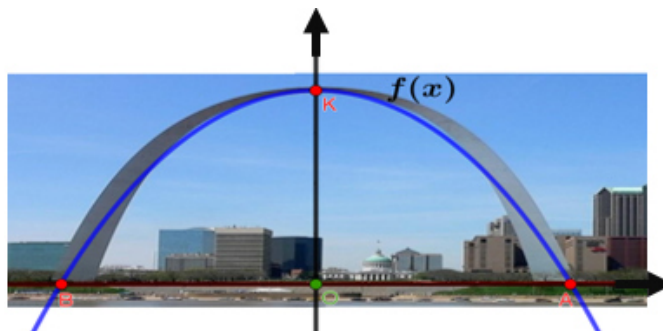
γ) Για το συγκεκριμένο μέσο έχουμε ότι για $h = 10 \text{ m}$ είναι

$$I = \frac{1}{2} I_0 \Leftrightarrow I_0 \cdot e^{-10\lambda} = \frac{1}{2} I_0 \Leftrightarrow e^{-10\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (e^{-\lambda})^{10} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-\lambda} = \sqrt[10]{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{10}}, \text{ άρα}$$

$$I = I_0 \cdot e^{-\lambda h} = I_0 \cdot (e^{-\lambda})^h = I_0 \cdot \left(2^{-\frac{1}{10}} \right)^h = I_0 \cdot 2^{-\frac{h}{10}}$$

18437. Ένα από τα επιβλητικότερα μνημεία του κόσμου είναι η αψίδα Gateway Arch στην πόλη Saint-Louis των Η.Π.Α. Θεωρώντας κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, όπως στο παρακάτω σχήμα, η πρόσοψη της αψίδας προσεγγίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = -192 \left(e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}} \right) + 576,$$



με $f(x) \geq 0$, όπου οι αριθμοί $x, f(x)$ μετρούνται σε μέτρα (m).

(Η γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης λέγεται αλυσοειδής καμπύλη).

α) Να αποδείξετε ότι το μέγιστο ύψος OK της αψίδας είναι 192 m. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου A στο οποίο η καμπύλη τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox. (Μονάδες 13)

Δίνεται ότι $\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cong 0,96$.

γ) Αν γνωρίζουμε ότι τα σημεία A και B έχουν αντίθετες τετμημένες, να αποδείξετε ότι το πλάτος AB της αψίδας είναι ίσο με το μέγιστο ύψος της OK. (Μονάδες 5)

Λύση

α) Το ύψος (OK) είναι η τεταγμένη του σημείου στο οποίο τέμνει τον άξονα y'y η γραφική παράσταση της συνάρτησης, δηλαδή ο αριθμός: $f(x) = -192(e^0 + e^0) + 576 = 576 - 384 = 192\text{m}$.

β) Οι τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ τέμνει τον άξονα

$x'x$, είναι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$. Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow -192 \left(e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}} \right) + 576 = 0 \Leftrightarrow$

$$-192 \left(e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}} \right) = -576 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}} = 3 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{100}} + \frac{1}{e^{\frac{x}{100}}} = 3 \quad (1)$$

Θέτουμε $e^{\frac{x}{100}} = \omega$. Είναι $x > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{100} > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{100}} > e^0 = 1 \Leftrightarrow \omega > 1$ και η (1) γίνεται

$$\omega + \frac{1}{\omega} = 3 \Leftrightarrow \omega^2 + 1 = 3\omega \Leftrightarrow \omega^2 - 3\omega + 1 = 0.$$

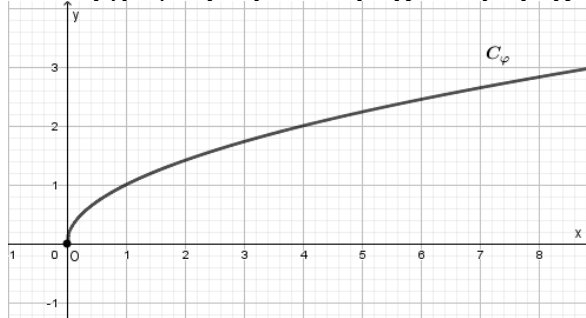
$$\Delta = 5, \omega = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1 \text{ δεκτή ή } \omega = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1 \text{ απορρίπτεται.}$$

$$\text{Άρα } e^{\frac{x}{100}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{100} = \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \Leftrightarrow x = 100 \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cong 100 \cdot 0,96 = 96\text{m}$$

γ) Το σημείο B έχει τετμημένη -96, άρα θα είναι $(AB) = 96 \cdot 2 = 192\text{ m} = (OK)$.

18863. Δίνονται οι συναρτήσεις: $\varphi(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$ και $g(x) = \frac{x+1}{3}$, $x \in \mathbb{R}$

- α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 08)
 β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ .



- i. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 02)
 ii. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, να σχεδιάσετε και την γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

(Μονάδες 04)

γ) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g . (Μονάδες 06)

δ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\ln 10 - 1} > \frac{1 + \ln 10}{3}$.

(Μονάδες 05)

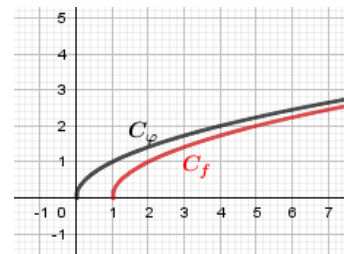
Λύση

α) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f , C_g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.

$$\text{Για κάθε } x \geq 1 \text{ είναι } f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \frac{x+1}{3} \Leftrightarrow x-1 = \frac{(x+1)^2}{9} \Leftrightarrow$$

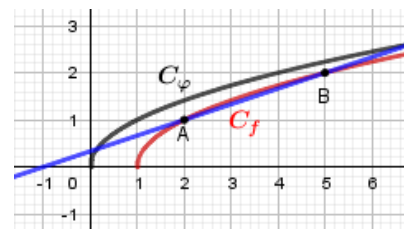
$$9x - 9 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 5$$

Είναι $f(2) = 1 = g(2)$, $f(5) = 2 = g(5)$, οπότε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι τα $(2,1)$ και $(5,2)$.



β) i. Επειδή $f(x) = \varphi(x-1)$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης κατά μία μονάδα προς τα δεξιά.

ii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ευθεία, οπότε για τον σχεδιασμό της χρειάζονται δύο σημεία της. Επιλέγουμε τα σημεία $A(2,1)$ και $B(5,2)$, τα οποία είναι και τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . Επομένως, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, είναι οι ακόλουθες:



γ) Από το παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g όταν $x \in (2,5)$.

δ) Είναι $e^2 < 10 < e^3 \Leftrightarrow 2 < \ln 10 < 3$, άρα $\ln 10 \in (2,5)$, οπότε $f(\ln 10) > g(\ln 10) \Leftrightarrow \sqrt{\ln 10 - 1} > \frac{1 + \ln 10}{3}$

20657. Σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, η θερμοκρασία θ , σε βαθμούς Κελσίου, ενός αντικειμένου μειώνεται με την πάροδο του χρόνου t , σε λεπτά, σύμφωνα με τη συνάρτηση $\theta(t) = T + (\theta_0 - T)e^{kt}$, όπου k μια σταθερά με $k < 0$, θ_0 η αρχική θερμοκρασία του αντικειμένου, ενώ T είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο τοποθετείται το αντικείμενο, με $\theta_0 > T$.

Ένα αντικείμενο έχει θερμανθεί στους 100°C και στη συνέχεια αφήνεται να κρυώσει σε ένα δωμάτιο με σταθερή θερμοκρασία 30°C . Γνωρίζουμε ότι 5 λεπτά μετά την τοποθέτησή του αντικειμένου στο δωμάτιο, η θερμοκρασία του αντικειμένου είναι 80°C .

α) Να αποδείξετε ότι $k = -0,0672$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\theta(t) = 30 + 70 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{t}{5}}$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε, με προσέγγιση εκατοστού, τη θερμοκρασία του αντικειμένου μετά από 1 ώρα και 40 λεπτά. (Μονάδες 8)

Δίνεται ότι $\ln\left(\frac{5}{7}\right) = -0,336$ (προσεγγιστικά) και $\left(\frac{5}{7}\right)^{10} \approx 0,034$.

Λύση

α) Η αρχική θερμοκρασία του σώματος πριν το αφήσουμε να κρυώσει είναι $\theta_0 = 100^\circ\text{C}$.

