

Γεωμετρία Β΄ Λυκείου

Τράπεζα θεμάτων

23-5-2022

180 ασκήσεις



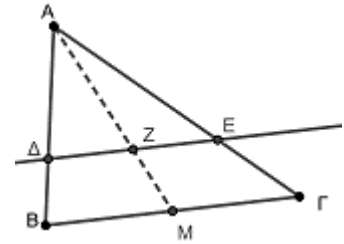
Στέλιος Μιχαήλογλου

www.Askisopolis.gr

Θεώρημα Θαλή

2^ο Θέμα

14534. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=6$ και $A\Gamma=9$. AM είναι η διάμεσος του τριγώνου και το σημείο Z εσωτερικό στην AM ώστε να σχηματίζει λόγο $\frac{AZ}{AM} = \frac{2}{3}$. Από το σημείο Z φέρουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.



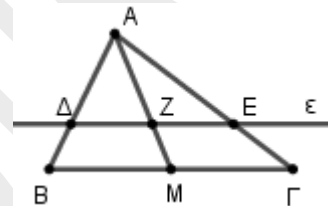
α) Να αποδείξετε ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{E\Gamma} = 2$. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $A\Delta$ και $E\Gamma$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Επειδή $DE \parallel B\Gamma$ από το θεώρημα Θαλή ισχύει ότι:

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AZ}{AM} = \frac{2}{3} \quad \text{και} \quad \frac{AE}{E\Gamma} = \frac{AZ}{ZM} = \frac{\frac{2}{3}AM}{\frac{1}{3}AM} = 2$$



β) Είναι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{12}{3} = 4$ και

$$\frac{AE}{E\Gamma} = 2 \Leftrightarrow \frac{A\Gamma - E\Gamma}{E\Gamma} = 2 \Leftrightarrow 9 - E\Gamma = 2E\Gamma \Leftrightarrow 9 = 3E\Gamma \Leftrightarrow E\Gamma = 3$$

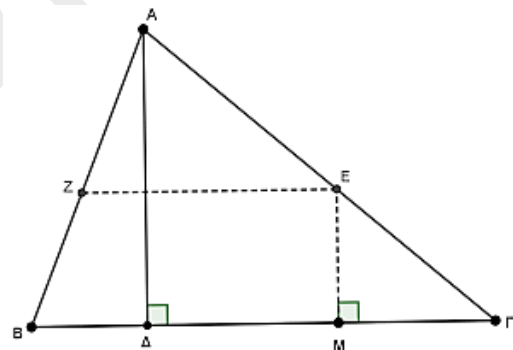
15830. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος, το $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου. Η κάθετος στην πλευρά $B\Gamma$ σε ένα άλλο σημείο της M τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Από το E φέρνουμε παράλληλη στην $B\Gamma$, που τέμνει την AB στο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{EA}{E\Gamma}$

(Μονάδες 10)

β) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{M\Delta}{M\Gamma}$

(Μονάδες 15)



Λύση

α) Από τα δεδομένα η $ZE \parallel B\Gamma$, οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\frac{ZA}{ZB} = \frac{EA}{E\Gamma}$.

β) Είναι $ME \parallel A\Delta$ (από τα δεδομένα είναι κάθετα στην ίδια ευθεία $B\Gamma$), οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι:

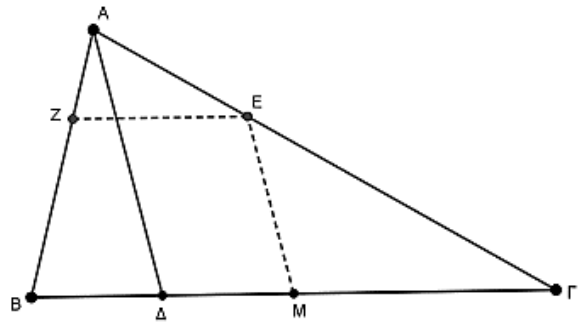
$\frac{M\Delta}{M\Gamma} = \frac{EA}{E\Gamma}$. Από την τελευταία ισότητα και την ισότητα που δείξαμε στο ερώτημα (α) συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{ZA}{ZB} = \frac{M\Delta}{M\Gamma}$$

15831. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος, το M είναι μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και το Δ είναι το μέσο του MB . Από το M φέρνουμε παράλληλη στην $A\Delta$, που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Από το E φέρνουμε παράλληλη στην $B\Gamma$, που τέμνει την AB στο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{EA}{EG} = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 15)

β) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 10)



Λύση

α) Από τα δεδομένα, το Δ να είναι το μέσο του BM και το M μέσο της $B\Gamma$. Άρα $M\Delta = \frac{1}{2}MB = \frac{1}{2}M\Gamma$.

Επίσης η $ME \parallel A\Delta$, οπότε από το Θ . Θαλή θα είναι: $\frac{EA}{EG} = \frac{M\Delta}{M\Gamma} = \frac{\frac{1}{2}M\Gamma}{M\Gamma} = \frac{1}{2}$.

β) Από τα δεδομένα η $ZE \parallel B\Gamma$, οπότε από το Θ . Θαλή θα είναι: $\frac{ZA}{ZB} = \frac{EA}{EG} = \frac{1}{2}$.

14579. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ , E και Z των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ώστε η ΔE να είναι παράλληλη στην $A\Gamma$. Επίσης $AB = 3A\Delta$.

α) Να βρείτε τους λόγους $\frac{B\Delta}{A\Delta}$ και $\frac{BE}{EG}$. (Μονάδες 15)

β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $A\Gamma = 3,9$ και $\Gamma Z = 1,3$ να αποδείξετε ότι η ZE είναι παράλληλη της AB . (Μονάδες 10)

Λύση

α) Εφόσον $AB = 3A\Delta$ είναι $B\Delta + A\Delta = 3A\Delta$ ή $B\Delta = 2A\Delta$. Άρα $\frac{B\Delta}{A\Delta} = 2$.

Η ευθεία ΔE που είναι φορέας του ΔE είναι παράλληλη στην πλευρά $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, άρα χωρίζει τις άλλες δύο πλευρές του τριγώνου AB και $B\Gamma$ σε μέρη ανάλογα. Επομένως $\frac{BE}{EG} = \frac{B\Delta}{A\Delta} = 2$.

β) Από το α) έχουμε ότι το σημείο E διαιρεί το τμήμα $B\Gamma$ σε τμήματα με λόγο 2. Εφόσον $A\Gamma = 3,9$, τότε $AZ + \Gamma Z = 3,9$. Όμως $\Gamma Z = 1,3$, άρα $AZ + 1,3 = 3,9$ ή $AZ = 2,6$. Επομένως $\frac{AZ}{\Gamma Z} = \frac{2,6}{1,3} = 2$.

Άρα το σημείο Z διαιρεί το τμήμα $A\Gamma$ σε τμήματα με λόγο 2. Εφόσον η ευθεία ZE χωρίζει τις πλευρές του τριγώνου $A\Gamma$ και $B\Gamma$ σε μέρη ανάλογα με λόγο 2, η ZE είναι παράλληλη στην τρίτη πλευρά του τριγώνου, την AB .

21987. Οι ευθείες ΓΘ και ΖΗ τέμνουν τις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3 στα σημεία Θ, Α, Β και Η, Δ, Ε αντίστοιχα και την ευθεία ε_4 στα σημεία Γ και Ζ όπως στο παρακάτω σχήμα. Επίσης δίνονται τα μήκη ΘΑ = 2,

ΑΒ = 1, ΒΓ = ΗΔ = 4 και ΕΖ = 8.

α) Να αποδείξετε ότι ΔΕ = 2.

(Μονάδες 10)

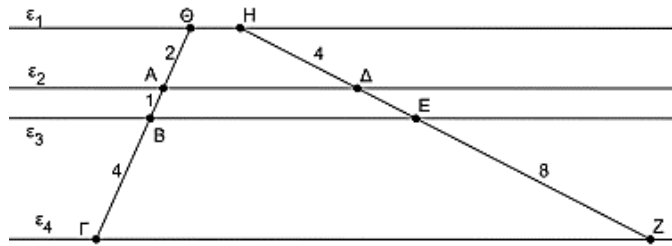
β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε_4 είναι παράλληλη στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3 .

(Μονάδες 05)

γ) Να σχεδιάσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΘΖ το οποίο τέμνει την ευθεία ε_2 στο Κ και την ευθεία ε_3

στο Λ και να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{\Lambda Z}{\text{ΚΛ}}$.

(Μονάδες 10)



Λύση

α) Εφόσον οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3 τέμνουν τις ευθείες ΓΘ και ΖΗ, σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα. Επομένως: $\frac{\Theta A}{H \Delta} = \frac{A B}{\Delta E} \Leftrightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{\Delta E} \Leftrightarrow 2 \Delta E = 4 \Leftrightarrow \Delta E = 2$.

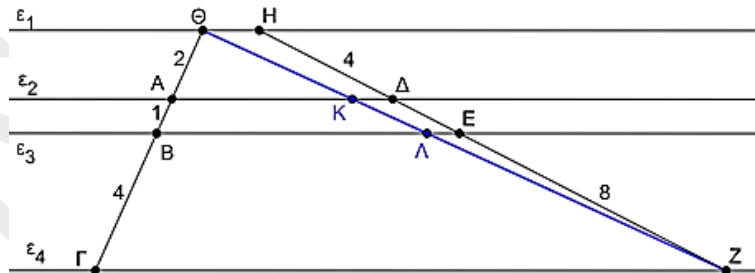
β) Οι ευθείες ΘΓ και ΗΖ τέμνουν τις παράλληλες ευθείες ε_2 και ε_3 στα σημεία Α, Β και Δ, Ε αντίστοιχα και τα σημεία Γ και Ζ είναι σημεία των ευθειών ΘΓ και ΗΖ αντίστοιχα, ώστε

$$\frac{A B}{B \Gamma} = \frac{1}{4} \text{ και } \frac{\Delta E}{E Z} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \text{ άρα } \frac{A B}{B \Gamma} = \frac{\Delta E}{E Z}.$$

Σύμφωνα με το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή η ευθεία ΓΖ ή ε_4 είναι παράλληλη προς τις ευθείες ε_2 και ε_3 , άρα και προς την ε_1 .

γ) Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΘΖ το οποίο τέμνει τις ε_2 και ε_3 στα Κ και Λ αντίστοιχα. Σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή, εφόσον οι ευθείες $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ και ε_4 τέμνουν τις ευθείες ΘΓ και ΖΗ ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα. Επομένως:

$$\frac{A B}{\text{ΚΛ}} = \frac{B \Gamma}{\Lambda Z} \Leftrightarrow \frac{1}{\text{ΚΛ}} = \frac{4}{\Lambda Z} \Leftrightarrow \frac{\Lambda Z}{\text{ΚΛ}} = \frac{1}{4}$$



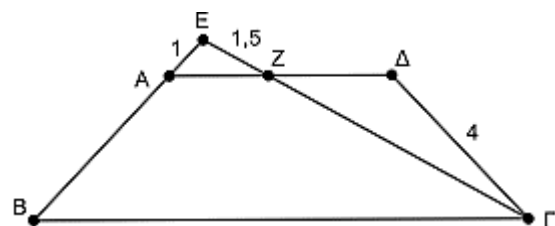
22132. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = ΓΔ = 4 και με βάσεις ΑΔ και ΒΓ. Στην προέκταση της πλευράς ΒΑ προς το Α παίρνουμε σημείο Ε, ώστε ΕΑ = 1. Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΓ τέμνει την ΑΔ στο σημείο Ζ και ΕΖ = 1,5.

α) Να αποδείξετε ότι ΖΓ = 1,5ΑΒ. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ΖΓ.

(Μονάδες 05)

γ) Αν επιπλέον ΒΓ = 10, να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΖ του τριγώνου ΕΑΖ. (Μονάδες 10)



Λύση

α) Οι βάσεις ΑΔ και ΒΓ του τραπέζιου ΑΒΓΔ είναι παράλληλες, άρα σύμφωνα με το πόρισμα του θεωρήματος του Θαλή η ΑΔ χωρίζει σε μέρη ανάλογα τις πλευρές ΕΒ και ΕΓ του τριγώνου ΕΒΓ τις οποίες τέμνει. Επομένως: $\frac{E A}{E Z} = \frac{A B}{Z \Gamma} \Leftrightarrow \frac{1}{1,5} = \frac{A B}{Z \Gamma} \Leftrightarrow Z \Gamma = 1,5 \cdot A B$.

β) $Z \Gamma = 1,5 \cdot A B = 1,5 \cdot 4 = 6$

γ) Η ΑΖ είναι παράλληλη στην ΒΓ, γιατί το Ζ είναι σημείο της βάσης ΑΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ. Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΕΒΓ που ορίζεται από τις προεκτάσεις των πλευρών ΕΑ και ΕΖ του τριγώνου ΕΑΖ και την παράλληλη ΒΓ στην ΑΖ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του

$$\text{ΕΑΖ, άρα: } \frac{\text{ΕΑ}}{\text{ΕΒ}} = \frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΕΓ}} = \frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΒΓ}} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{\text{ΑΖ}}{10} \Leftrightarrow 5\text{ΑΖ} = 10 \Leftrightarrow \text{ΑΖ} = 2$$

Ομοιότητα

2^ο Θέμα

14535. Δίνονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ για τα οποία γνωρίζουμε ότι: $AB = 9$, $A\Gamma = 15$ και $A = 48^\circ$, $Z\Delta = 12$, $ZE = 20$ και $Z = 48^\circ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

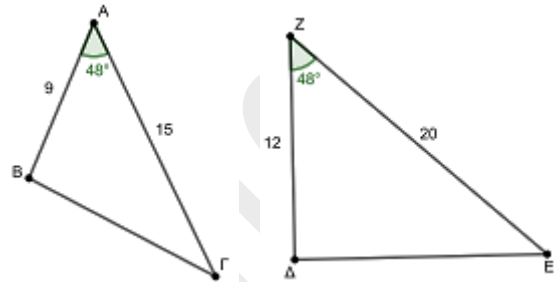
β) i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

ii. Να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Είναι $\frac{AB}{Z\Delta} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ και $\frac{A\Gamma}{ZE} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$, άρα $\frac{AB}{Z\Delta} = \frac{A\Gamma}{ZE}$.

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν $A = Z$, έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια.



β) i. Είναι $\frac{AB}{Z\Delta} = \frac{A\Gamma}{ZE} = \frac{B\Gamma}{\Delta E}$

ii. Επειδή $\frac{AB}{Z\Delta} = \frac{3}{4}$, είναι $\lambda = \frac{3}{4}$

14536. Για δύο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $E\Delta Z$ ($E\Delta = EZ$) γνωρίζουμε ότι:

$A = 48^\circ$, $Z = 66^\circ$ και $AB = 3 \cdot E\Delta$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Delta Z$ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β) i. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των δυο τριγώνων.

ii. Να βρείτε το λόγο των βάσεων των δυο τριγώνων. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο $E\Delta Z$ είναι ισοσκελές με $E\Delta = EZ$, είναι

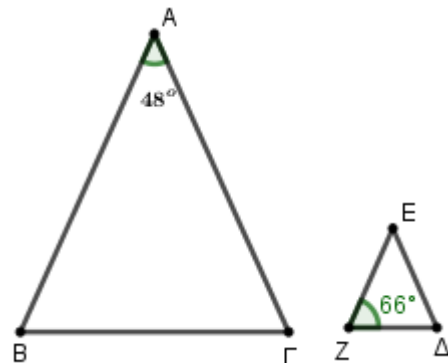
$Z = \Delta = 66^\circ$, τότε: $E + Z + \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow$

$E + 66^\circ + 66^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow E = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$

Επειδή $AB = 3 \cdot E\Delta$ και $AB = A\Gamma$, $E\Delta = EZ$, είναι

$\frac{AB}{E\Delta} = 3$, $\frac{A\Gamma}{EZ} = 3$, δηλαδή $\frac{AB}{E\Delta} = \frac{A\Gamma}{EZ}$.

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν $A = E$, έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια.



β) i. Είναι $\frac{AB}{E\Delta} = \frac{A\Gamma}{EZ} = \frac{B\Gamma}{Z\Delta}$

ii. Επειδή $\frac{AB}{E\Delta} = 3$, είναι και $\frac{B\Gamma}{Z\Delta} = 3$.

14537. Δίνονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

$$A = 48^\circ, B = 53^\circ, E = 79^\circ \text{ και } Z = 48^\circ.$$

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β) i. Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων; (Μονάδες 9)

ii. Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων. (Μονάδες 6)

Λύση

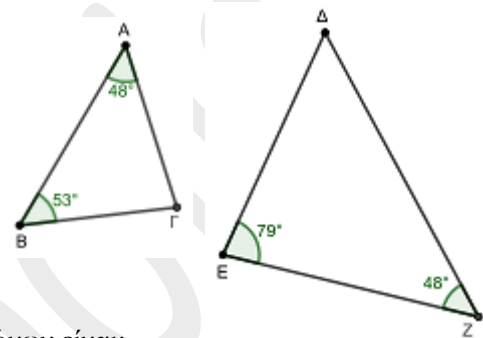
α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔEZ έχουμε:

$$\Delta + E + Z = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta + 79 + 48 = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta = 180^\circ - 127^\circ = 53^\circ.$$

Επειδή $B = \Delta$ και $A = Z$ τα δύο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια.

β) i. Ομόλογες είναι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες, οπότε:

Απέναντι από τις ίσες γωνίες B, Δ είναι οι πλευρές $A\Gamma$ και EZ , οπότε είναι ομόλογες, απέναντι από τις ίσες γωνίες A, Z είναι οι πλευρές $B\Gamma$ και ΔE , οπότε είναι ομόλογες. Τέλος απέναντι από τις ίσες γωνίες Γ, E είναι οι πλευρές AB και ΔZ , οπότε είναι ομόλογες.



ii. Οι ισότητες των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων είναι:

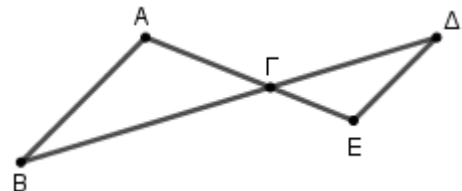
$$\frac{A\Gamma}{EZ} = \frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{AB}{\Delta Z}$$

14538. Στο διπλανό σχήμα τα τμήματα AB και ΔE είναι παράλληλα και τα τμήματα $A\Gamma$ και ΓE είναι τέτοια, ώστε $A\Gamma = 2\Gamma E$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β) i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δύο τριγώνων.

ii. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων;



(Μονάδες 12)

Λύση

α) Επειδή $AB \parallel \Delta E$ είναι $\angle A = \angle E$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Delta E$ που τέμνονται από την AE και $\angle B = \angle \Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Delta E$ που τέμνονται από την BD . Τα δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

β) i. Ομόλογες είναι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες, οπότε:

- Απέναντι από τις ίσες γωνίες A, E ο λόγος των ομόλογων πλευρών είναι $\frac{B\Gamma}{\Gamma \Delta}$

- Απέναντι από τις ίσες γωνίες B, Δ ο λόγος των ομόλογων πλευρών είναι $\frac{A\Gamma}{\Gamma E}$ και

- Απέναντι από τις ίσες γωνίες $\angle A\Gamma B, \angle \Delta \Gamma E$ ο λόγος των ομόλογων πλευρών είναι $\frac{AB}{\Delta E}$

ii. Ο λόγος ομοιότητας είναι ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους, οπότε

$$\lambda = \frac{B\Gamma}{\Gamma \Delta} = \frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Gamma E} = \frac{2\cancel{\Gamma E}}{\cancel{\Gamma E}} = 2$$

14546. Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΒΔ τέμνονται στο Γ, τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ που σχηματίζονται είναι ισοσκελή και οι βάσεις τους ΑΒ και ΔΕ είναι τέτοιες, ώστε $AB = 2 \cdot \Delta E$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ είναι όμοια.
(Μονάδες 13)

β) i. Να γράψετε την ισότητα των λόγων που προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων του ερωτήματος α).

ii. Ποια σχέση συνδέει τις πλευρές ΑΓ και ΓΕ των δύο τριγώνων;

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ισοσκελή με βάσεις τις ΑΒ και ΔΕ, είναι $GA = GB$ και $GD = GE$.

Είναι $\frac{GA}{GD} = \frac{GB}{GE}$ και $\angle AGB = \angle DGE$ ως κατακορυφήν, οπότε τα δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.

β) i. Είναι $\frac{GA}{GE} = \frac{GB}{GD} = \frac{AB}{DE}$

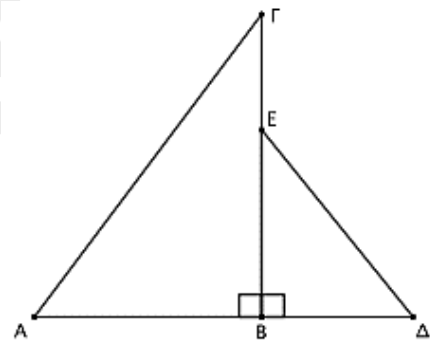
ii. Είναι $\frac{GA}{GE} = \frac{GB}{GD} = \frac{AB}{DE} = \frac{2\Delta E}{\Delta E} = 2 \Leftrightarrow \frac{GA}{GE} = 2 \Leftrightarrow GA = 2 \cdot GE$

16099. Στο διπλανό σχήμα δίνονται $A = \Delta$, $AG = 36$, $BA = 16$ και $EA = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια.
(Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΒ.

(Μονάδες 10)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ έχουν:

- $A = \Delta$ (υπόθεση)

- $\angle ABG = \angle EBD = 90^\circ$

Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

$$\text{Άρα } \frac{AG}{EA} = \frac{AB}{BA} \Leftrightarrow \frac{36}{24} = \frac{AB}{16} \Leftrightarrow 6AB = 144 \Leftrightarrow AB = \frac{144}{6} = 24$$

16086. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 και ϵ_3 είναι παράλληλες. Δίνονται ότι $GE = 4$, $OA = 3$, $OA = 12$, $OB = 6$.

α) Να υπολογίσετε τα τμήματα OG και ΔZ .

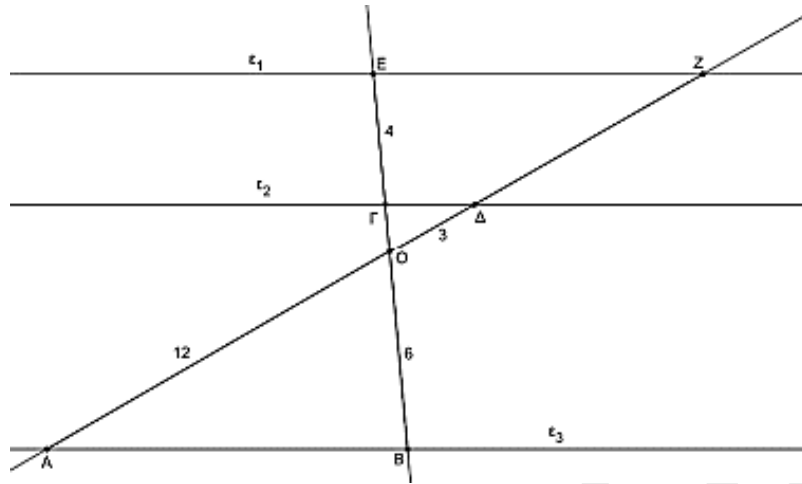
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OEZ και OBA είναι όμοια.

(Μονάδες 09)

γ) Αν $OG = 1.5$ και $\Delta Z = 8$, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{EZ}{AB}$.

(Μονάδες 06)



Λύση

α) Φέρνουμε $\epsilon_4 \parallel \epsilon_2$ που διέρχεται από το O . Τότε από το θεώρημα του Θαλή για τις παράλληλες ϵ_2 , ϵ_4 , ϵ_3 που τέμνονται από τις GB και ΔA , έχουμε

$$\frac{OA}{OA} = \frac{OB}{OG} \Leftrightarrow \frac{12}{3} = \frac{6}{OG} \Leftrightarrow 12OG = 18 \Leftrightarrow OG = \frac{3}{2}$$

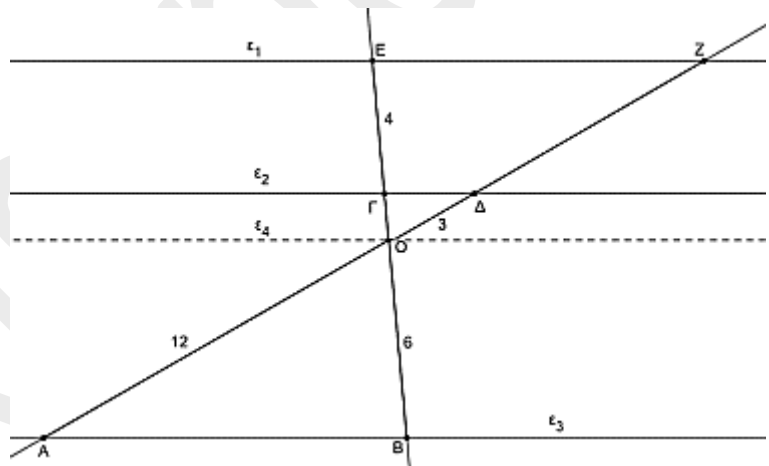
β) Τα τρίγωνα OEZ και OBA έχουν:

- $\angle ZO = \angle BO$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων EZ και AB που τέμνονται από την ZA .

- $\angle ZO = \angle BO$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων EZ και AB που τέμνονται από την EB .
Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια επειδή έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

γ) Από την ομοιότητα των τριγώνων OEZ και OBA έχουμε:

$$\frac{EZ}{AB} = \frac{OZ}{OA} = \frac{OA + \Delta Z}{OA} = \frac{3 + 8}{12} = \frac{11}{12}$$



16100. Στο διπλανό σχήμα δίνονται ότι $AE = 5$, $AG = 4$, $EG = 2$, $DE = 6$, $BE = 15$ και $BD = 12$.

α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{BD}{AG}$, $\frac{DE}{EG}$, $\frac{BE}{AE}$.
(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AEG και BED είναι όμοια.
(Μονάδες 8)

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων AEG και BED και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$A = \dots\dots$, $\Gamma = \dots\dots$, $\angle AEG = \dots\dots$

(Μονάδες 8)

Λύση

α) $\frac{BD}{AG} = \frac{12}{4} = 3$, $\frac{DE}{EG} = \frac{6}{2} = 3$, $\frac{BE}{AE} = \frac{15}{5} = 3$.

β) Τα τρίγωνα AEG και BED είναι όμοια διότι έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία.

γ) Αφού τα τρίγωνα AEG και BED είναι όμοια, τότε θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές τους. Επομένως, έχουμε:

- $\angle A = \angle B$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές EG και DE αντίστοιχα
- $\angle \Gamma = \angle \Delta$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές AE και BE αντίστοιχα
- $\angle AEG = \angle BED$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές AG και BD αντίστοιχα.

16113. Δίνεται το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Delta\Gamma$, E σημείο τομής των διαγώνιων, $AE = 6$, $AB = 8$, $GE = 15$ και $DE = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AEB και GED είναι όμοια.

(Μονάδες 09)

β) Να γράψετε την αναλογία των ομόλογων πλευρών τους.

(Μονάδες 09)

γ) Να υπολογίσετε τα τμήματα BE και $\Gamma\Delta$.

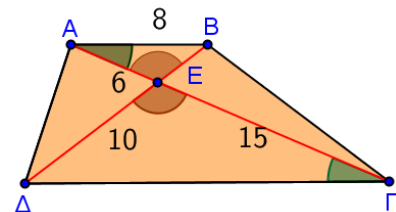
(Μονάδες 07)

Λύση

α) Τα τρίγωνα AEB και GED έχουν :

- $\angle AEB = \angle GED$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την AG και
- $\angle ABE = \angle GDE$ γιατί είναι κατακορυφήν.

Επομένως τα τρίγωνα AEB και GED έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία και είναι όμοια.



β) Αφού τα τρίγωνα AEB και GED είναι όμοια είναι: $\frac{AE}{EG} = \frac{BE}{ED} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$

γ) $\frac{AE}{EG} = \frac{BE}{ED} = \frac{AB}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \frac{6}{15} = \frac{BE}{10} = \frac{8}{\Gamma\Delta}$ $\frac{6}{15} = \frac{BE}{10} \Leftrightarrow 15 \cdot BE = 60 \Leftrightarrow BE = 4$
 $\frac{6}{15} = \frac{8}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow 6 \cdot \Gamma\Delta = 120 \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 20$

16126. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG = 36$ και $BΓ = 24$.

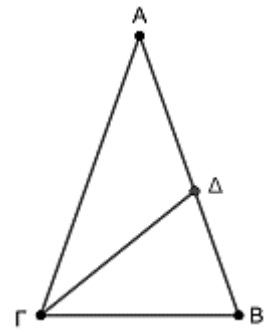
Το σημείο της Δ πλευράς AB είναι τέτοιο ώστε $BΔ = 16$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και ΓΒΔ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{3}{2}$.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ.

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ABΓ και ΓΒΔ έχουν:

- Β κοινή

- $\frac{AB}{ΓΒ} = \frac{BΓ}{BΔ}$ γιατί $\frac{AB}{ΓΒ} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$ και $\frac{BΓ}{BΔ} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$.

Επομένως είναι όμοια αφού έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και την περιεχόμενη στις πλευρές αυτές γωνία κοινή. Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ABΓ και ΓΒΔ είναι $\frac{3}{2}$.

β) Αφού τα τρίγωνα ABΓ και ΓΒΔ είναι όμοια, θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, οπότε

$$\frac{AB}{ΓΔ} = \frac{AB}{ΓΒ} \Leftrightarrow \frac{36}{ΓΔ} = \frac{36}{24} \Leftrightarrow ΓΔ = 24$$

16755. Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ με $BΓ = 2AG$ και σημείο Δ στην πλευρά BΓ τέτοιο ώστε $AG = 2ΓΔ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{BΓ}{AG}$ και $\frac{AG}{ΓΔ}$.

(Μονάδες 8)

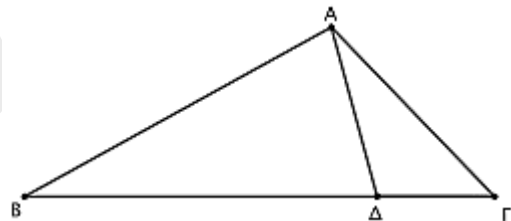
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και ΔΑΓ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ABΓ και ΔΑΓ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$$BAΓ = \dots\dots\dots, \quad B = \dots\dots\dots$$

(Μονάδες 8)



Λύση

$$\alpha) \frac{BΓ}{AG} = \frac{2AG}{AG} = 2 \text{ και } \frac{AG}{ΓΔ} = \frac{2ΓΔ}{ΓΔ} = 2$$

β) Τα τρίγωνα ABΓ και ΔΑΓ έχουν:

- Γ κοινή και

$$- \frac{BΓ}{AG} = \frac{AG}{ΓΔ} = 2$$

Επομένως, τα τρίγωνα ABΓ και ΔΑΓ είναι όμοια, αφού έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

γ) Αφού τα τρίγωνα ABΓ και ΔΑΓ είναι όμοια, τότε θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές τους. Επομένως, έχουμε:

$BAΓ = ΓΔΑ$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές BΓ και AG αντίστοιχα και

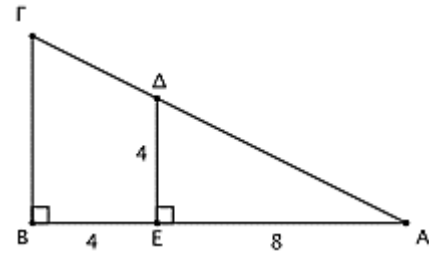
$B = ΔΑΓ$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές AG και ΓΔ αντίστοιχα.

21350. Στο σχήμα δίνονται ότι $B = E = 90^\circ$, $AE = 8$, $EB = 4$ και $\Delta E = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Delta E \Delta$ και $\Delta B \Gamma$ είναι όμοια.
(Μονάδες 10)

β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων $\Delta E \Delta$ και $\Delta B \Gamma$. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B \Gamma$. (Μονάδες 05)



Λύση

α) Τα τρίγωνα $\Delta E \Delta$ και $\Delta B \Gamma$ έχουν $\Delta E \Delta = B = 90^\circ$ και κοινή τη γωνία Δ . Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα $\Delta E \Delta$ και $\Delta B \Gamma$ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{A}$	$\Delta E \Delta = B$	$\Delta E \Delta = \Gamma$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο $\Delta E \Delta$	ΔE	$\Delta \Delta$	ΔE
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο $\Delta B \Gamma$	$B \Gamma$	$\Delta \Gamma$	ΔB

$$\text{Οπότε } \frac{\Delta E}{B \Gamma} = \frac{\Delta \Delta}{\Delta \Gamma} = \frac{\Delta E}{\Delta B}$$

$$\gamma) \text{ Είναι } \frac{\Delta E}{B \Gamma} = \frac{\Delta E}{\Delta B} \Leftrightarrow \frac{4}{B \Gamma} = \frac{4}{12} \Leftrightarrow 8 B \Gamma = 48 \Leftrightarrow B \Gamma = 6$$

21986. Στις πλευρές AB και AG τριγώνου $\Delta B \Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ και E αντίστοιχα ώστε η ΔE να είναι παράλληλη στην $B \Gamma$ και $\Delta \Delta = 1$, όπως στο σχήμα.

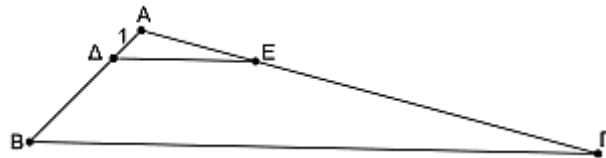
α) Να αποδείξετε ότι $\Delta E \cdot B \Delta = \Gamma E$.
(Μονάδες 10)

β) Αν επιπλέον $B \Delta = \Delta E$ και $\Gamma E = 9$:

i. Να αποδείξετε ότι $B \Delta = 3$ και $\Delta B = 4$.