Επειδή 5 λεπτά μετά την τοποθέτησή του αντικειμένου στο δωμάτιο, η θερμοκρασία του αντικειμένου είναι 80°C , ισχύει ότι $\theta(5) = 80 \Leftrightarrow 80 = 30 + (100 - 30)e^{5k} \Leftrightarrow 50 = 70e^{5k} \Leftrightarrow$

$$e^{5k} = \frac{5}{7} \Leftrightarrow 5k = \ln \frac{5}{7} \Leftrightarrow 5k = -0,336 \Leftrightarrow k = -\frac{0,336}{5} = -0,0672$$

β) Από το προηγούμενο σκέλος είναι $e^{5k} = \frac{5}{7} \Leftrightarrow (e^k)^5 = \frac{5}{7} \Leftrightarrow e^k = \sqrt[5]{\frac{5}{7}} = \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{5}}$, οπότε

$$\theta(t) = T + (\theta_0 - T)(e^k)^t = 30 + (100 - 30)\left(\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^t = 30 + 70\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{t}{5}}.$$

γ) Επειδή $1\text{h}40\text{min} = 100\text{min}$, είναι $\theta(100) = 30 + 70\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{100}{5}} = 30 + 70\left(\frac{5}{7}\right)^{20} = 30 + 70\left(\left(\frac{5}{7}\right)^{10}\right)^2 \Leftrightarrow$

$$\theta(100) \approx 30 + 70(0,034)^2 = 30 + 70 \cdot 0,001156 = 30 + 0,08092 \approx 30,08^\circ\text{C}.$$

20669.α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$. (Μονάδες 03)

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 09)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(-x) + g(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 09)

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O . (Μονάδες 04)

Λύση

α) i. Για κάθε $x < 0$ είναι $\sqrt{x^2+1} - x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > x$ ισχύει γιατί $\sqrt{x^2+1} > 0$ και $x < 0$.

ii. 1ος τρόπος: Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ είναι $f(x) > 0$ από το προηγούμενο σκέλος.

Αν $x \geq 0$, τότε $f(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > x \Leftrightarrow x^2+1 > x^2$ ισχύει

2ος τρόπος: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$x^2+1 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > |x| \Leftrightarrow -\sqrt{x^2+1} < x < \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \sqrt{x^2+1} + x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

$$\text{β) i. } g(-x) + g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x) + \ln(\sqrt{x^2+1} + x) = \ln\left[(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)\right] \Leftrightarrow$$

$$g(-x) + g(x) = \ln\left[(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2\right] = \ln(x^2+1-x^2) = \ln 1 = 0$$

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R} = A_g$ είναι $-x \in \mathbb{R}$ και $g(-x) + g(x) = 0 \Leftrightarrow g(-x) = -g(x)$, άρα η g είναι περιττή και έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O .

20845. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = e^{kx}$, $k \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(1) - f(0) \geq f(0) - f(-1)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

(Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι αν $k > 0$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 07)

γ)

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει: $e^{2x} > 2e^x$.

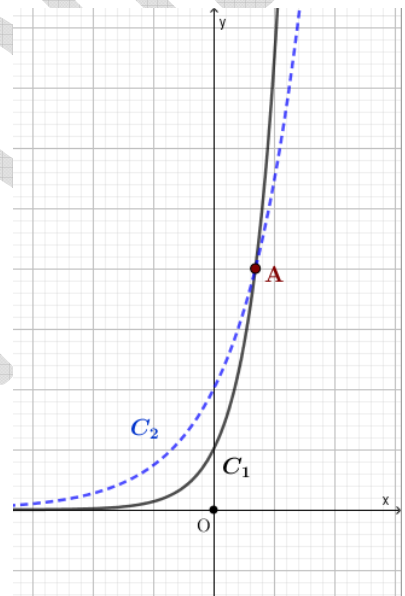
(Μονάδες 05)

ii. Χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα, να αντιστοιχίσετε τις C_1, C_2 με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$\varphi(x) = 2e^x \text{ και } k(x) = e^{2x}.$$

Ποιες είναι οι συντεταγμένες του κοινού τους σημείου A ;

(Μονάδες 05)



Λύση

$$\text{α) } f(1) - f(0) \geq f(0) - f(-1) \Leftrightarrow e^k - 1 \geq 1 - e^{-k} \Leftrightarrow e^k + \frac{1}{e^k} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(e^k)^2 + 1 - 2e^k \geq 0 \Leftrightarrow (e^k - 1)^2 \geq 0 \text{ ισχύει.}$$

$$\text{Η ισότητα ισχύει όταν } (e^k - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^k - 1 = 0 \Leftrightarrow e^k = 1 \Leftrightarrow k = 0$$

β) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $kx_1 < kx_2 \Leftrightarrow e^{kx_1} < e^{kx_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow \mathbb{R}$.

$$\text{γ) i. } e^{2x} > 2e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x > 0 \Leftrightarrow e^x(e^x - 2) > 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$$

ii. Επειδή για κάθε $x > \ln 2$ είναι $e^{2x} > 2e^x$ και στο σχήμα μετά το σημείο A που είναι το μοναδικό κοινό σημείο των δύο καμπυλών, η C_1 είναι πάνω από τη C_2 , η C_1 είναι η γραφική παράσταση της $k(x) = e^{2x}$ και η C_2 της $\varphi(x) = 2e^x$.

Η τετμημένη του A είναι $x = \ln 2$, τότε $\varphi(\ln 2) = 2e^x = 2e^{\ln 2} = 2 \cdot 2 = 4 = k(\ln 2)$, άρα $A(\ln 2, 4)$.

20847. Αν I είναι η ένταση του ήχου (σε W / m^2 - Watt ανά τετραγωνικό μέτρο), τότε η αντίστοιχη ηχοστάθμη D (σε ντεσιμπέλ) δίνεται από τον τύπο: $D = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I)$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα ηχοστάθμης.

Όριο ακοής	0 ντεσιμπέλ
Θρόισμα φύλλων	10 ντεσιμπέλ
Συνήθης ψίθυρος	20 ντεσιμπέλ
Αθόρυβο αυτοκίνητο	50 ντεσιμπέλ
Συνήθης ομιλία	65 ντεσιμπέλ
Κυκλοφοριακή κίνηση	80 ντεσιμπέλ
Αεροσυμπιεστής (κομπρεσέρ) σε απόσταση 3 μέτρων	90 ντεσιμπέλ
Όριο πόνου	120 ντεσιμπέλ
Αεριωθούμενο	140 ντεσιμπέλ

- α) Να βρείτε την ένταση του ήχου που δημιουργεί το θρόισμα των φύλλων. (Μονάδες 08)
 β) Αν η ένταση του ήχου σε μία ροκ συναυλία είναι $1 W/m^2$ να ελέγξετε αν η ηχοστάθμη στην οποία εκτίθεται το κοινό αγγίζει το όριο του πόνου. (Μονάδες 07)
 γ) Αν διπλασιάσουμε την ένταση του ενισχυτή ενός στερεοφωνικού συστήματος, τότε να υπολογίσετε πόσα ντεσιμπέλ θα αυξηθεί η στάθμη του εξερχόμενου ήχου. (Δίνεται ότι $\log 2 \approx 0,3$). (Μονάδες 10)

Λύση

α) Από τον πίνακα φαίνεται ότι $D = 10$. Άρα έχουμε:

$$10 = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I) \Leftrightarrow \log(10^{12} \cdot I) = 1 \Leftrightarrow 10^{12} \cdot I = 10 \Leftrightarrow I = \frac{10}{10^{12}} = 10^{-11}.$$

Επομένως, η ένταση του ήχου που δημιουργεί το θρόισμα των φύλλων είναι $10^{-11} W / m^2$.

β) Για $I = 1$ είναι $D = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot 1) = 10 \log 10^{12} = 10 \cdot 12 = 120$

Επομένως, η ηχοστάθμη είναι ντεσιμπέλ, δηλαδή αγγίζει το όριο του πόνου.

γ) Αν η αρχική ένταση I διπλασιαστεί και γίνει $2I$, τότε η αντίστοιχη ηχοστάθμη D' γίνεται:

$$D' = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot 2I) = 10(\log 2 + \log(10^{12} \cdot I)) = 10(\log 2 + \log(10^{12} \cdot I)) = 10 \log 2 + 10 \log(10^{12} \cdot I) \Leftrightarrow$$

$$D' = 10 \cdot 0,3 + D = 3 + D. \text{ Επομένως, η ένταση του ήχου θα αυξηθεί κατά 3 ντεσιμπέλ.}$$

Θέμα 3ο

15392. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$ και $g(x) = 5^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $H\left(0, \frac{1}{5}\right)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

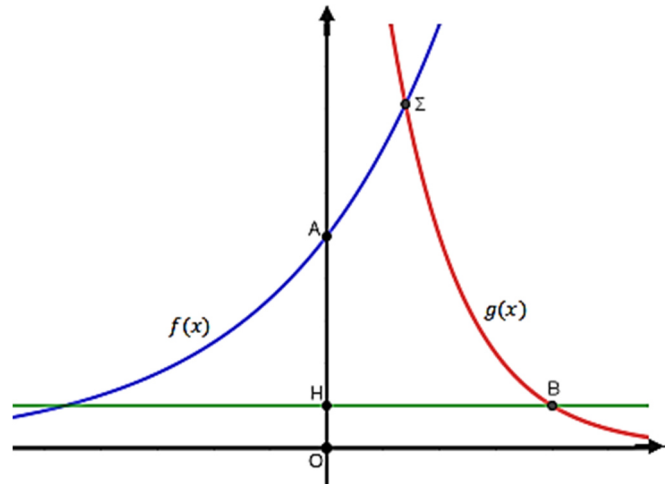
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Σ.