(Μονάδες 10)

ii. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Delta \Delta E$ και $\Delta B \Gamma$ είναι όμοια και να υπολογίσετε το λόγο ομοιότητάς τους.
(Μονάδες 05)



Λύση

α) Σύμφωνα με το πόρισμα του θεωρήματος του Θαλή, η ευθεία ΔE που είναι παράλληλη στην πλευρά $B \Gamma$ του τριγώνου $\Delta B \Gamma$ χωρίζει τις πλευρές του ΔB και $\Delta \Gamma$ σε μέρη ανάλογα.

$$\text{Επομένως } \frac{\Delta \Delta}{B \Delta} = \frac{\Delta E}{\Gamma E} \Leftrightarrow \frac{1}{B \Delta} = \frac{\Delta E}{\Gamma E} \Leftrightarrow \Gamma E = \Delta E \cdot B \Delta$$

$$\beta) \text{ i. Είναι } \Gamma E = \Delta E \cdot B \Delta \Leftrightarrow 9 = B \Delta \cdot B \Delta \Leftrightarrow B \Delta^2 = 9 \Leftrightarrow B \Delta = 3$$

ii. Από την εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο $\Delta \Delta E$ που ορίζεται από τις πλευρές ΔB και $\Delta \Gamma$ του τριγώνου $\Delta B \Gamma$ και την ΔE που είναι παράλληλη προς την $B \Gamma$ έχει τις πλευρές του ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου $\Delta B \Gamma$, άρα τα τρίγωνα $\Delta \Delta E$ και $\Delta B \Gamma$ είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητας των

$$\text{τριγώνων } \Delta \Delta E \text{ και } \Delta B \Gamma \text{ είναι ίσος με τον λόγο } \frac{\Delta \Delta}{\Delta B} = \frac{1}{4}.$$

4^ο Θέμα

14499. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε ΑΜ τη διάμεσό του και Ε τυχαίο σημείο του τμήματος ΒΜ. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΜ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Ζ.

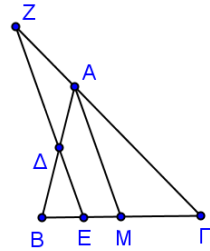
α) Να συμπληρώσετε τις αναλογίες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

i. $\frac{\Delta E}{\dots} = \frac{\dots}{B M} = \frac{B \Delta}{\dots}$ ii. $\frac{\dots}{A M} = \frac{G E}{\dots} = \frac{\dots}{G A}$

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta E + E Z = 2 A M$ για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ. (Μονάδες 13)

Λύση



α) i. Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΒΑΜ έχουν:

1) $\angle B \Delta E = \angle B A M$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $\Delta E // A M$ που τέμνονται από την ΑΒ και

2) τη γωνία Β κοινή.

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια, οπότε οι

αντίστοιχες πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή: $\frac{\Delta E}{A M} = \frac{B E}{B M} = \frac{B \Delta}{B A}$

ii. Τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΓΕΖ έχουν:

1) $\angle G A M = \angle G Z E$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $A M // E Z$ που τέμνονται από την ΑΓ και

2) τη γωνία Γ κοινή.

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια, οπότε οι

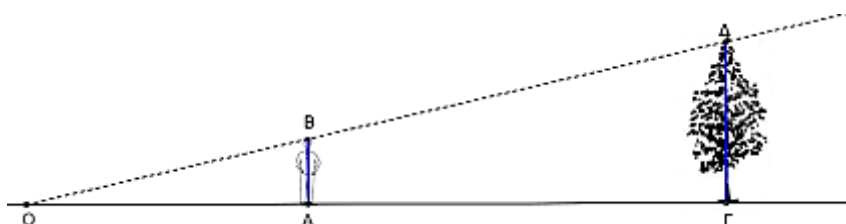
αντίστοιχες πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή: $\frac{Z E}{A M} = \frac{G E}{G M} = \frac{G Z}{G A}$

β) Από το α) i. είναι $\frac{\Delta E}{A M} = \frac{B E}{B M}$ και από το α) ii. είναι $\frac{Z E}{A M} = \frac{G E}{G M}$, με πρόσθεση κατά μέλη

$$\text{έχουμε: } \frac{\Delta E}{A M} + \frac{Z E}{A M} = \frac{B E}{B M} + \frac{G E}{G M} \stackrel{B M = G M}{\Leftrightarrow} \frac{\Delta E + Z E}{A M} = \frac{B E + G E}{B M} \Leftrightarrow \frac{\Delta E + Z E}{A M} = \frac{B \Gamma}{\frac{B \Gamma}{2}} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Delta E + Z E = 2 A M$$

22102. Για να βρει το ύψος ενός δέντρου, ένας μαθητής ύψους 1,60 m σκέφτηκε να μετρήσει το μήκος της σκιάς του δέντρου και το μήκος της δικιάς του σκιάς πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο κάποια χρονική στιγμή μιας ηλιόλουστης ημέρας. Στέκεται σε θέση έτσι ώστε, η άκρη της σκιάς του να συμπίπτει με την άκρη της σκιάς του δέντρου. Ο μαθητής μετράει και βρίσκει ότι η σκιά του έχει μήκος 2m και η σκιά του δέντρου ότι έχει μήκος 5m. Στο σχέδιο που ακολουθεί, τα τμήματα ΟΑ και ΟΓ, με κοινό άκρο Ο, αναπαριστούν τα μήκη των σκιών του μαθητή και του δέντρου αντίστοιχα και έχουν τον ίδιο φορέα ΟΓ, τα δε τμήματα ΑΒ και ΓΔ αναπαριστούν τα αντίστοιχα ύψη μαθητή και δέντρου και θεωρούνται κάθετα στην ΟΓ.



- α) i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AOB και ΓΟΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους. (Μονάδες 12)
- ii. Να βρείτε το ύψος του δέντρου. (Μονάδες 8)
- β) Μπορεί ο μαθητής να χρησιμοποιήσει την ίδια μέθοδο για να μετρήσει το ύψος του ίδιου δέντρου μια άλλη ώρα της ημέρας; Ποια από τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος θα άλλαζαν στην περίπτωση αυτή; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 5)
- (σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)

Λύση

i. Από τα δεδομένα έχουμε ότι οι σκιές ΟΑ και ΟΓ έχουν τον ίδιο φορέα ΟΓ και τα ύψη είναι κάθετα σε αυτόν. Οπότε τα τρίγωνα AOB και ΓΟΔ είναι ορθογώνια με $\angle OAB = \angle OGD = 90^\circ$ και έχουν την οξεία γωνία $\angle O$ κοινή, άρα θα είναι όμοια γιατί ως ορθογώνια έχουν μια οξεία γωνία τους ίση. Αφού τα τρίγωνα AOB και ΓΟΔ είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή ισχύει:

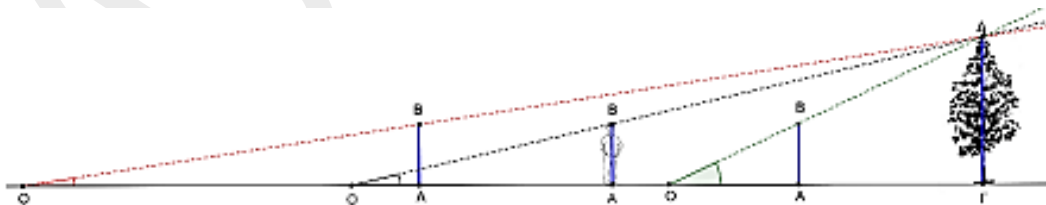
$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OG} = \frac{2}{5} \quad (1)$$

Άρα, ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων AOB και ΓΟΔ είναι $\lambda = \frac{1}{5}$.

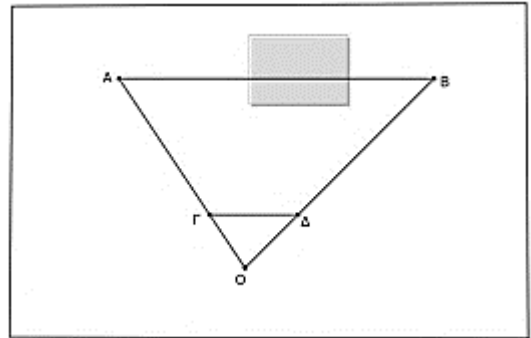
ii. Είναι $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{1,6}{\Gamma\Delta} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 2\Gamma\Delta = 8 \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 4$

Άρα το ύψος του δέντρου είναι 4 m.

β) Όσο ο ήλιος δημιουργεί σκιές κατά τη διάρκεια της ημέρας, καθώς κινείται από την ανατολή προς τη δύση, για να συνεχίσουν οι σκιές του μαθητή και του δέντρου να έχουν το ίδιο άκρο (προϋπόθεση του προβλήματος), θα πρέπει ο μαθητής να αλλάζει θέση ως προς τη θέση του δέντρου που παραμένει σταθερή, έτσι ώστε το κοινό άκρο των σκιών, η θέση του μαθητή και η θέση του δέντρου, θεωρούμενα ως σημεία Ο, Α και Γ αντίστοιχα, να είναι συνευθειακά. Αυτό σημαίνει ότι τα μήκη των σκιών ΟΑ και ΟΓ του μαθητή και του δέντρου θα αλλάζουν. Οι γωνίες Α και Γ που σχηματίζουν τα ύψη ΑΒ, ΓΔ του μαθητή και του δέντρου με την ευθεία ΟΓ θα είναι ορθές. Το μέτρο της γωνίας $\angle O$ με κορυφή τα κοινά άκρα των σκιών θα αλλάζει, καθώς θα αλλάζει η θέση του ήλιου, αλλά θα συνεχίσει να είναι κοινή γωνία των ορθογώνιων τριγώνων με κάθετες πλευρές τα ύψη ΑΒ, ΓΔ του μαθητή και του δέντρου και των αντίστοιχων σκιών ΟΑ και ΟΓ που τα ύψη δημιουργούν. Συνεπώς, τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ σε κάθε περίπτωση θα παραμένουν όμοια και θα ισχύει η αναλογία των ομόλογων πλευρών τους, δηλαδή $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OG}$ και εφόσον είναι γνωστά τα μήκη των σκιών, μπορεί να υπολογιστεί το ύψος του δέντρου. Άρα, ο μαθητής μπορεί να χρησιμοποιήσει την ίδια μέθοδο για να μετρήσει το ύψος του δέντρου μια άλλη ώρα της ημέρας.



22565. Οι μαθητές θέλοντας να μετρήσουν την απόσταση των σημείων Α και Β στην αυλή του σχολείου τους μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται ένα κτίσμα και η απευθείας μέτρηση του μήκους ΑΒ είναι αδύνατη, εργάστηκαν ως εξής. Στην αυλή τους επέλεξαν σημείο Ο ώστε η μέτρηση των τμημάτων ΟΑ και ΟΒ να είναι εφικτή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μέτρησαν και βρήκαν ΟΑ=20m και ΟΒ=30m. Στις ΟΑ και ΟΒ πήραν σημεία Γ και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΟΓ=2m και ΟΔ=3m.



α) Να αποδείξετε ότι:

- i. η ΓΔ είναι παράλληλη με την ΑΒ, (Μονάδες 8)
- ii. τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ είναι όμοια. (Μονάδες 7)

β) Ένας από τους μαθητές υποστηρίζει ότι μπορούν να υπολογίσουν την απόσταση των σημείων Α και Β αν γνωρίζουν την απόσταση των δύο σημείων Γ και Δ. Είναι ο ισχυρισμός του μαθητή αληθής; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

Λύση

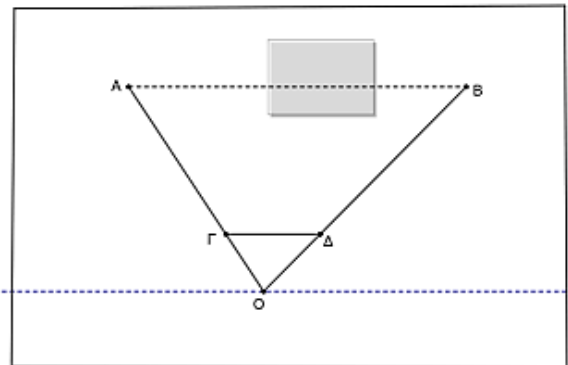
α) i. Είναι $\frac{ΟΓ}{ΟΑ} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$, $\frac{ΟΔ}{ΟΒ} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ άρα

$\frac{ΟΓ}{ΟΑ} = \frac{ΟΔ}{ΟΒ} = \frac{1}{10}$, δηλαδή οι παράλληλες ευθείες ε

και ΓΔ τέμνονται από τις ΟΓ και ΟΔ στα σημεία Ο,Γ και Ο,Δ αντίστοιχα. Για τα σημεία Α και Β των

ευθειών ΟΓ και ΟΔ αντίστοιχα ισχύει $\frac{ΟΓ}{ΟΑ} = \frac{ΟΔ}{ΟΒ}$,

επομένως σύμφωνα με το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή προκύπτει ότι οι ευθείες ΓΔ και ΑΒ είναι παράλληλες.



ii. Επειδή $\frac{ΟΓ}{ΟΑ} = \frac{ΟΔ}{ΟΒ}$ τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες (κοινή η γωνία Ο), άρα είναι όμοια.

β) Εφόσον τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, άρα $\frac{ΟΓ}{ΟΑ} = \frac{ΟΔ}{ΟΒ} = \frac{ΓΔ}{ΑΒ} \Rightarrow \frac{ΓΔ}{ΑΒ} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow ΑΒ = 10 \cdot ΓΔ$, επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι αληθής.

Πυθαγόρειο Θεώρημα

2^ο Θέμα

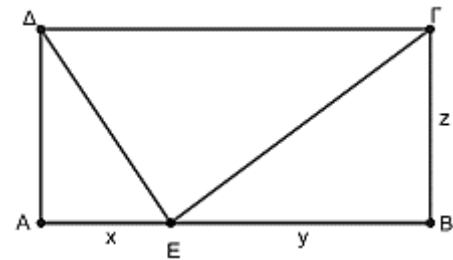
16805. Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 72 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $x = 8$, $y = 16$ και $z = 12$.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ.

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι 72. Οπότε $2AB + 2BC = 72 \Leftrightarrow 2(x + y) + 2z = 72 \Leftrightarrow x + y + z = 36$.

Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα, άρα ισχύει

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{2+4+3} = \frac{36}{9} = 4. \text{ Άρα } x = 2 \cdot 4 = 8, y = 4 \cdot 4 = 16 \text{ και } z = 3 \cdot 4 = 12.$$

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΓΒΕ έχουμε

$$GE^2 = y^2 + z^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400 \Leftrightarrow GE = 20$$

Αντίστοιχα στο τρίγωνο ΔΑΕ για την υποτείνουσα ΔΕ έχουμε

$$DE^2 = AE^2 + DA^2 \Leftrightarrow DE^2 = 8^2 + 12^2 = 208 \Leftrightarrow DE = \sqrt{208} = \sqrt{16 \cdot 13} = 4\sqrt{13}$$

Άρα η περίμετρος του τριγώνου ΔΕΓ ισούται με : $DE + EG + DG = 4\sqrt{13} + 20 + (8 + 16) = 44 + 4\sqrt{13}$

16757. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\angle A = 90^\circ$, $AB = 6$ και $AG = 3$. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ, τέτοιο ώστε $AD = 4$. Φέρουμε την απόσταση ΒΕ της κορυφής Β από την ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το τμήμα ΓΔ.

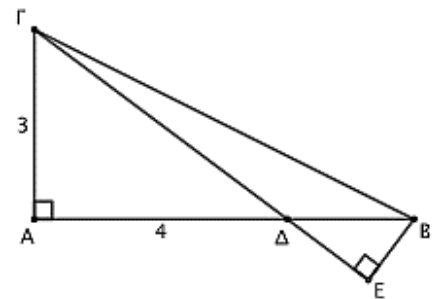
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ.

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$DG^2 = AG^2 + AD^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Leftrightarrow DG = 5$$

β) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ έχουν:

- $\angle A = \angle E = 90^\circ$ (ως κατακορυφήν) και
- $\angle A = \angle E = 90^\circ$

Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

γ) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{E}$	$\hat{A}\hat{D}\hat{G} = \hat{E}\hat{D}\hat{B}$	$\hat{A}\hat{G}\hat{D} = \hat{E}\hat{B}\hat{D}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΓ	ΓΔ	ΑΓ	ΑΔ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΕΔΒ	ΔΒ	ΕΒ	ΕΔ

$$\text{Επομένως } \frac{ΑΓ}{ΕΒ} = \frac{ΓΔ}{ΔΒ} \Leftrightarrow \frac{3}{ΕΒ} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 5ΕΒ = 6 \Leftrightarrow ΕΒ = \frac{6}{5}.$$

17342. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 7, Γ = 45° και ύψος ΑΔ = 4.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΓΔ = 4.

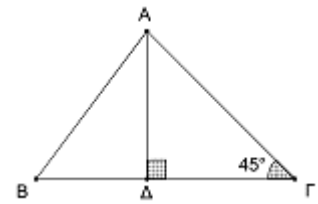
(Μονάδες 5)

ii. ΑΓ = 4√2.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ.

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχει Γ = 45°, οπότε από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε:

ΑΓΔ + 45° = 90° ⇔ ΑΓΔ = 45°, επομένως το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ και είναι ΓΔ = ΑΔ = 4.

β) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, είναι:

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2 = 4^2 + 4^2 = 2 \cdot 4^2 \Leftrightarrow ΑΓ = 4\sqrt{2}$$

γ) Είναι ΒΔ = ΒΓ - ΔΓ = 7 - 4 = 3. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ, είναι:

$$ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΔΒ^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Leftrightarrow ΑΒ = 5$$

21067. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με Α = 90°, ΑΓ = 12 και ΑΒ = 5.

α) Να αποδείξετε ότι ΒΓ = 13.

(Μονάδες 08)

β) Φέρουμε ημιευθεία Βx κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Β και παίρνουμε σε αυτή σημείο Δ, τέτοιο ώστε ΔΓ = 14, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι ΒΔ = 3√3.

(Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε την προβολή της ΒΔ στην ΔΓ. (Μονάδες 09)

Λύση

α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

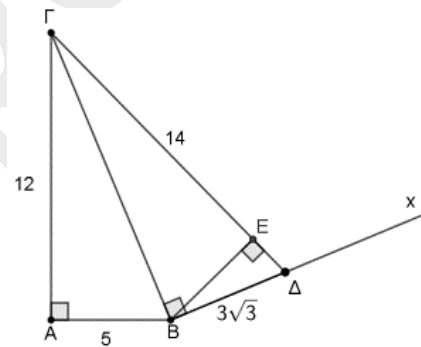
$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Leftrightarrow ΒΓ = 13$$

β) i. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΔΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$ΒΔ^2 = ΔΓ^2 + ΒΓ^2 = 14^2 - 13^2 = 196 - 169 = 27 \Leftrightarrow ΒΔ = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

ii. Φέρνουμε την ΒΕ κάθετη στην ΔΓ, οπότε η προβολή του ΒΔ στην ΔΓ είναι η ΔΕ. Στο ορθογώνιο

τρίγωνο ΓΒΔ ισχύει ότι: ΒΔ² = ΔΕ · ΔΓ ⇔ 27 = ΔΕ · 14 ⇔ ΔΕ = 27/14



22130. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°) εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Αν οι πλευρές του τριγώνου είναι ΒΓ = α, ΑΓ = β και ΑΒ = γ, τότε να αποδείξετε ότι:

α) α = 2R.

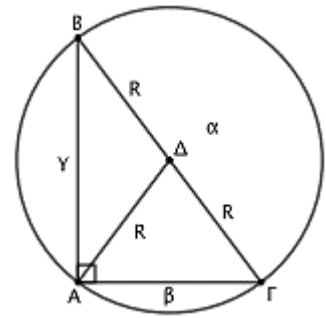
(Μονάδες 12)

β) α² + β² + γ² = 8R².

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Στο σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Αφού η εγγεγραμμένη γωνία A είναι ορθή, τότε θα βαίνει σε ημικύκλιο. Επομένως, η υποτεινούσα BΓ του τριγώνου είναι διάμετρος του κύκλου. Άρα $B\Gamma = \alpha = 2R$.



β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2, \text{ οπότε}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 = 2(2R)^2 = 8R^2$$

22514. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$) με $B\Gamma = 5$ και $AB = 4$.

Να υπολογίσετε:

α) την πλευρά AΓ.

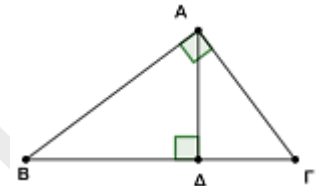
(Μονάδες 9)

β) την προβολή της πλευράς AB πάνω στη BΓ.

(Μονάδες 8)

γ) το ύψος AΔ.

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ έχουμε:

$$A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \Leftrightarrow A\Gamma = 3$$

β) Είναι $AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma \Leftrightarrow B\Delta = \frac{AB^2}{B\Gamma} = \frac{16}{5}$

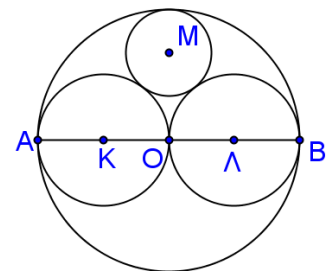
γ) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΔ έχουμε:

$$A\Delta^2 = AB^2 - B\Delta^2 = 4^2 - \left(\frac{16}{5}\right)^2 = 16 - \frac{256}{25} = \frac{400 - 256}{25} = \frac{144}{25} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{12}{5}$$

4^ο Θέμα

14500. Δύο ίσοι κύκλοι (K,R) και (Λ,R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο O. Ένας τρίτος κύκλος (M, ρ) εφάπτεται εξωτερικά με τους δύο κύκλους κέντρων K και Λ. Με κέντρο το σημείο O και ακτίνα 2R γράφουμε κύκλο, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά των 3 παραπάνω κύκλων, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Στον παρακάτω πίνακα, στη στήλη A είναι οι διάκεντροι KM, ΛM και OM των κύκλων με κέντρα K, Λ, M και O και στη στήλη B τα μήκη των διακεντρών αυτών. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης A με τα αντίστοιχα της στήλης B, γράφοντας στη κόλλα σας μόνο τις αντιστοιχίες.



(Μονάδες 06)

Στήλη A	Στήλη B
Διάκεντρος	Μήκος
1. KΛ	i. R
2. ΛM	ii. 2R
3. OM	iii. R+ρ
	iv. 2R-ρ

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MKΛ είναι ισοσκελές και ότι το τμήμα MO είναι το ύψος προς τη βάση του.

(Μονάδες 06)

γ) Να βρείτε την ακτίνα ρ του κύκλου κέντρου M ως συνάρτηση του R όπου R η ακτίνα των κύκλων κέντρων K και Λ.

(Μονάδες 13)

Λύση

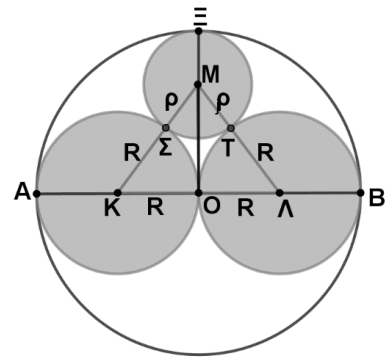
α) 1 → ii, 2 → iii, 3 → iv

β) Η διάκεντρος δύο εφαπτόμενων εξωτερικά κύκλων διέρχεται από το σημείο επαφής των 2 κύκλων και ισούται με το άθροισμα των ακτίνων τους, οπότε $KM = KΣ + ΣM = R + ρ$ και

$$ΛM = ΛT + TM = R + ρ$$

Το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές αφού $KM = ΛM$.

Το Ο είναι το μέσο της πλευράς ΚΛ, άρα η διάμεσος ΜΟ είναι και ύψος,



β) Από πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΟΚ έχουμε

$$KM^2 = KO^2 + MO^2 \Leftrightarrow (\rho + R)^2 = R^2 + (2R - \rho)^2 \Leftrightarrow$$

$$\rho^2 + 2R \cdot \rho + R^2 = R^2 + 4R^2 - 4R \cdot \rho + \rho^2 \Leftrightarrow 6R \cdot \rho = 4R^2 \Leftrightarrow \rho = \frac{2R}{3}$$

16133. Στο διπλανό σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα και έχουν μήκη αντίστοιχα και , οι γωνίες και είναι ορθές και τα σημεία και ανήκουν στην ίδια ευθεία.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΕ.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ είναι όμοια.

(Μονάδες 7)

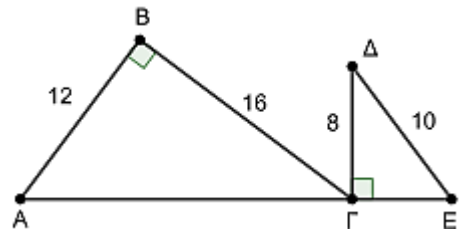
γ) Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών ΑΒ και ΕΔ είναι το Ζ και ΣΗ είναι το ύψος του τριγώνου ΖΑΕ από την κορυφή του . Να αποδείξετε ότι:

i. $EH = 13$,

(Μονάδες 6)

ii. $ZH = \frac{52}{3}$

(Μονάδες 5)



Λύση

α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 \Leftrightarrow ΑΓ = 20$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΕ έχουμε:

$$ΓΕ^2 = ΔΕ^2 - ΔΓ^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Leftrightarrow ΓΕ = 6$$

Είναι $ΑΕ = ΑΓ + ΓΕ = 20 + 6 = 26$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΓΕ έχουν:

$$\frac{ΑΒ}{ΓΕ} = \frac{12}{6} = 2, \quad \frac{ΒΓ}{ΓΔ} = \frac{16}{8} = 2, \quad \frac{ΑΓ}{ΔΕ} = \frac{20}{10} = 2, \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{ΑΒ}{ΓΕ} = \frac{ΒΓ}{ΓΔ} = \frac{ΑΓ}{ΔΕ} = 2, \quad \text{οπότε είναι όμοια, αφού}$$

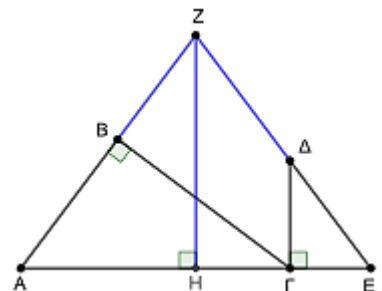
έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία.

γ) i) Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ είναι όμοια, θα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, άρα $\angle A = \angle E$, οπότε το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΕ.

Επειδή το ΖΗ είναι ύψος θα είναι και διάμεσος οπότε το σημείο Η

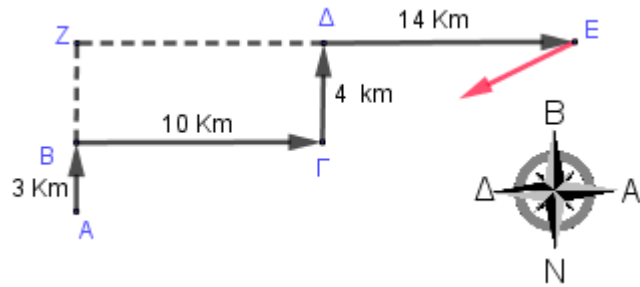
είναι το μέσο της ΑΕ. Επομένως θα είναι $HE = \frac{ΑΕ}{2} = \frac{26}{2} = 13$.

ii) Είναι $ΔΓ \parallel ΖΗ$ γιατί και οι δύο είναι κάθετες στην ΑΕ, οπότε από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΓΔΕ θα έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΗΖΕ, δηλαδή:



$$\frac{\Delta\Gamma}{ZH} = \frac{\Gamma E}{HE} \Leftrightarrow \frac{8}{ZH} = \frac{6}{13} \Leftrightarrow 6ZH = 104 \Leftrightarrow ZH = \frac{104}{6} = \frac{52}{3}$$

14533. Δύο κινητά βρίσκονται στο σημείο Α και σκοπεύουν να μεταβούν στο σημείο Ε, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια προχωράει 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε. Το δεύτερο



κινητό ξεκινάει από το σημείο Α κινείται βόρεια μέχρι το σημείο Ζ και συνεχίζει ανατολικά μέχρι το σημείο Ε. Όταν συναντιούνται στο σημείο Ε επιστρέφουν μαζί στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα. α) i. Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κινητό από το σημείο Α στο σημείο Ε με τον τρόπο που κινήθηκε;

(Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε την απόσταση ΑΕ που διάνυσαν τα δύο κινητά κατά την επιστροφή από το σημείο Ε στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα. (Μονάδες 12)

β) Επιστρέφοντας τα δύο κινητά από το σημείο Ε στο σημείο Α, θα περάσουν από το σημείο Γ; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 08)

Λύση

α) i. Το πρώτο κινητό έκανε τη διαδρομή $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow E$ οπότε η απόσταση που διένυσε ήταν:

$$AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E = 3 + 10 + 4 + 14 = 31 \text{ km}$$

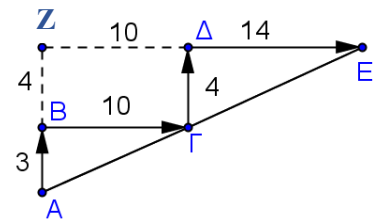
Το δεύτερο κινητό έκανε τη διαδρομή $A \rightarrow Z \rightarrow E$

οπότε η απόσταση που διένυσε ήταν: $AZ + ZE = 7 + 24 = 31 \text{ km}$

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΕ ($\angle Z = 90^\circ$) από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$AE^2 = AZ^2 + ZE^2 = (3 + 4)^2 + (10 + 14)^2 \Leftrightarrow$$

$$AE^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 \Leftrightarrow AE = \sqrt{625} = 25$$



β) Αν τα σημεία Α, Γ και Ε ήταν συνευθειακά θα πρέπει να ισχύει: $ΑΓ + ΓΕ = ΑΕ$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\angle B = 90^\circ$) από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 3^2 + 10^2 = 9 + 100 = 109 \Leftrightarrow ΑΓ = \sqrt{109}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΓ ($\angle \Delta = 90^\circ$) από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$ΕΓ^2 = ΔΕ^2 + ΔΓ^2 = 14^2 + 4^2 = 196 + 16 = 212 \Leftrightarrow ΕΓ = \sqrt{212}$$

$$ΑΓ + ΓΕ = \sqrt{109} + \sqrt{212} \neq 25 \text{ αλλιώς θα είχαμε άρρητο ίσο με ρητό άτοπο.}$$

Επομένως δεν διέρχονται από το σημείο Γ.

17348. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με ΑΒ = 6 και το Ε σημείο της πλευράς ΒΓ, ώστε ΒΕ = 2. Έστω ΔΖ το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο Δ προς την ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι $AE = 2\sqrt{10}$.

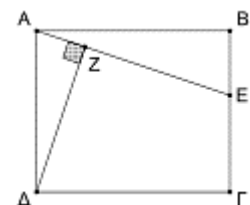
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους.

(Μονάδες 9)

γ) Αν $\Delta Z = ZE$, να υπολογίσετε το μήκος του ΑΔ.

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε:

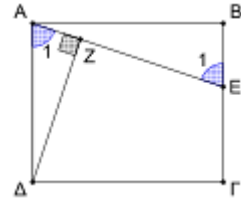
$$AE^2 = AB^2 + BE^2 = 6^2 + 2^2 = 36 + 4 = 40 \Leftrightarrow AE = 2\sqrt{10}$$

β) Τα τρίγωνα ABE και ΔΖΑ έχουν:

- $A_1 = E_1$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ που τέμνονται από την ΑΕ
- $B = Z = 90^\circ$ γιατί από την υπόθεση έχουμε ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και η ΔΖ κάθετη στην ΑΕ.

Τα τρίγωνα ABE και ΔΖΑ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

$$\text{Επομένως ισχύει ότι } \frac{AB}{\Delta Z} = \frac{AE}{\Delta A} = \frac{BE}{AZ} \Leftrightarrow \frac{6}{\Delta Z} = \frac{2\sqrt{10}}{\Delta A} = \frac{2}{AZ} \quad (1).$$



$$\gamma) \text{ Είναι } \frac{6}{\Delta Z} = \frac{2}{AZ} \Leftrightarrow \frac{6}{\Delta Z} = \frac{2}{AE - ZE} \xrightarrow{AZ=ZE} \frac{6}{\Delta Z} = \frac{2}{2\sqrt{10} - \Delta Z} \Leftrightarrow 12\sqrt{10} - 6\Delta Z = 2\Delta Z \Leftrightarrow$$

$$12\sqrt{10} = 8\Delta Z \Leftrightarrow \Delta Z = \frac{3\sqrt{10}}{2}. \text{ Τότε η σχέση (1) γίνεται:}$$

$$\frac{6}{\frac{3\sqrt{10}}{2}} = \frac{2\sqrt{10}}{\Delta A} \Leftrightarrow 6\Delta A = \frac{3\sqrt{10}}{2} \cdot 2\sqrt{10} \Leftrightarrow 6\Delta A = 30 \Leftrightarrow \Delta A = 5$$

21149. Σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε $\text{ΒΑΓ} = 30^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

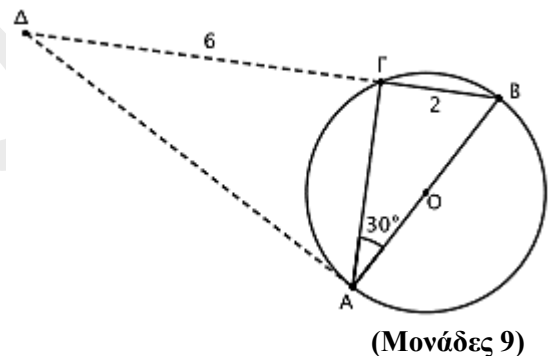
Αν $\text{ΒΓ} = 2$, τότε:

α) Να υπολογίσετε:

i. Την ακτίνα R.

ii. Το μήκος της πλευράς ΑΓ. (Μονάδες 16)

β) Θεωρούμε σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ τέτοιο ώστε $\text{ΓΔ} = 6$. Να εξετάσετε αν το τμήμα ΔΑ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Α. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) i. Η γωνία ΒΓΑ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο ημικύκλιο ΑΒ, οπότε είναι ορθή. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\text{ΒΑΓ} = 30^\circ$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΑΒ, δηλαδή $\text{ΒΓ} = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{2R}{2} \Leftrightarrow R = 2$.

ii. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$\text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΒ}^2 - \text{ΒΓ}^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12 \Leftrightarrow \text{ΑΓ} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε:

$$\text{ΑΔ}^2 = \text{ΑΓ}^2 + \text{ΔΓ}^2 = 12 + 6^2 = 48 \Leftrightarrow \text{ΑΔ} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

Στη συνέχεια, εξετάζουμε αν εφαρμόζεται το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΒΔ. Είναι $\text{ΔΒ}^2 = 8^2 = 64$ και $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΔ}^2 = 4^2 + 48 = 64$.

Επειδή $\text{ΔΒ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΔ}^2$ το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο με $\text{ΒΑΔ} = 90^\circ$, επομένως το τμήμα ΔΑ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Α.

Γενίκευση πυθαγορείου θεωρήματος

2^ο Θέμα

14549. Τα μήκη των πλευρών α, β, γ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι : $\alpha=7, \beta=3$ και $\gamma=5$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς AB στην πλευρά $A\Gamma$ και να υπολογίσετε το μήκος της.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Είναι $\alpha^2 = 49$ και $\beta^2 + \gamma^2 = 9 + 25 = 34$.

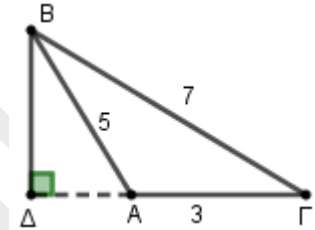
Είναι $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow A > 90^\circ$, οπότε το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

β) Φέρνουμε κάθετη από το B προς την $A\Gamma$. Το σημείο τομής Δ της κάθετης και της $A\Gamma$ είναι η προβολή του B στην $A\Gamma$, οπότε η $A\Delta$ είναι η προβολή της AB στην $A\Gamma$.

Από το θεώρημα αμβλείας γωνίας στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta \Leftrightarrow 49 = 25 + 9 + 6A\Delta \Leftrightarrow 49 - 34 = 6A\Delta \Leftrightarrow$$

$$6A\Delta = 15 \Leftrightarrow A\Delta = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$



16080. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 5$, $B\Gamma = \sqrt{41}$ και $A\Gamma = 8$.

α) Να σχεδιάσετε την προβολή $A\Delta$, της AB στην $A\Gamma$ και να υπολογίσετε το μήκος της.

(Μονάδες 13)

β) Αν $A\Delta = 3$, να υπολογίσετε το μήκος του ύψους $B\Delta$.

(Μονάδες 12)

Λύση

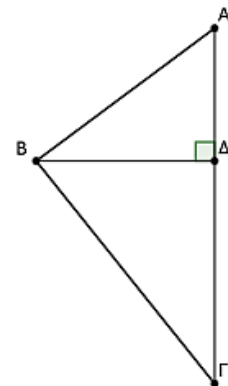
α) Φέρουμε το ύψος $B\Delta$. Η προβολή της AB στην $A\Gamma$ είναι η $A\Delta$. Εφαρμόζοντας το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα για την οξεία γωνία A , έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta \Leftrightarrow (\sqrt{41})^2 = 5^2 + 8^2 + 16A\Delta \Leftrightarrow$$

$$16A\Delta = 48 \Leftrightarrow A\Delta = 3$$

β) Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε:

$$AB^2 = B\Delta^2 + A\Delta^2 \Leftrightarrow B\Delta^2 = AB^2 - A\Delta^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow B\Delta = 4.$$



16101. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 8$, $A\Gamma = 6$ και $B\Gamma = 11$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς $A\Gamma$ πάνω στην AB και να υπολογίσετε το μήκος της.

(Μονάδες 15)

Λύση

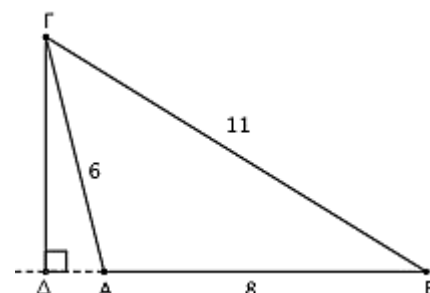
α) Είναι $B\Gamma^2 = 11^2 = 121$ και $AB^2 + A\Gamma^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$, άρα $B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2$, οπότε $A > 90^\circ$ και το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

β) Έστω Δ η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην AB . Τότε, η προβολή της πλευράς $A\Gamma$ πάνω στην AB είναι το τμήμα $A\Delta$, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

Επειδή η γωνία A είναι αμβλεία, από το θεώρημα αμβλείας γωνίας έχουμε:

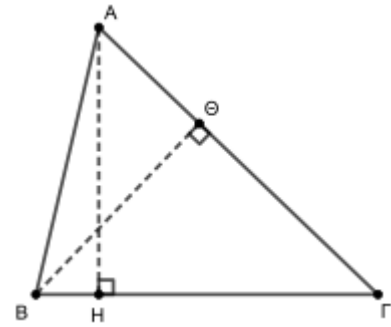
$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2AB \cdot A\Delta \Leftrightarrow 121 = 64 + 36 + 16A\Delta \Leftrightarrow$$

$$21 = 16A\Delta \Leftrightarrow A\Delta = \frac{21}{16}$$



16804. Στο διπλανό τρίγωνο ABΓ φέρουμε τα όψη του ΑΗ και ΒΘ. α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- Η προβολή την πλευράς ΒΓ στην πλευρά ΑΓ είναι το τμήμα
- Η προβολή τη πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΒΓ είναι το τμήμα
- Το τμήμα ΗΓ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά
- Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά
- $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + \dots - 2ΒΓ \cdot \dots$
- $ΒΓ^2 = \dots + ΑΓ^2 - 2\dots \cdot ΑΘ$



(Μονάδες 15)

β) Αν $ΑΒ = 4$, $ΒΓ = 5$ και $ΑΓ = 6$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΘ.

(Μονάδες 10)

Λύση

- Η προβολή της πλευράς ΒΓ στην πλευρά ΑΓ είναι το τμήμα ΘΓ
- Η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΒΓ είναι το τμήμα ΒΗ
- Το τμήμα ΗΓ είναι η προβολή της πλευράς ΑΓ στην πλευρά ΒΓ
- Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ
- $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 - 2ΒΓ \cdot ΒΗ$
- $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΓ \cdot ΑΘ$

β) Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς ΑΒ στην ΑΓ, οπότε εφαρμόζοντας Γενικευμένο Πυθαγόρειο για την πλευρά ΒΓ έχουμε:

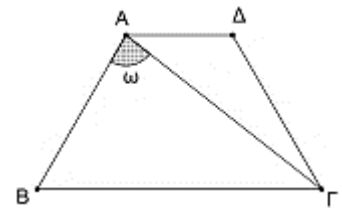
$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΓ \cdot ΑΘ \Leftrightarrow 25 = 16 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot ΑΘ \Leftrightarrow 12ΑΘ = 27 \Leftrightarrow ΑΘ = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}.$$

17343. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι $ΑΔ = 3$, $ΑΒ = ΓΔ = 5$, $ΒΓ = 8$ και $\Delta = 120^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 7$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $\text{συν}\omega = \frac{1}{7}$, όπου ω είναι η γωνία ΒΑΓ.

Δίνεται ότι $\text{συν}120^\circ = -\frac{1}{2}$. (Μονάδες 15)



Λύση

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΓΔ ισχύει

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΓΔ^2 - 2ΑΔ \cdot ΓΔ \cdot \text{συν}\Delta = 25 + 9 - 30\text{συν}120^\circ = 34 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 34 + 15 = 49 \Leftrightarrow ΑΓ = 7.$$

β) Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot \text{συν}\omega \Leftrightarrow 8^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \text{συν}\omega \Leftrightarrow$$

$$64 = 74 - 70\text{συν}\omega \Leftrightarrow 70\text{συν}\omega = 10 \Leftrightarrow \text{συν}\omega = \frac{1}{7}$$

17354. Στα παρακάτω τρίγωνο ΔΕΖ φέρουμε τα όψη του ΔΚ και ΖΙ.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- Η προβολή της πλευράς ΔΕ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα
- Η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα
- Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά
- Το τμήμα ΕΙ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά

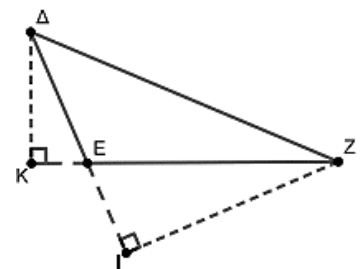
$$\text{v. } ΔΖ^2 = ΔΕ^2 + \dots + 2ΕΖ \cdot \dots$$

$$\text{vi. } ΕΖ^2 = \dots + ΔΖ^2 - 2\dots \cdot ΔΙ$$

(Μονάδες 15)

β) Αν $ΔΕ = 2$, $ΕΖ = 4$ και $ΔΖ = 5$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΙ.

(Μονάδες 10)



Λύση

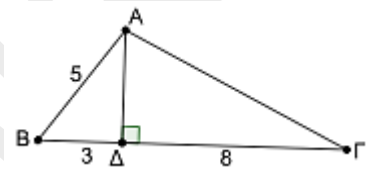
- α) i. Η προβολή της πλευράς ΔΕ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα **ΚΕ**.
 ii. Η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα **ΚΖ**.
 iii. Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς **ΔΖ** στην πλευρά **ΔΕ**.
 iv. Το τμήμα ΕΙ είναι η προβολή της πλευράς **ΕΖ** στην πλευρά **ΔΕ**.
 v. $\Delta Z^2 = \Delta E^2 + \text{ΕΖ}^2 + 2\text{ΕΖ} \cdot \text{ΚΕ}$
 vi. $\text{ΕΖ}^2 = \Delta \text{Ε}^2 + \Delta \text{Ζ}^2 - 2\Delta \text{Ε} \cdot \Delta \text{Ι}$

β) Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΔΕ, οπότε εφαρμόζοντας Γενικευμένο Πυθαγόρειο για την πλευρά ΕΖ έχουμε:

$$\text{ΕΖ}^2 = \Delta \text{Ε}^2 + \Delta \text{Ζ}^2 - 2\Delta \text{Ε} \cdot \Delta \text{Ι} \Leftrightarrow 4^2 = 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot \Delta \text{Ι} \Leftrightarrow 16 = 29 - 4\Delta \text{Ι} \Leftrightarrow 4\Delta \text{Ι} = 13 \Leftrightarrow \Delta \text{Ι} = \frac{13}{4}$$

21302. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 5 και ΑΔ το ύψος του από την κορυφή Α. Αν ΒΔ = 3 και ΓΔ = 8 να αποδείξετε ότι:

- α) ΑΔ = 4. (Μονάδες 07)
 β) ΑΓ = $\sqrt{80}$. (Μονάδες 08)
 γ) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 10)



Λύση

α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε:

$$\text{ΑΔ}^2 = \text{ΑΒ}^2 - \text{ΒΔ}^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow \text{ΑΔ} = 4$$

β) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$\text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΓ}^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80 \Leftrightarrow \text{ΑΓ} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

γ) Είναι $\text{ΒΓ}^2 = (3+8)^2 = 11^2 = 121$ και $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2 = 5^2 + (\sqrt{80})^2 = 25 + 80 = 105$.

Είναι $\text{ΒΓ}^2 > \text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2 \Leftrightarrow \text{Α} > 90^\circ$ επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

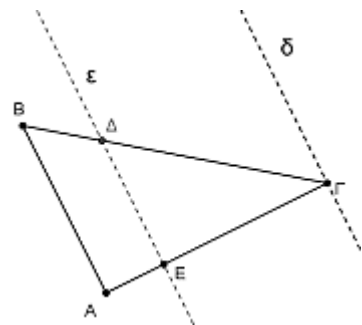
22248. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 9, ΓΑ = 12 και ΓΒ = 15 και ευθείες ε, δ παράλληλες στην ΑΒ, όπως αυτές του σχήματος.
 α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να βρείτε ποια πλευρά είναι η υποτείνουσά του.

(Μονάδες 8)

β) Αν η ευθεία (ε) τέμνει τις πλευρές ΓΑ, ΓΒ σε σημεία Ε και Δ αντίστοιχα έτσι ώστε ΕΑ = 4 και η ευθεία (δ) διέρχεται από το σημείο Γ, τότε να υπολογίσετε

i. το τμήμα ΔΒ, (Μονάδες 8)

ii. τις πλευρές του τριγώνου ΔΕΓ. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Είναι $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2 = \text{ΒΓ}^2$ οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\text{Α} = 90^\circ$ και υποτείνουσα την πλευρά ΓΒ.

β) i. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή για τις παράλληλες ε, δ και ΑΒ που τέμνουν τις ΓΑ και ΓΒ

ισχύει η αναλογία $\frac{\Gamma \Delta}{\Gamma \text{Ε}} = \frac{\Delta \text{Β}}{\text{ΕΑ}} = \frac{\Gamma \text{Β}}{\Gamma \text{Α}} \Leftrightarrow \frac{\Gamma \Delta}{\Gamma \text{Ε}} = \frac{\Delta \text{Β}}{4} = \frac{15}{12} \Rightarrow \frac{\Delta \text{Β}}{4} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \Delta \text{Β} = 5$

ii. Είναι $\Gamma \Delta = \Gamma \text{Β} - \Delta \text{Β} = 15 - 5 = 10$ και $\Gamma \text{Ε} = \Gamma \text{Α} - \text{ΕΑ} = 12 - 4 = 8$.

Το τρίγωνο ΔΕΓ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΓΑ και ΓΒ του τριγώνου ΑΒΓ και την ευθεία ε που είναι παράλληλη στην πλευρά του ΑΒ, οπότε έχει πλευρές ανάλογες στις πλευρές του τριγώνου

$$\text{ΑΒΓ, δηλαδή ισχύει } \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\text{B}} = \frac{\Gamma\text{E}}{\Gamma\text{A}} = \frac{\text{E}\Delta}{\text{A}\text{B}} \Leftrightarrow \frac{10}{15} = \frac{8}{12} = \frac{\text{E}\Delta}{9} \Rightarrow \frac{\text{E}\Delta}{9} = \frac{10^2}{15^3} \Leftrightarrow 3\text{E}\Delta = 18 \Leftrightarrow \text{E}\Delta = 6$$

22512. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 4, ΑΓ = 2 και Γ = 60°.

α) Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΒ.

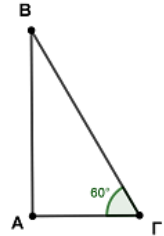
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\text{AB}^2 = \text{AG}^2 + \text{BG}^2 - 2\text{AG} \cdot \text{BG} \cdot \cos \Gamma = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 4 + 16 - 8 = 12 \Leftrightarrow \text{AB} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

β) $\text{AB}^2 + \text{AG}^2 = 12 + 4 = 16 = 4^2 = \text{BG}^2$ οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\text{A} = 90^\circ$ και υποτείνουσα την πλευρά ΓΒ.

$$\text{Είναι } (\text{ABG}) = \frac{1}{2} \text{AB} \cdot \text{AG} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3}$$

4ο Θέμα

21185. Τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα αυτά μπορούν να σχηματίσουν ορθογώνιο τρίγωνο.

(Μονάδες 8)

β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ είναι σχεδιασμένα πάνω σε ένα χαρτί και αυτό το φωτοτυπήσουμε με μεγέθυνση λ%, να αποδείξετε ότι και με τα νέα ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζεται πάλι ορθογώνιο τρίγωνο.

(Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί να σχηματιστεί τρίγωνο με πλευρές 10α, 8β και 6γ.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Αφού τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα,

τότε έχουμε την αναλογία: $\frac{\alpha}{5} = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{3}$.

Έστω ότι $\frac{\alpha}{5} = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{3} = \lambda > 0$, τότε $\alpha = 5\lambda$, $\beta = 4\lambda$ και $\gamma = 3\lambda$.

Είναι $\beta^2 + \gamma^2 = (4\lambda)^2 + (3\lambda)^2 = 16\lambda^2 + 9\lambda^2 = 25\lambda^2 = (5\lambda)^2 = \alpha^2$, οπότε τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ σχηματίζουν τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά α.

β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ σχεδιαστούν πάνω σε ένα χαρτί που φωτοτυπηθεί με μεγέθυνση λ%, τότε τα μέτρα αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων θα πολλαπλασιαστούν επί $\lambda\% = \frac{\lambda}{100}$, $\lambda > 0$, τότε

προκύπτουν νέα ευθύγραμμα τμήματα με μήκη που έχουν μέτρα: $\frac{\lambda}{100}\alpha$, $\frac{\lambda}{100}\beta$ και $\frac{\lambda}{100}\gamma$.

Για τα νέα ευθύγραμμα τμήματα ισχύει:

$$\left(\frac{\lambda}{100}\beta\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{100}\gamma\right)^2 = \left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 \beta^2 + \left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 \gamma^2 = \left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 (\beta^2 + \gamma^2) = \left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 \alpha^2 = \left(\frac{\lambda}{100}\alpha\right)^2$$

δηλαδή ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα, συνεπώς σχηματίζουν πάλι νέο ορθογώνιο τρίγωνο.

γ) Έστω ότι σχηματίζεται τρίγωνο με τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν μήκη με μέτρα 10α , 8β και 6γ , τότε ισχύει η τριγωνική ανισότητα και θα έχουμε:

$$10\alpha < 8\beta + 6\gamma \Leftrightarrow 10 \cdot 5\lambda < 8 \cdot 4\lambda + 6 \cdot 3\lambda \Leftrightarrow 50\lambda < 32\lambda + 18\lambda \Leftrightarrow 50\lambda < 50\lambda \text{ άτοπο.}$$

Άρα δεν σχηματίζεται τέτοιο τρίγωνο.

22400. Τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ενός τριγώνου ΑΒΓ. Δίνεται ότι ΑΒ=9, ΑΓ = 12, ΑΔ = 4 και ΑΕ=3.

α) Έστω ότι στο παραπάνω τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΒΓ = 15 (Σχήμα 1).

Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 7)

ii. ΔΕ = 5.

(Μονάδες 6)

β) Έστω τώρα ότι στο αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΒΓ = 10, (Σχήμα 2).

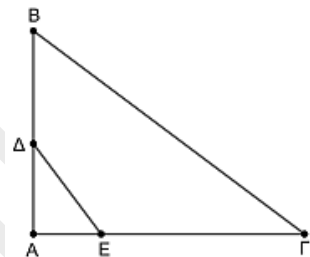
Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ορθογώνιο.

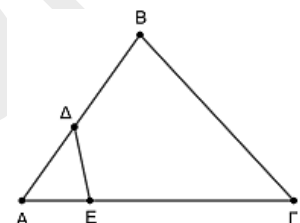
(Μονάδες 6)

ii. $\Delta E = \frac{10}{3}$.