(Μονάδες 10)

γ) Αν είναι x_B, x_Σ οι τετμημένες των σημείων B, Σ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $x_B - x_\Sigma = \log 20$.

(Μονάδες 7)



Λύση

α) Είναι $f(0) = 2^0 = 1$, άρα $A(0,1)$.

Είναι $g(x) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5^{1-x} = 5^{-1} \Leftrightarrow 1-x = -1 \Leftrightarrow 2 = x$, άρα $B\left(2, \frac{1}{5}\right)$.

β) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2^x = 5^{1-x} \Leftrightarrow 2^x = \frac{5}{5^x} \Leftrightarrow 2^x \cdot 5^x = 5 \Leftrightarrow 10^x = 5 \Leftrightarrow x = \log 5$, άρα $x_\Sigma = \log 5$.

γ) $x_B - x_\Sigma = 2 - \log 5 = \log 10^2 - \log 5 = \log \frac{100}{5} = \log 20$

Λογαριθμική συνάρτηση

Θέμα 2ο

15093. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(10^x - 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0, +\infty)$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) + x = \log(10^{2x} - 10^x)$, $x > 0$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y = -x$. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $10^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 10^x > 1 \Leftrightarrow 10^x > 10^0 \Leftrightarrow x > 0$, οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν $f(x) > 0 \Leftrightarrow \log(10^x - 1) > 0 \Leftrightarrow \log(10^x - 1) > \log 1 \Leftrightarrow 10^x - 1 > 1 \Leftrightarrow 10^x > 2 \Leftrightarrow \log 10^x > \log 2 \Leftrightarrow x > \log 2$

γ) $\log(10^{2x} - 10^x) = \log[10^x(10^x - 1)] = \log 10^x + \log(10^x - 1) = x + f(x)$

δ) Η τετμημένη του κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f με την $y = -x$, είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = -x \Leftrightarrow f(x) + x = 0 \Leftrightarrow \log(10^{2x} - 10^x) = 0 \Leftrightarrow \log(10^{2x} - 10^x) = \log 1 \Leftrightarrow$

$$10^{2x} - 10^x = 1 \Leftrightarrow 10^{2x} - 10^x - 1 = 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $10^x = \omega > 0$ και η (1) γίνεται $\omega^2 - \omega - 1 = 0$.

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με $\Delta = 5$ και ρίζες $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ή $\omega = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ που απορρίπτεται.

$$\text{Άρα } 10^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \log 10^x = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \Leftrightarrow x = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Το ζητούμενο σημείο έχει συντεταγμένες $\left(\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), -\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$.

15267. Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = 1 + \log 3 - \log 6$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται $\log(x^2 + 1) = \log 5$. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\log(x^2 + 1) = 1 + \log 3 - \log 6 \Leftrightarrow \log(x^2 + 1) = \log 10 + \log 3 - \log 6 \Leftrightarrow \log(x^2 + 1) = \log 30 - \log 6 \Leftrightarrow$$

$$\log(x^2 + 1) = \log \frac{30}{6} \Leftrightarrow \log(x^2 + 1) = \log 5$$

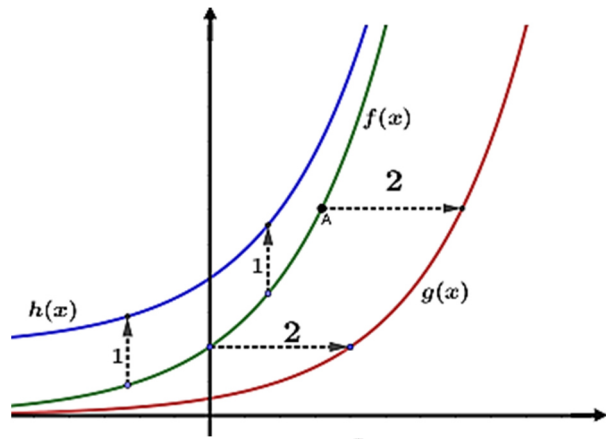
β) $\log(x^2 + 1) = \log 5 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

15393. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$ και δύο άλλων συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$, $x \in \mathbb{R}$ που προέκυψαν από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $f(x)$.

α) Να εξηγήσετε με τι είδους μετατοπίσεις προέκυψαν οι γραφικές παραστάσεις των $g(x)$ και $h(x)$ από την γραφική παράσταση της $f(x)$. (Μονάδες 8)

β) Να γράψετε τους τύπους των συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Α της γραφικής παράστασης της f του οποίου η τεταγμένη είναι 16. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ προέκυψε από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)$ κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά. Επίσης, η γραφική παράσταση της $h(x)$ προέκυψε από μία κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

β) Με βάση τα παραπάνω, έχουμε: $g(x) = f(x-2) = 2^{x-2}$, $h(x) = f(x) + 1 = 2^x + 1$.

γ) Είναι $f(x) = 16 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$, άρα $A(4,16)$.

15675. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$. (Μονάδες 15)

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$, άρα $A_f = (0, +\infty)$

β) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 1 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

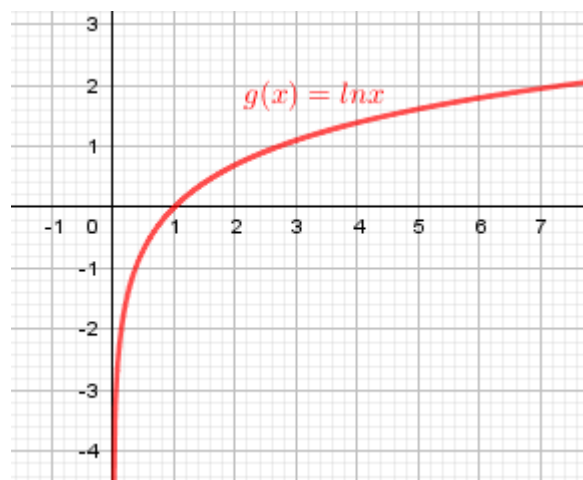
15808. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 8)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x$.

Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \ln(x+2)$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g . (Μονάδες 10)



Λύση

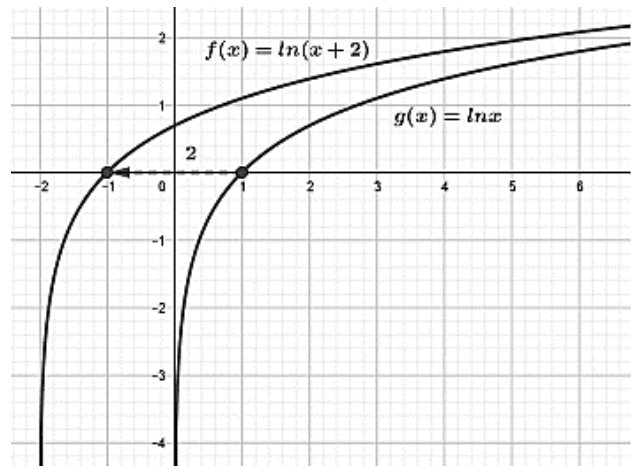
α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$,
 άρα $A_f = (-2, +\infty)$.

β) Είναι

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+2) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$$

Η C_f τέμνει τον x' στο σημείο $(-1, 0)$.

γ) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά δυο μονάδες αριστερά, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



17318. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(3)$.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $\ln 3 + 3 \ln 2 - f(3) = \ln 4$.

(Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 4$.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) $f(3) = \ln(3^2 - 2 \cdot 3 + 3) = \ln 6$

β) Να δείξετε ότι $\ln 3 + 3 \ln 2 - f(3) = \ln 3 + \ln 2^3 - \ln 6 = \ln(3 \cdot 8) - \ln 6 = \ln\left(\frac{24}{6}\right) = \ln 4$.

γ) $f(x) = \ln 4 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x + 3) = \ln 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 8$ και ρίζες $x = 1 - \sqrt{2}$ ή $x = 1 + \sqrt{2}$.

20635. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 7)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$, άρα $A_f = (-1, +\infty)$.

β) Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$ αν και μόνο αν $f(0) = 0 \Leftrightarrow \ln 1 = 0$ ισχύει

γ) $f(x) = 2 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 2 \Leftrightarrow x+1 = e^2 \Leftrightarrow x = e^2 - 1$ δεκτή.

20692. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log x$, $x > 0$.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(100)$, $f(\sqrt{10})$.

(Μονάδες 12)

β) Για $x > 1$, να επιλύσετε την εξίσωση $f(x+1) + f(x-1) = \log 10 - \log 5$.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) $f(100) = \log 100 = \log 10^2 = 2$, $f(\sqrt{10}) = \log \sqrt{10} = \log 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

$$\beta) f(x+1) + f(x-1) = \log 10 - \log 5 \Leftrightarrow \log(x+1) + \log(x-1) = \log \frac{10}{5} \Leftrightarrow$$

$$\log[(x+1)(x-1)] = \log 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 3 \stackrel{x>1}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{3}$$

20851. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = 2\log 6 - \log 12$ και $B = \log 5 + \log 2$

α) Να αποδείξετε ότι $A = \log 3$ και $B = 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $A < B$.

(Μονάδες 05)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\log x < 1$.

(Μονάδες 08)

Λύση

$$\alpha) A = 2\log 6 - \log 12 = \log 6^2 - \log 12 = \log \frac{36}{12} = \log 3, \quad B = \log 5 + \log 2 = \log 10 = 1$$

β) Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \log x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και $3 < 10$, είναι $\log 3 < \log 10 \Leftrightarrow A < B$

$$\gamma) \log x < 1 \Leftrightarrow \log x < \log 10 \Leftrightarrow 0 < x < 10$$

21449. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x' και y' .

(Μονάδες 10)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y = \ln x$.

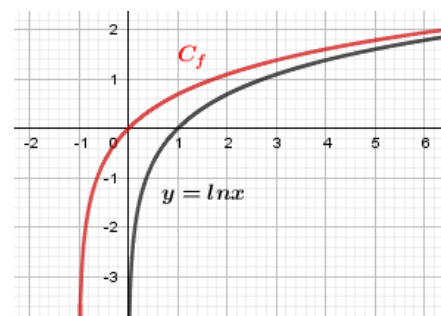
(Μονάδες 7)

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$, άρα $A_f = (-1, +\infty)$.

β) Είναι $f(0) = \ln 1 = 0$ και $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = \ln 1 \Leftrightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$, οπότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει από μετατόπιση της $y = \ln x$ κατά 1 μονάδα αριστερά, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα



21450. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x^2 + 4)$ και $g(x) = \ln x + \ln 4$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $x^2 + 4 > 0$ που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x , οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A_f = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση g ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $x > 0$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A_g = (0, +\infty)$.

β) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(x^2 + 4) = \ln x + \ln 4 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 4) = \ln(4x) \Leftrightarrow x^2 + 4 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ δεκτή.

21472.α) Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(x+1) = \ln(2x)$. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(x+1) > \ln(2x)$. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Πρέπει $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$

Είναι $\ln(x+1) = \ln(2x) \Leftrightarrow x+1 = 2x \Leftrightarrow x = 1$ δεκτή.

β) Για κάθε $x > 0$ είναι $\ln(x+1) > \ln(2x) \Leftrightarrow x+1 > 2x \Leftrightarrow x < 1$, οπότε $x \in (0, 1)$.

21473.α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $A = \ln x + \ln(x+6)$. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln x + \ln(x+6) = \ln 7$. (Μονάδες 15)

Λύση

α) Η παράσταση A ορίζεται για τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ισχύει:

$\begin{cases} x+6 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -6 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$

β) Για κάθε $x > 0$ είναι $\ln x + \ln(x+6) = \ln 7 \Leftrightarrow \ln[x(x+6)] = \ln 7 \Leftrightarrow x^2 + 6x = 7 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 7 = 0.$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με $\Delta = 64$ και ρίζες $x = 1$ δεκτή, $x = -7$ που απορρίπτεται.

21675. Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = 1 - \log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $1 - \log 2 = \log 5$. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση. (Μονάδες 13)

Λύση

α) $1 - \log 2 = \log 10 - \log 2 = \log \frac{10}{2} = \log 5$

β) $\log(x^2 + 1) = 1 - \log 2 \Leftrightarrow \log(x^2 + 1) = \log 5 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

21952. Δίνεται η παράσταση $A = \ln \sqrt{e} + \log \sqrt[3]{100}$. Να αποδείξετε ότι

α) $A = \frac{7}{6}$. (Μονάδες 12)

β) $0 < \ln A < 1$. (Μονάδες 13)

Δίνεται $e \approx 2.71$.

Λύση

α) $A = \ln \sqrt{e} + \log \sqrt[3]{100} = \ln(e)^{\frac{1}{2}} + \log(100)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \log 10^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$

β) $0 < \ln A < 1 \Leftrightarrow \ln 1 < \ln \frac{7}{6} < \ln e \Leftrightarrow 1 < \frac{7}{6} < e$ ισχύει.

21953. Δίνεται η παράσταση $A = e^{\ln 2} + 10^{2 \log \sqrt{5}}$. Να αποδείξετε ότι

α) $A = 7$.

(Μονάδες 12)

β) $0 < \log A < 1$.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) $A = e^{\ln 2} + 10^{2 \log \sqrt{5}} = 2 + 10^{\log(\sqrt{5})^2} = 2 + 10^{\log 5} = 2 + 5 = 7$

β) $0 < \log A < 1 \Leftrightarrow 0 < \log 7 < 1 \Leftrightarrow \log 1 < \log 7 < \log 10 \Leftrightarrow 1 < 7 < 10$ ισχύει.

21954. Δίνεται η παράσταση $A = \ln(\ln e) + \log(\log 10^{10})$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. $\log 10^{10} = 10$ (Μονάδες 6)

ii. $A = 1$.

(Μονάδες 6)

β) Να λυθεί η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = A$.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) i. $\log 10^{10} = 10$ ισχύει από την ιδιότητα $\log_a a^x = x$, $a > 0$ με $a \neq 1$, $x > 0$

ii. $A = \ln(\ln e) + \log(\log 10^{10}) = \ln 1 + \log 10 = 0 + 1 = 1$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\log(x^2 + 1) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 10 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Θέμα 4ο

15015. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2 \ln x = 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2 \ln x > 0$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x = 0)$ ή

$\left(x^2 - x - 2 = 0, \Delta = 1 + 8 = 9, x_1 = \frac{1+3}{2} = 2, x_2 = \frac{1-3}{2} = -1 \right)$

β) Για κάθε $x > 0$ είναι: $\ln^3 x - \ln^2 x - 2 \ln x = 0 \Leftrightarrow P(\ln x) = 0 \Leftrightarrow (\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1)$ ή

$(\ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2)$ ή $(\ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e})$

γ) Θέτουμε $\ln x = \omega$ και η ανίσωση γίνεται

$\omega^3 - \omega^2 - 2\omega > 0 \Leftrightarrow \omega(\omega^2 - \omega - 2) > 0 \Leftrightarrow$

$P(\omega) > 0 \Leftrightarrow -1 < \omega < 0$ ή $\omega > 2$

Άρα $\left(-1 < \ln x < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e} < x < 1 \right)$ ή $\ln x > 2 \Leftrightarrow x > e^2$ δεκτές

ω	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
ω	-	-	0	+	+
$\omega^2 - \omega - 2$	+	0	-	-	+
$P(\omega)$	-	0	+	0	+

15021. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 5)
 β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$. (Μονάδες 6)
 γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2) + f\left(\ln \frac{1}{2}\right)$. (Μονάδες 7)
 δ) Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi + \theta)) = 0$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x \neq 0$, άρα $A = \mathbb{R}^*$.

β) Για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$.