(Μονάδες 6)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Λύση

α) i. Είναι $AB^2 + AG^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2 = BG^2$ οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $A = 90^\circ$ και υποτείνουσα την πλευρά ΓΒ.

ii. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε:

$$\Delta E^2 = \Delta D^2 + A E^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Leftrightarrow \Delta E = 5$$

β) i. Είναι $AB^2 + AG^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \neq 10^2 = BG^2$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ορθογώνιο.

ii. Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$BG^2 = AB^2 + AG^2 - 2AB \cdot AG \cdot \sin A \Leftrightarrow \sin A = \frac{AB^2 + AG^2 - BG^2}{2AB \cdot AG} = \frac{225 - 100}{2 \cdot 9 \cdot 12} = \frac{125}{216}$$

Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε:

$$\Delta E^2 = \Delta D^2 + A E^2 - 2\Delta D \cdot A E \cdot \sin A = 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{125}{216} = 25 - \frac{125}{9} = \frac{225 - 125}{9} = \frac{100}{9} \Leftrightarrow \Delta E = \frac{10}{3}$$

3^ο Θέμα

21102. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και έστω Ε το μέσο της ΔΓ.

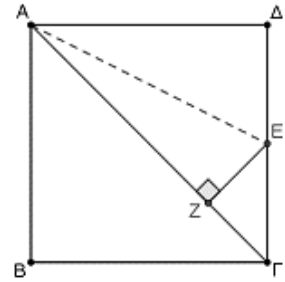
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΑΓ = \alpha\sqrt{2}$. (Μονάδες 09)

ii. $ΑΕ = \alpha \frac{\sqrt{3}}{2}$. (Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε την προβολή του τμήματος ΑΕ στην ΑΓ.

(Μονάδες 07)



Λύση

α) i. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ:

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow ΑΓ = \alpha\sqrt{2}.$$

ii. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ:

$$ΑΕ^2 = ΑΔ^2 + ΔΕ^2 = \alpha^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{5\alpha^2}{4} \Leftrightarrow ΑΕ = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$$

β) Η προβολή του ΑΕ στην ΑΓ είναι το τμήμα ΑΖ. Η γωνία ΖΑΕ είναι οξεία γωνία επειδή οι πλευρές της περιέχονται στην ορθή γωνία ΒΑΔ του τετραγώνου.

Εφαρμόζουμε το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΕΓ:

$$ΕΓ^2 = ΑΕ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΓ \cdot ΑΖ \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}\right)^2 + (\alpha\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \alpha\sqrt{2} \cdot ΑΖ \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha^2}{4} = \frac{5\alpha^2}{4} + 2\alpha^2 - 2\alpha\sqrt{2} \cdot ΑΖ \Leftrightarrow \alpha^2 = 5\alpha^2 + 8\alpha^2 - 8\alpha\sqrt{2} \cdot ΑΖ \Leftrightarrow 8\alpha\sqrt{2} \cdot ΑΖ = 12\alpha^2 \Leftrightarrow ΑΖ = \frac{12\alpha^2}{8\alpha\sqrt{2}} = \frac{3\alpha\sqrt{2}}{4}.$$

Εμβαδό βασικών σχημάτων

2^ο Θέμα

16102. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από το κέντρο Ο φέρουμε ευθεία η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ όπως φαίνεται στο σχήμα.

Να αποδείξετε ότι:

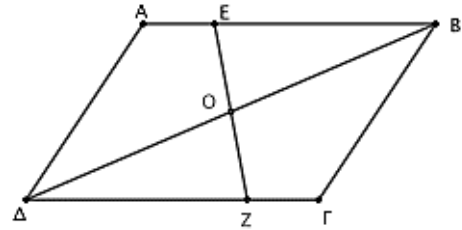
α) $(\Delta OZ) = (BOE)$.

(Μονάδες 10)

β) $(\Delta OEA) = (B\Gamma ZO)$.

(Μονάδες 15)

Λύση



α) Τα τρίγωνα ΔΟΖ και ΒΟΕ είναι ίσα διότι έχουν:

- $\Delta O = BO$ (το Ο είναι μέσο της ΔΒ)

- $\angle ZDO = \angle EBO$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ τεμνόμενων από τη ΒΔ)

- $\angle DOZ = \angle BOE$ (ως κατακορυφήν)

Επομένως, τα τρίγωνα ΔΟΖ και ΒΟΕ θα είναι και ισοδύναμα, δηλαδή $(\Delta OZ) = (BOE)$.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΓΒΔ είναι ίσα, οπότε έχουν και το ίδιο εμβαδό, δηλαδή $(\Delta AB) = (\Delta GB)$

Από το σχήμα έχουμε ότι

$$(\Delta AB) = (\Delta OEA) + (BOE) \quad \text{και} \quad (\Delta GB) = (B\Gamma ZO) + (\Delta OZ)$$

Οπότε, είναι: $(\Delta OEA) + (BOE) = (B\Gamma ZO) + (\Delta OZ)$

Αφού $(BOE) = (\Delta OZ)$, τότε είναι $(\Delta OEA) = (B\Gamma ZO)$.

16817. Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α, θεωρούμε σημείο Ε της πλευράς

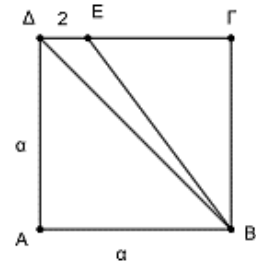
του ΔΓ έτσι ώστε $\Delta E = 2$. Αν γνωρίζουμε ότι: $(BE\Delta) = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{8}$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου α είναι ίση με 8.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ.

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Είναι $(BE\Delta) = \frac{1}{2} \Delta E \cdot B\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \alpha = \alpha$ και $(AB\Gamma\Delta) = \alpha^2$, οπότε:

$$(BE\Delta) = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{8} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\alpha^2}{8} \Leftrightarrow 8\alpha = \alpha^2 \Leftrightarrow 8\alpha - \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha(8 - \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ απορρίπτεται ή } \alpha = 8.$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΕ από πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$BE^2 = B\Gamma^2 + E\Gamma^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \Leftrightarrow BE = 10$$

18560. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Αν ΓΕ είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά ΑΒ και το τμήμα ΑΕ έχει μήκος 9, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓΕ.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό

i. του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

ii. του τραπεζίου ΑΕΓΔ.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Φέρουμε $GE \perp AB$.

$AB = \Gamma\Delta$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Για το τμήμα BE έχουμε:

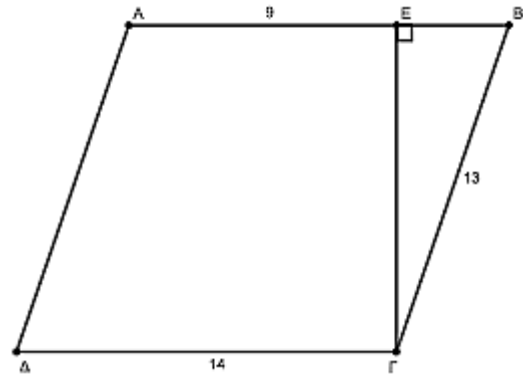
$$BE = AB - AE = 14 - 9 = 5.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓEB εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\Gamma E^2 = \Gamma B^2 - BE^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Leftrightarrow \Gamma E = 12$$

β) i. Το μήκος ΓE είναι η απόσταση των απέναντι πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

$$\text{Άρα } (AB\Gamma\Delta) = A B \cdot \Gamma E = 14 \cdot 12 = 168 \text{ τ.μ.}$$



ii. Το τραπέζιο $AE\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο και οι βάσεις του είναι οι AE και $\Gamma\Delta$. Άρα

$$(AE\Gamma\Delta) = \frac{(AE + \Gamma\Delta) \cdot \Gamma E}{2} = \frac{(9 + 14) \cdot 12}{2} = 23 \cdot 6 = 138 \text{ τ.μ.}$$

18550. Η περίμετρος του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι 36 και το E είναι σημείο στην πλευρά AB . Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

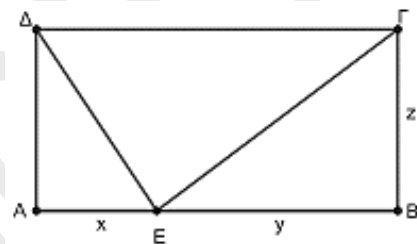
α) Να αποδείξετε ότι $x = 4, y = 8$ και $z = 6$.

(Μονάδες 13)

β) i. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $\Gamma E\Delta$.

ii. Να βρεθεί ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου $\Gamma E\Delta$ προς το εμβαδό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Επειδή η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 36, έχουμε:

$$36 = 2AB + 2\Gamma B = 2z + 2x + 2y \Leftrightarrow x + y + z = 18 \quad (1)$$

Επειδή τα μήκη x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα, ισχύει ότι $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$.

$$\text{Όμως } \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{2+4+3} = \frac{18}{9} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \\ \frac{y}{4} = 2 \Leftrightarrow y = 8 \\ \frac{z}{3} = 2 \Leftrightarrow z = 6 \end{cases}$$

β) i. Είναι $(\Gamma E\Delta) = (AB\Gamma\Delta) - (A\Delta E) - (E\Gamma B) = AB \cdot \Gamma B - \frac{1}{2} AE \cdot A\Delta - \frac{1}{2} EB \cdot \Gamma B \Leftrightarrow$

$$(\Gamma E\Delta) = 12 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 72 - 12 - 24 = 36$$

$$\text{ii. } \frac{(\Gamma E\Delta)}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$$

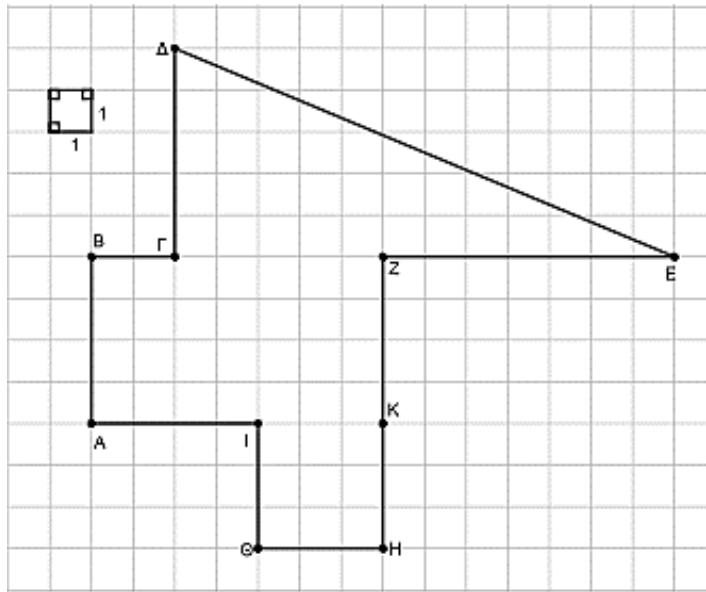
18558. Στο παρακάτω σχήμα:

α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΔΕ.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΑ.

(Μονάδες 15)



Λύση

α) Φέρουμε το τμήμα ΓΖ, το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο με $\Delta\Gamma = 5$ και $\Gamma\text{Ε} = 12$. Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημά έχουμε:

$$\Delta\text{Ε}^2 = \Delta\Gamma^2 + \Gamma\text{Ε}^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Leftrightarrow \Delta\text{Ε} = 13$$

β) Το χωρίο αποτελείται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΕ, το ορθογώνιο ΒΖΚΑ και το τετράγωνο ΚΗΘΙ. Υπολογίζουμε τα εμβαδά τους ξεχωριστά.

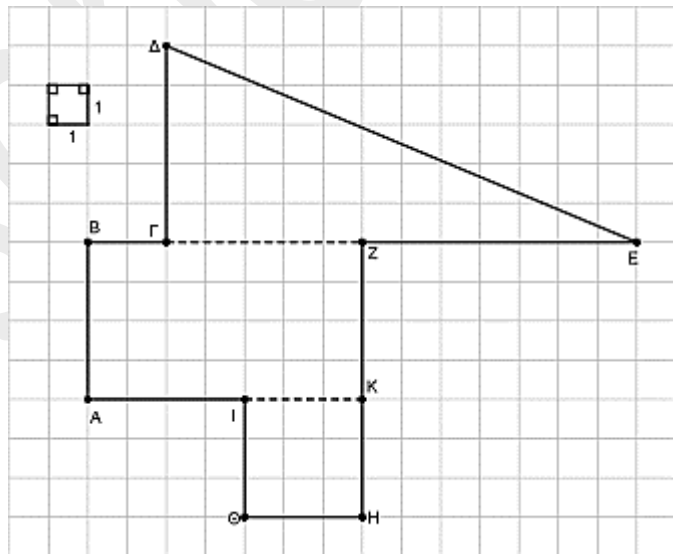
$$(\Delta\Gamma\text{Ε}) = \frac{1}{2} \Gamma\text{Ε} \cdot \Delta\Gamma = \frac{1}{2} 12 \cdot 5 = 30$$

$$(\text{ΒΖΚΑ}) = \text{ΒΖ} \cdot \text{ΑΒ} = 7 \cdot 4 = 28$$

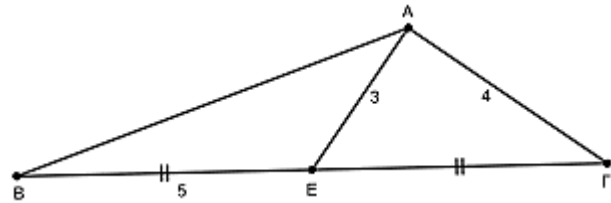
$$(\text{ΚΗΘΙ}) = 3^2 = 9$$

Είναι

$$(\text{ΑΒΓΔΕΖΗΘΙ}) = (\Delta\Gamma\text{Ε}) + (\text{ΒΖΚΑ}) + (\text{ΚΗΘΙ}) = 30 + 28 + 9 = 67$$



18559. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά $B\Gamma$ έχει μήκος 3 και η πλευρά AG είναι ίση με 4. Αν $BE=5$, τότε:



α) Να αποδείξετε ότι η διάμεσος AE είναι κάθετη στην πλευρά AG . (Μονάδες 10)

β) i. Να δικαιολογήσετε γιατί $(ABE) = (AGE)$. (Μονάδες 05)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Το τμήμα BE είναι το μισό της πλευράς $B\Gamma$, αφού η AE είναι διάμεσος στην πλευρά $B\Gamma$, άρα $EG=5$. Στο τρίγωνο AGE μεγαλύτερη πλευρά του είναι η GE , οπότε

$$EG^2 = AE^2 + AG^2 \Leftrightarrow 5^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow 25 = 9 + 16 \text{ ισχύει, άρα το τρίγωνο } AGE \text{ είναι ορθογώνιο με}$$

$$\angle EAG = 90^\circ, \text{ οπότε } AE \perp AG.$$

β) i. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ενός τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, άρα $(ABE) = (AGE)$

$$\text{ii. Είναι } (AGE) = \frac{1}{2} AG \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6, \text{ οπότε } (AB\Gamma) = (AGE) + (AEB) = 2(AGE) = 12.$$

18560. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $B\Gamma=13$ και $\Gamma\Delta=14$. Αν GE είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά AB και το τμήμα AE έχει μήκος 9, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος GE . (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό

i. του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

ii. του τραπέζιου $AE\Gamma\Delta$. (Μονάδες 12)

Λύση

Έστω το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $B\Gamma=13$ και $\Gamma\Delta=14$. Φέρουμε $GE \perp AB$.

α) Είναι $BE = AB - AE = 14 - 9 = 5$.

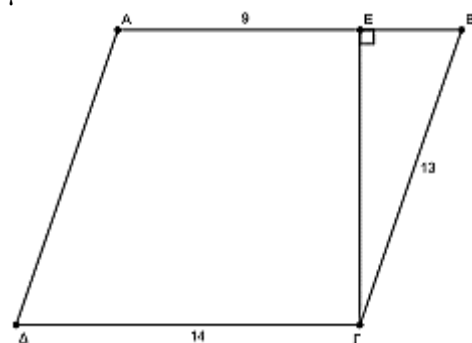
Στο ορθογώνιο τρίγωνο GEB εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$EG^2 = GB^2 - BE^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Leftrightarrow EG = 12$$

β) i. Το μήκος GE είναι η απόσταση των απέναντι πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

$$\text{Άρα } (AB\Gamma\Delta) = A \cdot B \cdot \Gamma E = 14 \cdot 12 = 168$$

$$\text{ii) } (AE\Gamma\Delta) = \frac{(AE + \Gamma\Delta) \cdot GE}{2} = \frac{(9 + 14) \cdot 12}{2} = 23 \cdot 6 = 138$$



21101. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $B\Gamma = \sqrt{3}$, $AB = \sqrt{2}$, $AG = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\angle A = 90^\circ$. (Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 07)

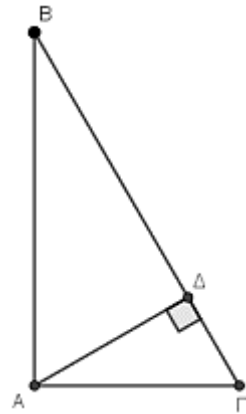
γ) Να υπολογίσετε το ύψος AA . (Μονάδες 09)

Λύση

α) Είναι $B\Gamma^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$ και $AB^2 + AG^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3$, δηλαδή $AB^2 + AG^2 = B\Gamma^2$ άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\angle A = 90^\circ$.

$$\beta) (AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

γ) Φέρουμε το ύψος $A\Delta$. Το εμβαδόν του τριγώνου μπορεί να δοθεί και από τον τύπο $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta$, άρα $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot A\Delta \Leftrightarrow A\Delta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

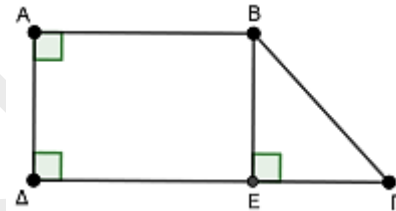


21823. Δίνεται το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος, με $A = \Delta = 90^\circ$ και $A\Delta = 4$, $AB = 5$, $\Delta\Gamma = 8$. Από την κορυφή B του τραpezίου, φέρνουμε την BE κάθετη στην πλευρά $\Delta\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος EG . (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$ του τραpezίου. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(B\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma\Delta)}$. (Μονάδες 8)



Λύση

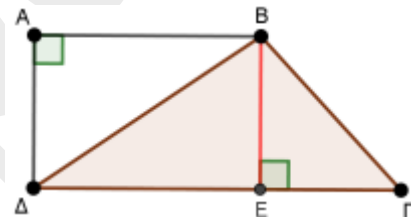
α) Το $ABE\Delta$ είναι ορθογώνιο (έχει τρεις γωνίες ορθές), οπότε $BE = A\Delta = 4$ και $DE = AB = 5$. Άρα η $EG = \Delta\Gamma - DE = 8 - 5 = 3$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $BE\Gamma$ από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$B\Gamma^2 = BE^2 + EG^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Leftrightarrow B\Gamma = 5$$

γ) Είναι $(B\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} \Delta\Gamma \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16$ και $(AB\Gamma\Delta) = \frac{(AB + \Delta\Gamma) \cdot A\Delta}{2} = \frac{(5 + 8) \cdot 4}{2} = 26$, άρα

$$\frac{(B\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}.$$

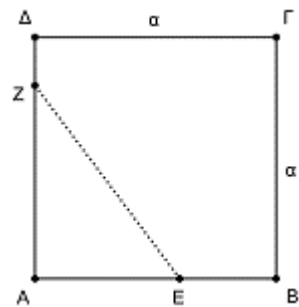


16821. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a . Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $AE = \frac{3}{5} AB$ και στην πλευρά $A\Delta$ θεωρούμε σημείο Z

έτσι ώστε $AZ = \frac{4}{5} A\Delta$.

α) Να υπολογίσετε συναρτήσει του a τα εμβαδά, του τριγώνου AEZ και του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του πενταγώνου $EB\Gamma\Delta Z$ είναι ίσο με 76 να υπολογίσετε το μήκος a της πλευράς του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 13)



Λύση

α) Είναι $(AZE) = \frac{1}{2} AZ \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} A\Delta \cdot \frac{3}{5} AB = \frac{6}{25} a^2$

β) Είναι $(EB\Gamma\Delta Z) = (AB\Gamma\Delta) - (AEZ) \Leftrightarrow 76 = a^2 - \frac{6}{25} a^2 \Leftrightarrow 76 = \left(1 - \frac{6}{25}\right) a^2 \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{25}{25} - \frac{6}{25}\right) \alpha^2 = 76 \Leftrightarrow \frac{19}{25} \alpha^2 = 76 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{25 \cdot 76}{19} = 100 \Leftrightarrow \alpha = 10$$

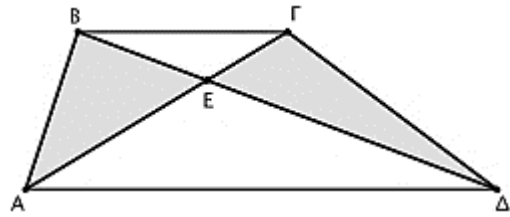
22032. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ) και έστω Ε το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ισοδύναμα.

(Μονάδες 13)

β) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων τριγώνων ΑΒΕ και ΑΓΕ.

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν κοινή βάση την ΑΔ και ύψη ίσα με την απόσταση των παράλληλων ευθειών ΑΒ και ΑΔ και ΒΓ. Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν ίσα ύψη και κοινή βάση, είναι ισεμβαδικά.

β) Είναι $(ABE) = (ABD) - (AED)$ και $(AGE) = (AGD) - (AED)$.
Επειδή $(ABD) = (AGD)$ είναι και $(ABE) = (AGE)$.

22035. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος παριστάνει την κάτοψη ενός κτήματος με ΑΒ = 60 m, ΒΓ = 80 m, $\Delta = 60^\circ$ και ΑΔ = ΓΔ.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου ΑΓ.

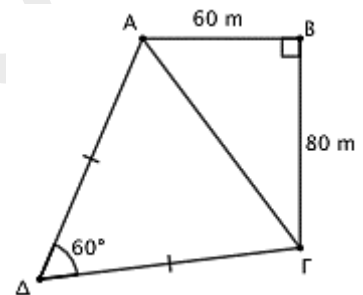
(Μονάδες 09)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοπλευρο.

(Μονάδες 04)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΓ. Πόσο είναι το συνολικό εμβαδόν του κτήματος;

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$AG^2 = BG^2 + AB^2 = 80^2 + 60^2 = 6400 + 3600 = 10.000 \Leftrightarrow AG = 100$$

β) Επειδή το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές και έχει μια γωνία του 60° , είναι ισοπλευρο.

$$\gamma) \text{ Είναι } (ABG) = \frac{1}{2} AB \cdot BG = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 80 = 2400 \text{ m}^2 \text{ και } (ADG) = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{100^2 \sqrt{3}}{4} = 2500\sqrt{3} \text{ m}^2, \text{ άρα}$$

$$(ABGD) = (ABG) + (ADG) = (2400 + 2500\sqrt{3}) \text{ m}^2$$

22331. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος το ΑΗ είναι ύψος και το Δ σημείο του ΑΗ. Δίνονται ΑΒ = 20, ΒΗ = 12, ΓΗ = 5, και ότι το εμβαδόν του ΑΒΔ είναι $(ABD) = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΗ = 16.

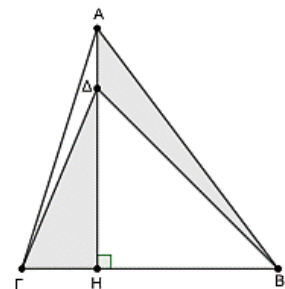
(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ΑΔ = 4.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΗ.

(Μονάδες 6)



Λύση

α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο AHB έχουμε:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256 = 16^2 \Leftrightarrow AH = 16$$

β) Είναι $(AB\Delta) = 24 \Leftrightarrow \frac{1}{2} A\Delta \cdot BH = 24 \Leftrightarrow \frac{1}{2} A\Delta \cdot 12 = 24 \Leftrightarrow 6A\Delta = 24 \Leftrightarrow A\Delta = 4$

γ) Είναι $\Delta H = AH - A\Delta = 16 - 4 = 12$, οπότε $(\Gamma\Delta H) = \frac{1}{2} H\Gamma \cdot H\Delta = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$

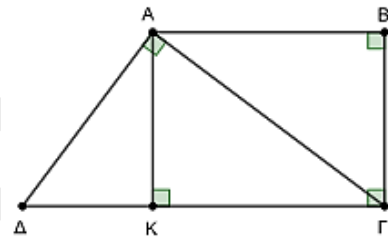
22338. Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ με $B = \Gamma = 90^\circ$ και στο οποίο η πλευρά AΔ και η διαγώνιος AΓ είναι κάθετες. Έστω Κ η προβολή της κορυφής Α στην πλευρά ΓΔ, ΚΔ = 9 και ΚΓ = 16..

α) Να αποδείξετε ότι $AK = 12$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τραπέζιου ABΓΔ.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο AΔΓ το AK είναι το ύψος του, που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΔΓ και οι προβολές των κάθετων πλευρών AΔ και AΓ στην υποτείνουσα ΔΓ είναι αντίστοιχα ΚΔ=9 και ΚΓ=16.

Άρα $AK^2 = K\Delta \cdot K\Gamma = 9 \cdot 16 = 144 = 12^2 \Leftrightarrow AK = 12$

β) $(AB\Gamma\Delta) = \frac{(\Delta\Gamma + AB) \cdot AK}{2} = \frac{(25 + 16) \cdot 12}{2} = 246$

22339. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $A = 90^\circ$ και έστω Δ η προβολή της κορυφής Α στην υποτείνουσα ΒΓ. Έστω επίσης $AB = 15$ και $\Delta B = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $B\Gamma = 25$,

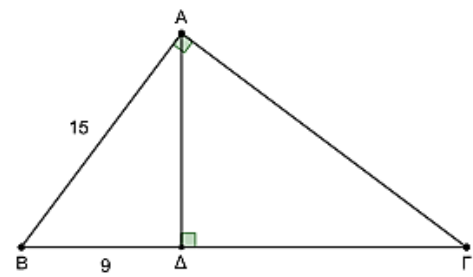
(Μονάδες 9)

ii. $A\Gamma = 20$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

(Μονάδες 7)



Λύση

α) i) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα. Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ

έχουμε: $AB^2 = \Delta B \cdot B\Gamma \Leftrightarrow 15^2 = 9B\Gamma \Leftrightarrow B\Gamma = \frac{225}{9} = 25$.

ii) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ έχουμε:

$$A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2 = 25^2 - 15^2 = 625 - 225 = 400 \Leftrightarrow A\Gamma = 20$$

β) Επειδή το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο, το εμβαδόν του είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 150$

22513. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 12, ΑΓ = 5 και ΒΓ = 13.

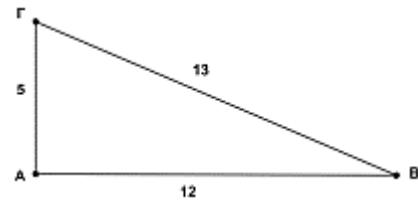
α) Να αποδείξετε ότι $\angle A = 90^\circ$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος u_a .

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Είναι $AG^2 + AB^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2 = BG^2$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\angle A = 90^\circ$.

β) Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot AG = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$, όμως $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} a \cdot u_a \Leftrightarrow 30 = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot u_a \Leftrightarrow u_a = \frac{60}{13}$

4^ο Θέμα

16135. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ = 10 και έστω ότι Δ είναι η προβολή της κορυφής Α στην ΒΓ.

α) Αν ΔΒ = 2 να υπολογίσετε:

i. το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ,

(Μονάδες 7)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 5)

β) Υποθέστε ότι το σημείο Α κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την ΒΓ.

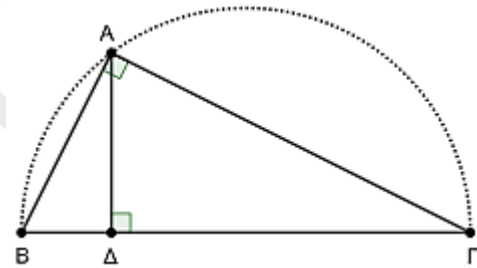
i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $(AB\Gamma) = 5AD$. (Μονάδες 7)

ii. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για όλες τις θέσεις του Α πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την ΒΓ, το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δεν υπερβαίνει το 25».

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)



Λύση

α) i. Είναι ΔΒ = 2 οπότε ΔΓ = ΒΓ - ΔΒ = 8. Όμως σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα. Επομένως $AD^2 = DB \cdot DG = 2 \cdot 8 = 16 \Leftrightarrow AD = 4$.

ii. $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} BG \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$

β) i. Καθώς το σημείο Α κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την ΒΓ, η βάση του τριγώνου ΒΓ παραμένει σταθερή και ίση με 10, ενώ το αντίστοιχο ύψος ΑΔ μεταβάλλεται. Επομένως μεταβάλλεται και το εμβαδόν του τριγώνου, το οποίο θα είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} BG \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 10AD = 5AD$

ii. Έστω Ο το κέντρο του κύκλου με διάμετρο τη ΒΓ.

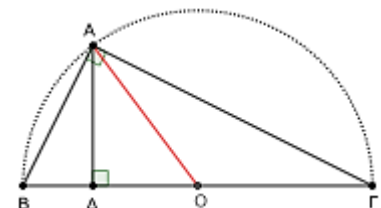
Είναι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = 5.

Αν το Δ δεν ταυτίζεται με το Ο τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΟ είναι $AD < AO \Leftrightarrow AD < 5 \Leftrightarrow 5AD < 25 \Leftrightarrow (AB\Gamma) < 25$.

Αν το Δ ταυτίζεται με το Ο τότε $AD = OA = 5$ και

$5AD = 25 \Leftrightarrow (AB\Gamma) = 25$.

Επομένως σε κάθε περίπτωση $(AB\Gamma) \leq 25$ και ο ισχυρισμός είναι αληθής.



16807. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις ΑΒ = 24, ΒΓ = 12 και σημείο Ε στην ευθεία ΑΒ.

α) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ όταν :

i. Το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ.

ii. Το σημείο Ε ταυτίζεται με την κορυφή Α του ορθογωνίου.

(Μονάδες 16)

β) Αφήνουμε το σημείο Ε να κινηθεί στην προέκταση του τμήματος ΑΒ προς το Β, απομακρυνόμενο από το σημείο Β.

i. Να εξετάσετε αν η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ αυξάνεται ή μειώνεται.

(Μονάδες 05)

ii. Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ συμβαίνει η ίδια μεταβολή με αυτή που απαντήσατε για την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ στο ερώτημα β) i.; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 04)

Λύση

α) i. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΕ είναι ορθογώνια με καθεμιά από τις κάθετες πλευρές τους 12. Οπότε είναι ίσα και ισχύει ΓΕ = ΔΕ.

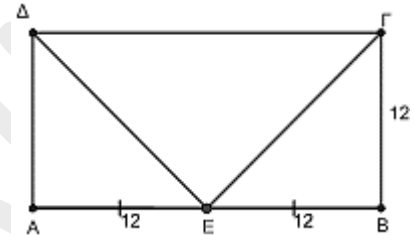
Από το πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει

$$ΓΕ^2 = ΔΕ^2 = 12^2 + 12^2 = 2 \cdot 12^2 \Leftrightarrow ΓΕ = ΔΕ = 12\sqrt{2}.$$

Η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ είναι ίση με

$$24 + 12\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 24 + 2412\sqrt{2} = 24(1 + \sqrt{2})$$

$$(ΓΕΔ) = \frac{1}{2} ΔΓ \cdot ΒΓ = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 12 = 144$$



ii. Αν το σημείο Ε ταυτιστεί με την κορυφή Α του ορθογωνίου τότε το τρίγωνο ΓΕΔ ταυτίζεται με το τρίγωνο ΓΑΔ. Οπότε η περίμετρος του τριγώνου είναι ίση με ΓΑ + ΑΔ + ΔΓ (1).

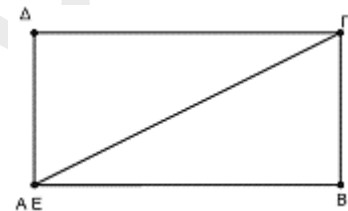
Για την πλευρά ΓΑ που είναι υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε

$$ΓΑ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 24^2 + 12^2 = (2 \cdot 12)^2 + 12^2 = 4 \cdot 12^2 + 12^2 = 5 \cdot 12^2 \Leftrightarrow$$

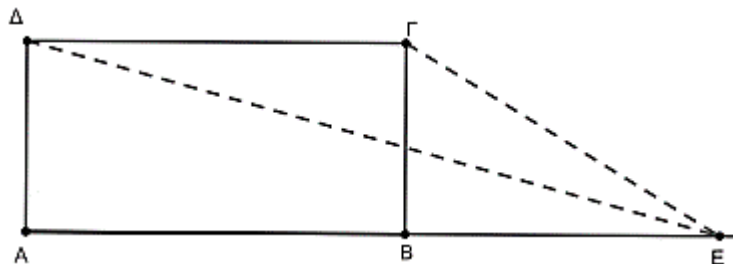
$$ΓΑ = 12\sqrt{5}$$

Το εμβαδό του τριγώνου όταν το σημείο Ε ταυτιστεί με την κορυφή Α ισούται με το εμβαδό του τριγώνου

$$ΓΑΔ \text{ που είναι ίσο με } \frac{ΔΓ \cdot ΑΔ}{2} = 144.$$



β)



i. Αν το σημείο Ε κινηθεί πάνω στη ευθεία ΑΒ που είναι παράλληλη στην πλευρά ΔΓ τότε η πλευρά ΔΓ παραμένει σταθερή αλλά οι δυο άλλες πλευρές του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλονται. Αν το σημείο Ε κινείται στην προέκταση της ΑΒ προς το Β, απομακρυνόμενο από το σημείο Β, τα πλάγια τμήματα ΓΕ και ΔΕ συνεχώς μεγαλώνουν, αφού το ίχνος τους Ε απέχει ολοένα και περισσότερο από τα ίχνη Β και Α των κάθετων τμημάτων ΓΒ και ΔΑ αντίστοιχα. Οπότε η περίμετρος η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλεται και συνεχώς αυξάνεται.

ii. Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ, θα πάρουμε ως βάση τη σταθερή πλευρά του ΔΓ, οπότε το ύψος του προς τη ΔΓ ισούται με την απόσταση των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που είναι σταθερή και ίση με 12. Το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ σε οποιαδήποτε θέση της κορυφής Ε πάνω στην ευθεία ΑΒ είναι ίσο με :

$$\frac{24 \cdot 12}{2} = 144.$$

Παρατηρούμε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι: $(ΑΒΓΔ) = 24 \cdot 12 = 288$, άρα

$$(ΓΕΔ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓΔ).$$

Συμπερασματικά αν το σημείο Ε κινείται στην προέκταση του τμήματος ΑΒ προς το Β απομακρυνόμενο από το σημείο Β, οι πλευρές ΓΕ και ΔΕ του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλονται, η περίμετρος μεταβάλλεται (αυξάνεται) όπως έχει προκύψει στο βί) αλλά το εμβαδό του τριγώνου μένει σταθερό και ίσο με το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου.