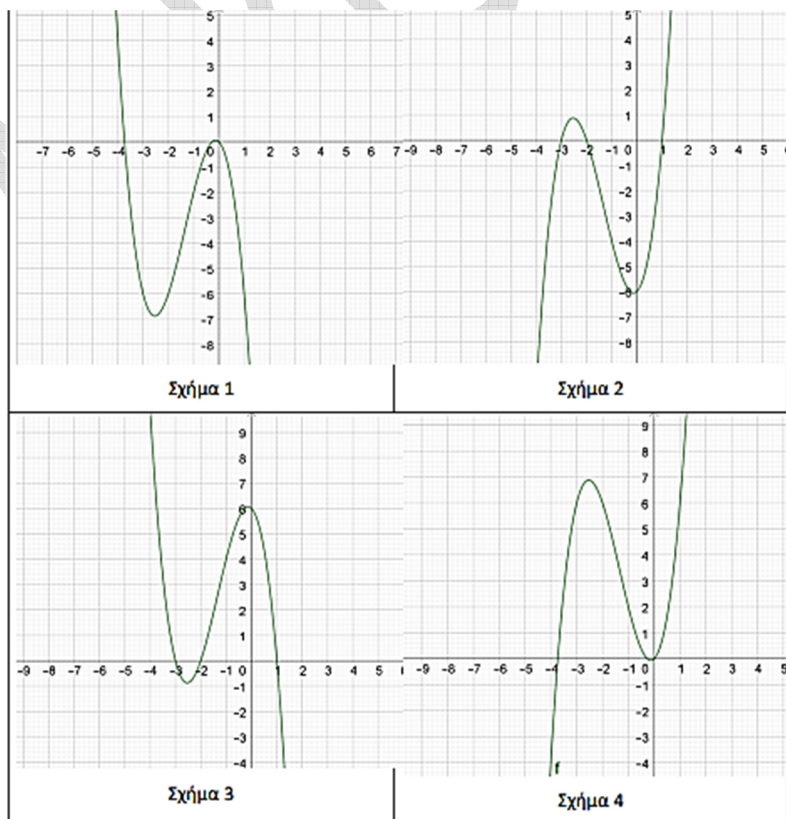
Είναι $f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{-x} = -\frac{x^2 + 1}{x} = -f(x)$, οπότε η f είναι περιττή και επομένως η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

$$\gamma) f(\ln 2) + f\left(\ln \frac{1}{2}\right) = f(\ln 2) + f(\ln 2^{-1}) = f(\ln 2) + f(-\ln 2) = f(\ln 2) - f(\ln 2) = 0$$

$$\delta) \text{ Για κάθε } \theta \in \mathbb{R} \text{ είναι } f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi + \theta)) = f(\eta\mu\theta) + f(-\eta\mu\theta) = f(\eta\mu\theta) - f(\eta\mu\theta) = 0$$

15678. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$.

- α) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$. (Μονάδες 10)
 β) Από τα παρακάτω σχήματα, ένα μόνο μπορεί να αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. Να βρείτε ποιο αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 7)
 γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωσή $P(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$. (Μονάδες 8)



Λύση

α) Παρατηρούμε ότι $P(1) = 0$, οπότε το πολυώνυμο έχει ρίζα το 1.

Από το σχήμα Horner προκύπτει ότι

$$P(x) = (x-1)(-x^2 - 5x - 6) = -(x-1)(x^2 + 5x + 6)$$

Το τριώνυμο $x^2 + 5x + 6$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1$ και ρίζες -2, -3, άρα $P(x) = -(x-1)(x+2)(x+3)$

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow -(x-1)(x+2)(x+3) < 0 \Leftrightarrow$$

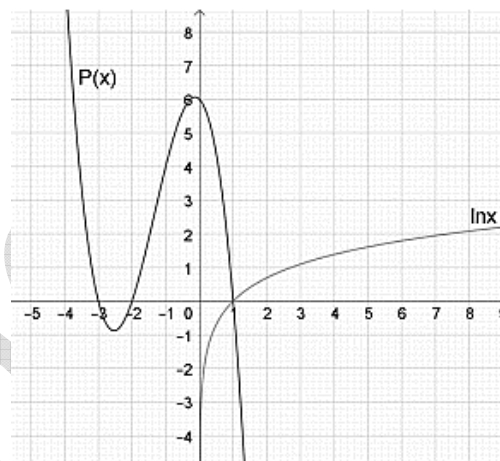
$$(x-1)(x+2)(x+3) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3, -2) \cup (1, +\infty)$$

-1	-4	-1	6	$\rho=1$
	-1	-5	-6	
-1	-5	-6	0	

x	$-\infty$	-3	-2	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	ϕ	+
$x+2$	-	-	ϕ	+	+
$x+3$	-	ϕ	+	+	+
Γινόμενο	-	ϕ	+	ϕ	+

β) Με βάση το α) ερώτημα, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ θα πρέπει να είναι κάτω από τον άξονα $x'x$, για κάθε $x \in (-3, -2) \cup (1, +\infty)$, οπότε το μόνο σχήμα που το ικανοποιεί είναι το γ.

γ) Αν στο σχήμα γ συμπληρώσουμε τη γραφική παράσταση της $\ln x$ όπως φαίνεται παρακάτω, θα διαπιστώσουμε ότι έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη 1, που σημαίνει ότι η εξίσωση $P(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.



15679. Δίνεται η παράσταση $A = \ln \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3} \right)$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{\omega^2 - 1}{\omega - 3} > 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A = -\ln 3$.

(Μονάδες 9)

Λύση

$$\alpha) \frac{\omega^2 - 1}{\omega - 3} > 0 \Leftrightarrow (\omega^2 - 1)(\omega - 3) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\omega - 1)(\omega + 1)(\omega - 3) > 0 \Leftrightarrow$$

$$-1 < \omega < 1 \text{ ή } \omega > 3$$

ω	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$\omega - 1$	-	-	ϕ	+	+
$\omega + 1$	-	ϕ	+	+	+
$\omega - 3$	-	-	-	ϕ	+
Γινόμενο	-	ϕ	+	ϕ	+

β) Η παράσταση A ορίζεται όταν

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3} > 0 \text{ και αν θέσουμε } e^x = \omega \text{ είναι } \frac{\omega^2 - 1}{\omega - 3} > 0 \Leftrightarrow -1 < \omega < 1 \text{ ή } \omega > 3.$$

$$\text{Άρα } (-1 < e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0) \text{ ή } (e^x > 3 \Leftrightarrow x > \ln 3)$$

$$\gamma) A = -\ln 3 \Leftrightarrow \ln \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3} \right) = \ln 3^{-1} \Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$3e^{2x} - \cancel{3} = e^x - \cancel{3} \Leftrightarrow 3e^{2x} - e^x = 0 \Leftrightarrow 3e^{2x}(3e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \text{ αδύνατη ή}$$

$$3e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \ln \frac{1}{3} = -\ln 3$$

15690. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2, x \neq 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 5)
- β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = \ln x$. (Μονάδες 6)
- γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2, x \neq 0$. (Μονάδες 7)
- δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y = 2$. (Μονάδες 7)

Λύση

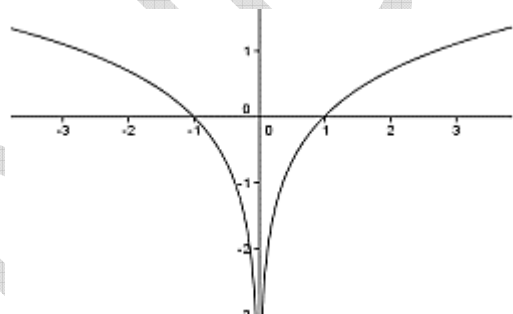
α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι άρτια.

Επειδή $A_f = \mathbb{R}^*$ παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in A_f$ και $-x \in A_f$.

Είναι $f(-x) = \frac{1}{2} \ln(-x)^2 = \frac{1}{2} \ln x^2 = f(x)$, άρα η f είναι άρτια.

β) Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \ln x = \ln x$

γ) Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα και, σύμφωνα με τα προηγούμενα ερωτήματα, προκύπτει αν σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln x, x > 0$ και στη συνέχεια θεωρήσουμε το συμμετρικό του σχήματος ως προς τον άξονα $y'y$.



δ) Η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία

$y = 2$, όταν $f(x) < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln x^2 < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 \ln |x| < 2 \Leftrightarrow \ln |x| < 2 \Leftrightarrow |x| < e^2 \Leftrightarrow -e^2 < x < e^2$. Όμως $x \neq 0$, οπότε η

γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = \ln 2$ για $x \in (-e^2, 0) \cup (0, e^2)$.

15694. Στην Αστρονομία, οι αστέρες ταξινομούνται ανάλογα με την λαμπρότητα τους με βάση την

σχέση $m - M = 5 \log \left(\frac{d}{10} \right)$, (I) όπου d η απόσταση του αστέρα από τον παρατηρητή, m είναι το

φαινόμενο μέγεθός τους (το πόσο λαμπροί φαίνονται) και M το απόλυτο μέγεθός τους. Το απόλυτο μέγεθος ορίζεται να είναι το φαινόμενο μέγεθος σε απόσταση 10 parsec από τον παρατηρητή, όπου 1 parsec είναι η μονάδα μέτρησης της απόστασης d και ισούται με $3,26$ έτη φωτός $= 30,9 \cdot 10^{12} \text{ km}$.

α) Για ποιες τιμές της απόστασης d το φαινόμενο μέγεθος ενός αστέρα είναι μικρότερο από το απόλυτο μέγεθός του; (Μονάδες 7)

β) Ένας αστέρας έχει φαινόμενο μέγεθος $m = 1,157$ και βρίσκεται σε απόσταση $d = 100$ parsec από έναν παρατηρητή. Ποιο είναι το απόλυτο μέγεθος αυτού του αστέρα; (Μονάδες 6)

γ) Να επιλύσετε την σχέση (I) ως προς d . (Μονάδες 7)

δ) Ο αστέρας Betelgeuse έχει φαινόμενο μέγεθος 0,46 και απόλυτο μέγεθος $-5,14$. Ποια είναι η απόστασή του από τον παρατηρητή; Δίνεται ότι $\sqrt[25]{10^{53}} \cong 131$. (Μονάδες 5)

Λύση

α) Θέλουμε να είναι $m < M \Leftrightarrow m - M < 0 \Leftrightarrow 5 \log \left(\frac{d}{10} \right) < 0 \Leftrightarrow \log \left(\frac{d}{10} \right) < 0 = \log 1 \Leftrightarrow \frac{d}{10} < 1 \Leftrightarrow d < 10$

β) $m - M = 5 \log \left(\frac{d}{10} \right) \Leftrightarrow m - 5 \log \left(\frac{d}{10} \right) = M \Leftrightarrow M = 1,157 - 5 \log \left(\frac{100}{10} \right) \Leftrightarrow$

$$M = 1,157 - 5 \log 10 = 1,157 - 5 = -3,843$$

$$\gamma) m - M = 5 \log \left(\frac{d}{10} \right) \Leftrightarrow \log \left(\frac{d}{10} \right) = \frac{m - M}{5} \Leftrightarrow \frac{d}{10} = 10^{\frac{m - M}{5}} \Leftrightarrow d = 10 \cdot 10^{\frac{m - M}{5}} = 10^{1 + \frac{m - M}{5}} = 10^{\frac{5 + m - M}{5}}$$

$$\delta) d = 10^{\frac{5 + 0,46 + 5,14}{5}} = 10^{\frac{10,6}{5}} = 10^{2,12} = 10^{2,12} = \sqrt[25]{10^{53}} \approx 131 \text{ parsec}$$

16001. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x \ln x}$ και $g(x) = \sqrt{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους. (Μονάδες 4)

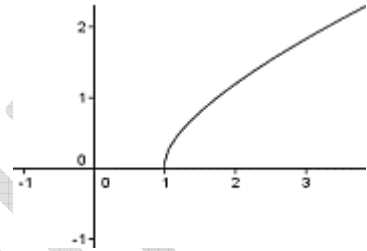
β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω. (Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f .

γ) i. Να βρείτε τη μονοτονία της. (Μονάδες 4)

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{5}{3}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$. (Μονάδες 5)

δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y = 1 - x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x) = 1 - x$. (Μονάδες 7)



Λύση

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $\begin{cases} x > 0 \\ x \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$, άρα $A_f = [1, +\infty)$.

Για να ορίζεται η συνάρτηση g πρέπει $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$, άρα $A_g = [1, +\infty)$.

β) Είναι $f(x) - g(x) = \sqrt{x \ln x} - \sqrt{\ln x} = \sqrt{x} \sqrt{\ln x} - \sqrt{\ln x} = \sqrt{\ln x} (\sqrt{x} - 1)$

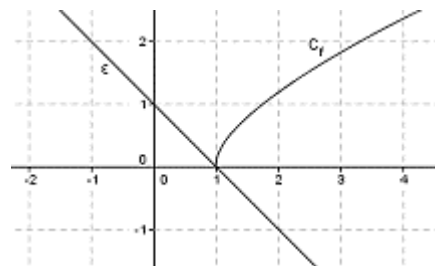
Επειδή $x \geq 1$, είναι $\sqrt{\ln x} \geq 0$ και $\sqrt{x} - 1 \geq 0$, άρα $f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$.

γ) i. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

ii. Είναι $\frac{5}{3} - \frac{7}{5} = \frac{25}{15} - \frac{21}{15} = \frac{4}{15} > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3} > \frac{7}{5} \Leftrightarrow f\left(\frac{5}{3}\right) > f\left(\frac{7}{5}\right)$.

δ) Η ευθεία ϵ τέμνει τους άξονες στα σημεία $(1, 0)$ και $(0, 1)$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, απ' όπου προκύπτει ότι το μοναδικό κοινό σημείο της με την C_f είναι το $(1, 0)$.

Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x) = x - 1$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$.



18865. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 03)

β) Να προσδιορίσετε το είδος της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f . (Μονάδες 06)

γ) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση. (Μονάδες 06)

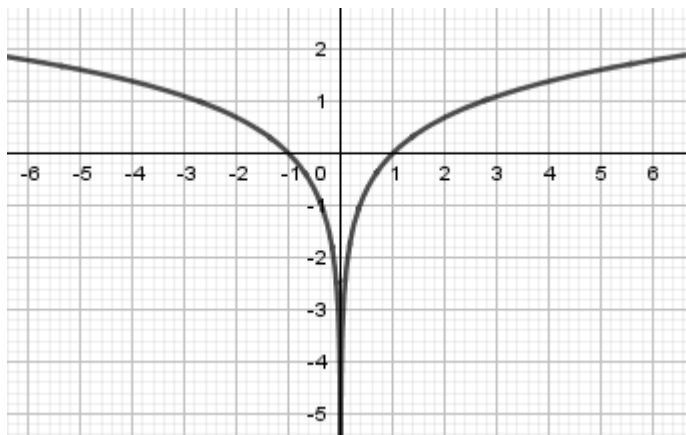
δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $E(x) = \frac{1}{2}(x - 1) \ln x$, $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ μπορεί να περιγράψει το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου $A(1, 0)$, $B(x, 0)$ και $\Gamma(x, \ln x)$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$, άρα $A_f = \mathbb{R}^*$.

β) Για κάθε $x \in A_f$ και $-x \in A_f$ και $f(-x) = \ln|-x| = \ln|x| = f(x)$, άρα η f είναι άρτια.

γ) Η γραφική παράσταση της f από τελείται από τη γραφική παράσταση της $y = \ln x$ και από τη συμμετρική της ως προς τον $y'y$ $y = \ln(-x)$, $x < 0$.



δ) Αν $x > 1$, τότε

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB)(B\Gamma) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x$$

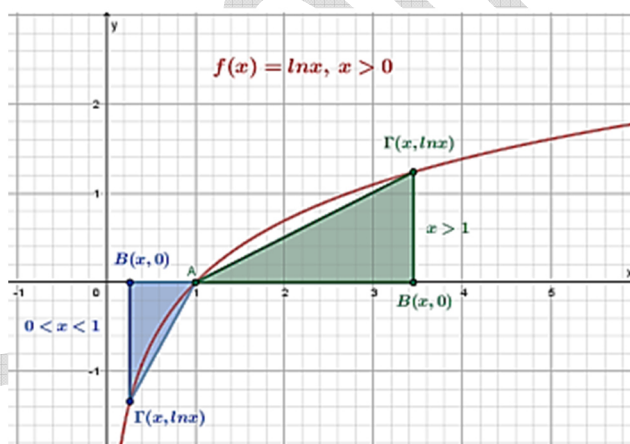
και αν $0 < x < 1$, τότε

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB)(B\Gamma) = \frac{1}{2}(1-x)(-\ln x) \Leftrightarrow$$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB)(B\Gamma) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x$$

Άρα

$$E(x) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x, x \in (0,1) \cup (1,+\infty).$$



21445. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{4^x - 1}{2^x + 5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log 3 - \log 7$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \log 3 - \log 7$.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $\frac{4^x - 1}{2^x + 5} > 0 \Leftrightarrow (4^x - 1)(2^x + 5) > 0 \Leftrightarrow 4^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 4^x > 4^0 \Leftrightarrow x > 0$, άρα $A_f = (0, +\infty)$.

$$\beta) f(x) = \log 3 - \log 7 \Leftrightarrow \log \frac{4^x - 1}{2^x + 5} = \log \frac{3}{7} \Leftrightarrow \frac{4^x - 1}{2^x + 5} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow 7(4^x - 1) = 3(2^x + 5) \Leftrightarrow$$

$$7 \cdot (2^x)^2 - 7 = 3 \cdot 2^x + 15 \Leftrightarrow 7 \cdot (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 22 = 0$$

Θέτουμε $2^x = y > 0$ και η εξίσωση γίνεται $7y^2 - 3y - 22 = 0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 625$ και ρίζες

$$y = 2 \text{ ή } y = -\frac{11}{7} \text{ που απορρίπτεται. Άρα } 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\gamma) f(x) > \log 3 - \log 7 \Leftrightarrow \log \frac{4^x - 1}{2^x + 5} > \log \frac{3}{7} \Leftrightarrow \frac{4^x - 1}{2^x + 5} > \frac{3}{7} \Leftrightarrow 7(4^x - 1) > 3(2^x + 5) \Leftrightarrow$$

$$7 \cdot (2^x)^2 - 7 > 3 \cdot 2^x + 15 \Leftrightarrow 7 \cdot (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 22 > 0 \Leftrightarrow 7y^2 - 3y - 22 > 0 \Leftrightarrow y = -\frac{11}{7} \text{ αδύνατο ή } y > 2 \Leftrightarrow$$

$$2^x > 2 \Leftrightarrow x > 1$$

21446. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + x = 3 \ln 2$. (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + x \geq 3 \ln 2$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$, άρα $A_f = (\ln 2, +\infty)$.

$$\beta) f(x) + x = 3 \ln 2 \Leftrightarrow \ln(e^x - 2) + \ln e^x = \ln 2^3 \Leftrightarrow \ln[e^x(e^x - 2)] = \ln 8 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x = 8 \Leftrightarrow$$

$$(e^x)^2 - 2e^x - 8 = 0$$

Θέτουμε $e^x = y > 0$ και η εξίσωση γίνεται $y^2 - 2y - 8 = 0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 36$ και ρίζες $y = 4$ ή $y = -2$ απορρίπτεται.

Άρα $e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$ δεκτή.

$$\gamma) f(x) + x \geq 3 \ln 2 \Leftrightarrow \ln(e^x - 2) + \ln e^x \geq \ln 2^3 \Leftrightarrow \ln[e^x(e^x - 2)] \geq \ln 8 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x \geq 8 \Leftrightarrow$$

$$(e^x)^2 - 2e^x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 8 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq -2 \text{ αδύνατο ή } y \geq 4 \Leftrightarrow e^x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \ln 4.$$

21447. Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο $P(t) = 200e^{ct}$, Όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος ($t = 0$). Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328. (Δίνεται ότι $\ln(1,64) \cong 0,5$ και $\ln 10 \cong 2,3$)

α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $c = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Ο αριθμός των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα ήταν $P(0) = 200e^{c \cdot 0} = 200$ βακτήρια.

$$\beta) \text{ Έχουμε: } P(1) = 328 \Leftrightarrow 200e^c = 328 \Leftrightarrow e^c = \frac{328}{200} = 1,64 \Leftrightarrow c = \ln 1,64 \cong 0,5$$

γ) Ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής, δηλαδή $10P(0) < P(t) < 100P(0) \Leftrightarrow$

$$10 \cdot 200 < 200e^{\frac{1}{2}t} < 100 \cdot 200 \Leftrightarrow 10 < e^{\frac{1}{2}t} < 100 \Leftrightarrow \ln 10 < \frac{1}{2}t < \ln 100 \Leftrightarrow$$

$$2 \ln 10 < t < 2 \ln 10^2 \Leftrightarrow 2 \ln 10 < t < 4 \ln 10 \Leftrightarrow 2 \cdot 2,3 < t < 4 \cdot 2,3 \Leftrightarrow 4,6 < t < 9,2.$$

21470. Μια ποσότητα Q ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου t (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(t) = Q_0 e^{ct}$. Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $1/3$ της αρχικής ποσότητας και μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό.

α) Να δείξετε ότι $Q(t) = Q_0 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^t$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε (για $t = 0$). (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας, οπότε

$$Q(2) = \frac{1}{3} Q_0 \Leftrightarrow Q_0 e^{2t} = \frac{1}{3} Q_0 \Leftrightarrow (e^t)^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow e^t = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Είναι } Q(t) = Q_0 e^{ct} = Q_0 (e^t)^c = Q_0 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^t$$

β) $Q(4) = 1 \Leftrightarrow Q_0 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^4 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9} Q_0 = 1 \Leftrightarrow Q_0 = 9$ κιλά

γ) $Q(t) = \frac{1}{81} \Leftrightarrow 9 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^t = \frac{1}{81} \Leftrightarrow 3^2 \left(3^{-\frac{1}{2}} \right)^t = \frac{1}{3^4} \Leftrightarrow 3^2 \cdot 3^{-\frac{t}{2}} = 3^{-4} \Leftrightarrow 3^{2-\frac{t}{2}} = 3^{-4} \Leftrightarrow 2 - \frac{t}{2} = -4 \Leftrightarrow$
 $6 = \frac{t}{2} \Leftrightarrow t = 12.$

Συνεπώς μετά από 12 χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

21474. Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 λίτρα ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

α) Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της 1ης και στο τέλος της 2ης εβδομάδας. (Μονάδες 8)

β) Ο όγκος V του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση $V(t) = V_0 \cdot \alpha^t$ όπου V_0 και α σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς V_0 και α . (Μονάδες 8)

γ) Αν ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη σχέση $V(t) = 10 \cdot (0,85)^t$, να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής. (Δίνεται ότι: $\log(0,5) = -0,3$ και $\log(0,85) = -0,07$). (Μονάδες 9)

Λύση

α) Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο στο τέλος της 1ης εβδομάδας είναι: $10 - \frac{15}{100} \cdot 10 = 10 - 1,5 = 8,5$ λίτρα

Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο στο τέλος της 2ης εβδομάδας είναι:

$$8,5 - \frac{15}{100} \cdot 8,5 = 8,5(1 - 0,15) = 8,5 \cdot 0,85 = 7,225 \text{ λίτρα}$$

β) Η αρχική ποσότητα του υγρού στο δοχείο (δηλαδή η ποσότητα τη χρονική στιγμή $t = 0$) είναι 10 λίτρα, οπότε $V(0) = V_0 \cdot \alpha^0 = 10 \Leftrightarrow V_0 = 10$.

Είναι $V(1) = 8,5 \Leftrightarrow 10 \cdot \alpha = 8,5 \Leftrightarrow \alpha = 0,85$

γ) Θα βρούμε μετά από πόσες εβδομάδες ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής, δηλαδή θα βρούμε τις τιμές του t ώστε:

$$V(t) < \frac{1}{2} V_0 \Leftrightarrow 10(0,85)^t < \frac{10}{2} \Leftrightarrow (0,85)^t < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log(0,85)^t < \log \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$t \log(0,85) < -0,3 \Leftrightarrow -0,07t < -0,3 \Leftrightarrow t > \frac{0,3}{0,07} = \frac{30}{7}$$

Άρα μετά από εβδομάδες $\frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$ (4 εβδομάδες και 2 ημέρες) ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής.

21678. Ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού λέμε τον χρόνο που απαιτείται για να διασπασθεί η μισή από την αρχική του ποσότητα, οπότε να απομείνει το 50% από αυτή.

Αν Q_0 είναι η αρχική ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού, τότε η ποσότητα $Q(t)$ που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο $Q(t) = Q_0 e^{ct}$, όπου c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το υλικό.

α) Να αποδείξετε ότι ο χρόνος ημιζωής t' δίνεται από τον τύπο $t' = -\frac{\ln 2}{c}$. (Μονάδες 8)

Το ραδιοϊσότοπο του άνθρακα, άνθρακας -14 έχει χρόνο ημιζωής 5730 χρόνια.

β) Να αποδείξετε ότι η ποσότητα του άνθρακα -14 που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον

τύπο $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$. (Μονάδες 8)

γ) Κατά την εξέταση ενός οστού που ανακάλυψαν οι παλαιοντολόγοι διαπιστώθηκε ότι έχει απομείνει σ' αυτό το 25% της ποσότητας του άνθρακα -14 που περιείχε αρχικά. Να βρείτε την ηλικία του οστού. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Είναι $Q(t') = \frac{1}{2} Q_0 \Leftrightarrow Q_0 e^{ct'} = \frac{1}{2} Q_0 \Leftrightarrow e^{ct'} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow ct' = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow ct' = -\ln 2 \Leftrightarrow t' = -\frac{\ln 2}{c}$

β) Για το ραδιοϊσότοπο του άνθρακα, άνθρακας -14 ισχύει $t' = 5730$, οπότε έχουμε

$$-\frac{\ln 2}{c} = 5730 \Leftrightarrow 5730c = -\ln 2 \Leftrightarrow c = -\frac{\ln 2}{5730}, \text{ οπότε ο τύπος που μας δίνει την ποσότητα του άνθρακα}$$

-14 που απομένει t χρόνια μετά δίνεται από τον τύπο $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$.

γ) Είναι $Q(t) = \frac{25}{100} Q_0 \Leftrightarrow Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730}t} = \frac{1}{4} Q_0 \Leftrightarrow e^{-\frac{\ln 2}{5730}t} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{\ln 2}{5730}t = \ln \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$$-\frac{\ln 2}{5730}t = -\ln 4 \Leftrightarrow \ln 2 \cdot t = 5730 \cdot \ln 2^2 \Leftrightarrow \ln 2 \cdot t = 11460 \ln 2 \Leftrightarrow t = 11460$$

οπότε το οστό εκτιμάται ότι είναι ηλικίας 11.460 χρόνων

21679. Ένα ζεστό ρόφημα τη στιγμή που σερβίρετε, σε θερμοκρασία του περιβάλλοντος που είναι $T_\alpha = 25^\circ \text{C}$, έχει θερμοκρασία $T_0 = 73^\circ \text{C}$. Η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από t λεπτά

δίνεται, σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, από την συνάρτηση

$$T(t) = T_\alpha + ce^{-kt}$$

όπου όπου c , κ κατάλληλες σταθερές και $t \in [0, 60]$. Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από 10 λεπτά είναι 61°C , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $c = 48$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την σταθερά κ .

(Θεωρήστε $\ln 0,75 = -0,3$).

(Μονάδες 8)

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(t)$

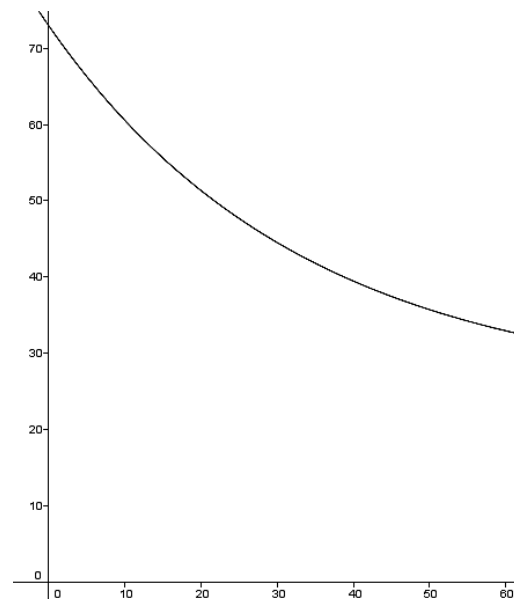
φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

γ) Να βρείτε την θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμα. (Θεωρήστε $e^{-1,2} = 0,3$).

(Μονάδες 5)

δ) Αν θεωρήσουμε ότι ο καταναλωτής έχει την αίσθηση του ζεστού όταν η θερμοκρασία του ροφήματος είναι μεγαλύτερη από 40°C , να αιτιολογήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση και το αποτέλεσμα του ερωτήματος γ), γιατί πριν περάσουν 40 λεπτά ο καταναλωτής του ροφήματος έχει την αίσθηση ότι το ρόφημα δεν είναι πλέον ζεστό.

(Μονάδες 6)



Λύση

α) Είναι $T(0) = T_a + ce^0 \Leftrightarrow 73 = 25 + c \Leftrightarrow c = 48$

β) Είναι $T(10) = 61 \Leftrightarrow 25 + 48e^{-10\kappa} = 61 \Leftrightarrow 48e^{-10\kappa} = 36 \Leftrightarrow e^{-10\kappa} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$
 $-10\kappa = \ln \frac{3}{4} \Leftrightarrow -10\kappa = \ln 0,75 \Leftrightarrow -10\kappa = -0,3 \Leftrightarrow \kappa = 0,03$

γ) $T(40) = 25 + 48e^{-0,03 \cdot 40} = 25 + 48e^{-1,2} = 25 + 48 \cdot 0,3 = 25 + 14,4 = 39,4$

Επομένως η θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμά του είναι ο $39,4^\circ\text{C}$.

δ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(t) = 25 + 48e^{-0,3t}$ όπως φαίνεται και στο δοσμένο σχήμα είναι γνησίως φθίνουσα και από το ερώτημα γ) ισχύει $T(40) = 39,4$, οπότε αν $T(t_0) = 40$, τότε $T(t) > T(40)$ και λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης παίρνουμε $t_0 < 40$. Επομένως, πριν περάσουν 40 λεπτά, η θερμοκρασία του ροφήματος έχει ήδη πέσει κάτω από τους 40 και ο καταναλωτής του ροφήματος έχει την αίσθηση ότι το ρόφημα δεν είναι πλέον ζεστό.

21680. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x$, $x > 0$ και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2) + f(4) = \frac{1}{3}f(8)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι από τον άξονα $x'x$ και πάνω.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε:

i. Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία.

(Μονάδες 4)

ii. Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία.

(Μονάδες 5)

Λύση

$$\alpha) f(2) + f(4) = \frac{1}{3}f(8) \Leftrightarrow \ln 2 + 3\ln 4 = \frac{1}{3} \cdot 7\ln 8 \Leftrightarrow \ln 2 + 3\ln 2^2 = \frac{1}{3} \cdot 7\ln 2^3 \Leftrightarrow$$

$$\ln 2 + 6\ln 2 = \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot 3 \cdot \ln 2 \Leftrightarrow 7\ln 2 = 7\ln 2 \text{ ισχύει.}$$

β) Για κάθε $x < 1$ είναι $x - 1 < 0$, $\ln x < 0$ άρα $f(x) = (x - 1)\ln x > 0$.

Για κάθε $x \geq 1$ είναι $x - 1 \geq 0$, $\ln x \geq 0$ άρα $f(x) = (x - 1)\ln x \geq 0$.

Επειδή για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \geq 0$, η γραφική παράσταση της f είναι από τον άξονα xx' και πάνω.

γ) i. Οι τετμημένες των κοινών τους σημείων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 2x - 2$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) = 2x - 2 \Leftrightarrow (x - 1)\ln x = 2(x - 1) \Leftrightarrow (x - 1)\ln x - 2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$(x - 1)(\ln x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1) \text{ ή } (\ln x - 2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2).$$

Για $x = 1$ είναι $y = 0$ και για $x = e^2$ είναι $y = 2e^2 - 2$, οπότε κοινά σημεία της C_f με την ε είναι τα $(1, 1)$ και $(x = e^2, 2e^2 - 2)$.

ii. Η C_f είναι κάτω από την ευθεία όταν $f(x) < 2x - 2 \Leftrightarrow (x - 1)(\ln x - 2) < 0$

Το πρόσημο κάθε παράγοντα και του γινομένου φαίνεται στον επόμενο πίνακα.

x	0	1	e^2	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+	+
$\ln x - 2$	-	-	0	+
$(x - 1)(\ln x - 2)$	+	0	-	+

Από την τελευταία γραμμή του πίνακα συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία (ε) για κάθε $x \in (1, e^2)$.

21950. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$ είναι το $(-6, 2) \cup (2, +\infty)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα xx' . (Μονάδες 9)

Λύση

$$\alpha) \frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0 \Leftrightarrow (\omega^3 - 8)(\omega^2 + 4\omega - 12) > 0 \Leftrightarrow (\omega - 2)(\omega^2 + 2\omega + 4)(\omega - 2)(\omega + 6) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\omega - 2)^2 (\omega^2 + 2\omega + 4)(\omega + 6) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega \in (-6, 2) \cup (2, +\infty)$$

β) Η f ορίζεται όταν $\frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} > 0$ και αν θέσουμε

$$e^x = \omega > 0 \text{ γίνεται } \frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0 \Leftrightarrow (-6 < \omega < 2 \Leftrightarrow e^x < 2 \Leftrightarrow x < \ln 2) \text{ ή } (\omega > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2).$$

ω	$-\infty$	-6	2	$+\infty$
$(\omega - 2)^2$	+	+	$\neq$	+
$\omega^2 + 2\omega + 4$	+	+	+	+
$\omega - 6$	-	ϕ	+	+
Γινόμενο	-	ϕ	+	+

Τελικά το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{\ln 2\}$

$$\begin{aligned} \gamma) \text{ Για } x \neq \ln 2 \text{ είναι: } f(x) = 0 &\Leftrightarrow \ln \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} = 1 \Leftrightarrow e^{3x} - 8 = e^{2x} + 4e^x - 12 \Leftrightarrow \\ e^{3x} - e^{2x} - 4e^x + 4 &= 0 \Leftrightarrow e^{2x}(e^x - 1) - 4(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)(e^{2x} - 4) = 0 \Leftrightarrow \\ (e^x - 1)(e^x - 2)(e^x + 2) &= 0 \Leftrightarrow (e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ δεκτή}) \text{ ή } \\ (e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2 \text{ απορρίπτεται}) \text{ ή } (e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = -2 \text{ αδύνατη}) \end{aligned}$$

Τελικά το μοναδικό σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι το $(0,0)$.

Θέμα 3ο

15676. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 7)
 β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 8)
 γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον $x'x$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$, άρα $A_f = (0, +\infty)$

β) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 1 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(\ln 2, 0)$

γ) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ για τις τιμές του $x > 0$ για τις οποίες είναι

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 1 \Leftrightarrow e^x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < \ln 2$$