17349. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 3 και σημείο Ε της πλευράς ΑΔ, ώστε $ΑΕ = 4 - \sqrt{3}$. το ημιεπίπεδο που ορίζουν η ευθεία ΒΕ και το σημείο Γ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΒΕΖ. Οι ΓΔ και ΕΖ τέμνονται στο σημείο Η και $ΔΗ = \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΒΕ = 2\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$.

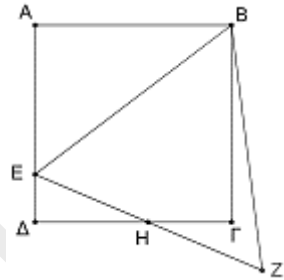
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε το Η είναι το μέσο της ΕΖ.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ισόπλευρου τριγώνου ΒΕΖ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε ότι

$$ΒΕ^2 = ΑΒ^2 + ΑΕ^2 = 3^2 + (4 - \sqrt{3})^2 = 9 + 16 - 8\sqrt{3} + 3 = 28 - 8\sqrt{3} = 4(7 - 2\sqrt{3}) \Leftrightarrow ΒΕ = 2\sqrt{7 - 2\sqrt{3}} \quad (1)$$

β) Είναι $ΔΕ = ΑΔ - ΑΕ = 3 - 4 + \sqrt{3} = \sqrt{3} - 1$.

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΗ έχουμε ότι

$$ΕΗ^2 = ΕΔ^2 + ΔΗ^2 = (\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 3 = 7 - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow ΕΗ = \sqrt{7 - 2\sqrt{3}} \quad (2)$$

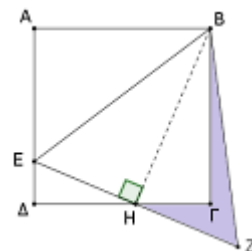
Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $ΕΗ = \frac{ΒΕ}{2}$. Όμως $ΒΕ = ΕΖ$ γιατί το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ισόπλευρο, άρα

$$ΕΗ = \frac{ΕΖ}{2}, \text{ οπότε το Η είναι μέσο του ΕΖ.}$$

γ) Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου ισούται με τη διαφορά του εμβαδού του τριγώνου ΒΓΗ από το τρίγωνο ΒΖΗ, δηλαδή $(ΒΖΗ) - (ΒΓΗ)$.

$$\text{Άρα } (ΒΖΗ) - (ΒΓΗ) = \frac{ΒΕ^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} ΒΓ \cdot ΒΗ \Leftrightarrow$$

$$(ΒΖΗ) - (ΒΓΗ) = \frac{4(7 - 2\sqrt{3})}{4} - \frac{1}{2} 3 \cdot (3 - \sqrt{3}) = \dots = \frac{10\sqrt{3} - 15}{2}$$



18173. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ \parallel ΓΔ$ και $ΓΔ = 2ΑΒ$. Δίνεται επίσης ότι το σημείο Κ είναι μέσο της ΓΔ και Μ τυχαίο σημείο στην ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

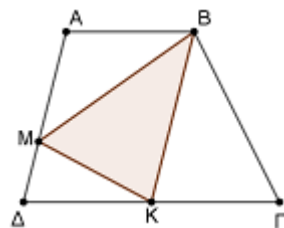
i. $(ΒΚΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒΚΔ).$

(Μονάδες 09)

ii. $(ΒΜΚ) = (ΒΚΓ)$

(Μονάδες 09)

β) Δίνεται η πρόταση: «Αν το σημείο Μ κινείται πάνω στο εσωτερικό της ΑΔ, τότε ο λόγος των εμβαδών $(ΑΒΓΔ)$ και $(ΒΜΚ)$ παραμένει σταθερός και ίσος με 3». Να διερευνήσετε την ορθότητα της πρότασης αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 07)



Λύση

α) Επειδή $\Gamma\Delta = 2AB$ και K μέσο της $\Gamma\Delta$, θα έχουμε $AB \parallel \Delta K$, οπότε το $ABK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και $BK \parallel A\Delta$.

i. Φέρουμε την BE κάθετη στην $\Gamma\Delta$. Τότε το BE είναι ύψος από την κορυφή B του τριγώνου $BK\Gamma$ αλλά και του παραλληλογράμμου $ABK\Delta$.

$$(ABK\Delta) = \Delta K \cdot BE \text{ και } (BK\Gamma) = \frac{K\Gamma \cdot BE}{2}. \text{ Όμως επειδή το } K \text{ είναι μέσο της } \Delta\Gamma, \text{ έχουμε } \Delta K = K\Gamma.$$

$$\text{Έτσι έχουμε } (BK\Gamma) = \frac{\Delta K \cdot BE}{2} = \frac{(ABK\Delta)}{2}.$$

ii. Φέρουμε το ύψος $M\Theta$ του τριγώνου BMK .

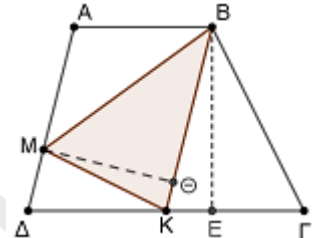
$$\text{Είναι } (BMK) = \frac{BK \cdot M\Theta}{2} = \frac{(ABK\Delta)}{2}, \text{ άρα } (BK\Gamma) = (BMK).$$

β) Από το α.ii) έχουμε ότι $2(BMK) = (ABK\Delta)$ και $(BMK) = (BK\Gamma)$.

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $3(BMK) = (ABK\Delta) + (BK\Gamma) = (AB\Gamma\Delta)$,

$$\text{δηλαδή } \frac{(AB\Gamma\Delta)}{(BMK)} = 3. \text{ Άρα, η πρόταση είναι σωστή.}$$

Ο λόγος των εμβαδών είναι σταθερός και ίσος με 3.



18553. Δίνεται τετράγωνο με πλευρά a και σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma = AB$.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του a :

i. Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

ii. Το μήκος της πλευράς $\Sigma\Gamma$ του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε τυχαίο σημείο Σ' στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma' > B\Sigma$. Να συγκρίνετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

i. Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma'\Delta\Gamma$ με το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

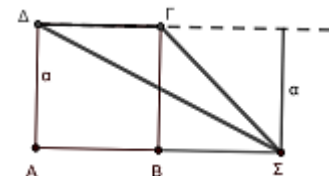
ii. Το μήκος της πλευράς $\Sigma'\Gamma$ με το μήκος της πλευράς $\Sigma\Gamma$ των τριγώνων $\Sigma'\Delta\Gamma$ και $\Sigma\Delta\Gamma$ αντίστοιχα.

iii. Τις αποστάσεις του σημείου Δ από τις ευθείες $\Sigma\Gamma$ και $\Sigma'\Gamma$.

(Μονάδες 15)

Λύση

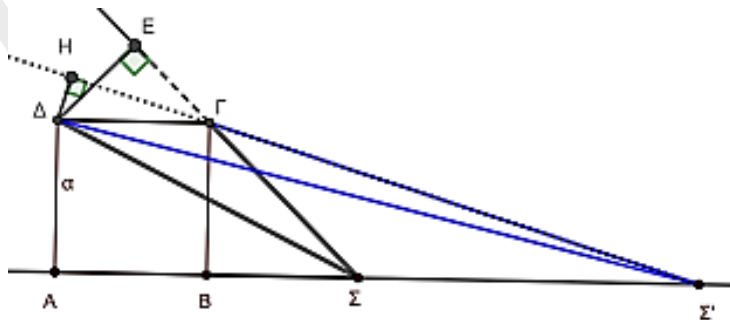
α) i. Για να υπολογίσουμε το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$ μπορούμε να πάρουμε ως βάση την πλευρά $\Delta\Gamma$, οπότε το ύψος είναι η απόσταση της κορυφής Σ από την ευθεία $\Delta\Gamma$ που είναι ίση με a . Άρα $(\Sigma\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} a \cdot a = \frac{a^2}{2}$.



ii. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $\Sigma B\Gamma$ έχουμε:

$$\Sigma\Gamma^2 = \Sigma B^2 + B\Gamma^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Leftrightarrow \Sigma\Gamma = a\sqrt{2}$$

β)



i. Τα τρίγωνα $\Sigma'\Delta\Gamma$ και $\Sigma\Delta\Gamma$ έχουν κοινή βάση τη $\Delta\Gamma$ και ύψος ίσο με την απόσταση των παραλλήλων πλευρών AB και $\Delta\Gamma$, αφού οι κορυφές τους Σ και Σ' βρίσκονται στην ευθεία $AB \parallel \Delta\Gamma$. Οπότε τα τρίγωνα

αυτά έχουν και ίσα εμβαδά. $(\Sigma'\Delta\Gamma) = (\Sigma\Delta\Gamma) = \frac{a^2}{2}$.

ii. Από το σημείο Γ έχουμε το κάθετο τμήμα ΓΒ προς την ευθεία ΑΒ και τα πλάγια ΓΣ και ΓΣ'. Τα ίχνη Σ και Σ' των πλάγιων τμημάτων ΓΣ και ΓΣ' αντίστοιχα είναι τέτοια ώστε οι αποστάσεις τους από το ίχνος Β του κάθετου ΓΒ να είναι άνισες και συγκεκριμένα $B\Sigma' > B\Sigma$, οπότε και τα αντίστοιχα πλάγια είναι ομοίως άνισα δηλαδή $\Gamma\Sigma' > \Gamma\Sigma$.

iii. Η απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία ΣΓ είναι ίση με το μήκος του τμήματος ΔΕ και η απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία Σ'Γ είναι ίση με το μήκος του τμήματος ΔΗ.

Είναι $(\Sigma'\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} \Sigma'\Gamma \cdot \Delta\text{H}$ και $(\Sigma\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} \Sigma\Gamma \cdot \Delta\text{E}$, οπότε:

$$(\Sigma'\Delta\Gamma) = (\Sigma\Delta\Gamma) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \Sigma'\Gamma \cdot \Delta\text{H} = \frac{1}{2} \Sigma\Gamma \cdot \Delta\text{E} \Leftrightarrow \Sigma'\Gamma \cdot \Delta\text{H} = \Sigma\Gamma \cdot \Delta\text{E} \Leftrightarrow \frac{\Sigma'\Gamma}{\Sigma\Gamma} = \frac{\Delta\text{E}}{\Delta\text{H}}$$

έχουμε $\Delta\text{E} > \Delta\text{H}$. Δηλαδή η απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία Σ'Γ είναι μικρότερη από την απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία ΣΓ.

18557. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ, ώστε $AB > \Gamma\Delta$. Από τις κορυφές Γ και Δ φέρουμε $\Gamma\text{E} \parallel \text{AD}$ και $\Delta\text{Z} \parallel \text{GB}$, με Ε και Ζ σημεία στην πλευρά ΑΒ του τραπεζίου.

α) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τετραπλεύρων ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ. (Μονάδες 9)

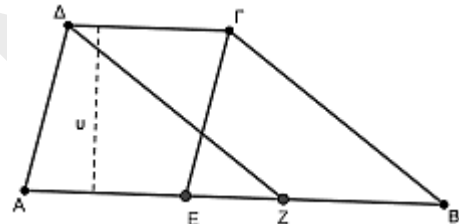
β) Να εκφράσετε τις περιμέτρους των τετραπλεύρων ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ ως συνάρτηση των πλευρών του τραπεζίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 8)

γ) Πώς θα πρέπει να κατασκευάσουμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ ώστε τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ να έχουν ίσες περιμέτρους και ίσα εμβαδά; (Μονάδες 8)

Λύση

α) Τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ έχουν τις απέναντι πλευρές τους ανά δύο παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμα.

Για τα εμβαδά τους έχουμε: $(\text{ΑΔΓΕ}) = \Delta\Gamma \cdot \upsilon$ (1), όπου υ είναι το ύψος του τραπεζίου ή αλλιώς η απόσταση των βάσεων του. $(\text{ΒΓΔΖ}) = \Delta\Gamma \cdot \upsilon$ (2), όπου υ είναι το ύψος του τραπεζίου. Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ είναι ισεμβαδικά.



β) Το τετράπλευρο ΑΔΓΕ έχει περίμετρο

$\Pi_1 = \text{AD} + \Delta\Gamma + \Gamma\text{E} + \text{EA}$, αλλά οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες αφού είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $\Pi_1 = 2 \cdot \text{AD} + 2 \cdot \Delta\Gamma$.

Το τετράπλευρο ΒΓΔΖ είναι επίσης παραλληλόγραμμο οπότε έχει περίμετρο

$$\Pi_2 = \text{BG} + \Delta\Gamma + \Delta\text{Z} + \text{ZB} = 2 \cdot \text{BG} + 2 \cdot \Delta\Gamma$$

γ) Από το ερώτημα α) έχουμε ότι τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ έχουν ίσα εμβαδά ανεξάρτητα από τη μορφή που έχει το αρχικό τραπέζιο. Για να έχουν και ίσες περιμέτρους θα πρέπει $\text{AD} = \text{BG}$, δηλαδή το αρχικό τραπέζιο να έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες, οπότε το τραπέζιο ΑΒΓΔ πρέπει να είναι ισοσκελές.

18562. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος της διαγωνίου ΒΔ ισούται με $\alpha\sqrt{2}$ και να βρείτε το εμβαδό του.

(Μονάδες 05)

β) i. Να σχεδιάσετε το τετράγωνο ΒΑΖΗ έτσι ώστε το σημείο Α να είναι εσωτερικό σημείο του και να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι το κέντρο του τετραγώνου ΒΑΖΗ. (Μονάδες 07)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΒΑΖΗ και να το συγκρίνετε με το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 08)

γ) Επαναλαμβάνουμε το σχεδιασμό όπως περιεγράφηκε παραπάνω και σχηματίζουμε νέο τετράγωνο, με πλευρά κάθε φορά, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου. Δηλαδή με πλευρά τη διαγώνιο ΔΗ του τετραγώνου ΒΑΖΗ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο, το ΔΗΘΚ. Με πλευρά τη διαγώνιο ΗΚ του ΔΗΘΚ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο κ.ο.κ. Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του κα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ, πόσες φορές

ακόμα πρέπει να επαναλάβουμε το σχεδιασμό αυτό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

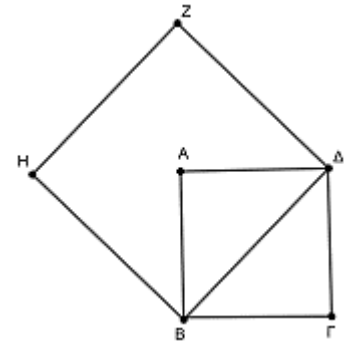
(Μονάδες 05)

Λύση

α) Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$ΒΔ^2 = ΑΒ^2 + ΑΔ^2 = α^2 + α^2 = 2α^2 \Leftrightarrow ΒΔ = α\sqrt{2}$$

Για το εμβαδόν του ΑΒΓΔ, έχουμε: $(ΑΒΓΔ) = α^2$.



β) i. Τα τμήματα ΔΑ και ΒΑ είναι κάθετα μεταξύ τους ως πλευρές του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ. Είναι $ΒΔΑ = 45^\circ$ και $ΒΖΔ = 90^\circ$, άρα

$ΑΔΖ = 45^\circ$. Δηλαδή το τμήμα ΔΑ διχοτομεί τη γωνία Δ του τετραγώνου, άρα το ΔΑ ανήκει στη διαγώνιο του τετραγώνου ΒΔΖΗ.

Ομοίως η ΒΑ διχοτομεί τη γωνία Β του τετραγώνου ΒΔΖΗ και το ΒΑ ανήκει στην άλλη διαγώνιο του.

Οι δύο διαγώνιες του τετραγώνου ΒΔΖΗ τέμνονται στο σημείο Α, δηλαδή το Α είναι το κέντρο του.

ii. Είναι $(ΒΔΖΗ) = ΒΔ^2 = (α\sqrt{2})^2 = 2α^2 = 2(ΑΒΓΔ)$

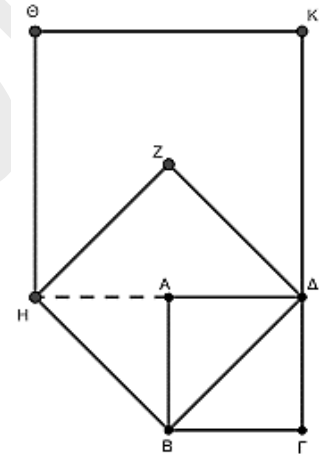
γ) Στο τετράγωνο ΒΔΖΗ η πλευρά του ισούται με $α\sqrt{2}$ επομένως η διαγώνιός του ΔΗ, σύμφωνα με το α) ερώτημα, κα είναι ίση με $α\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2α$. Επομένως η πλευρά του τετραγώνου ΔΗΘΚ είναι 2α, οπότε $(ΔΗΘΚ) = 4α^2$.

Συγκρίνοντας το εμβαδό του τετραγώνου ΔΗΘΚ με το εμβαδό του ΒΔΖΗ παρατηρούμε ότι $(ΔΗΘΚ) = 2(ΒΔΖΗ)$, όπως και $(ΒΔΖΗ) = 2(ΑΒΓΔ)$. Επομένως $(ΔΗΘΚ) = 2(ΒΔΖΗ) = 4(ΑΒΓΔ)$.

Δηλαδή, σχεδιάζοντας τετράγωνο με πλευρά τη διαγώνιο ενός τετραγώνου, το νέο τετράγωνο έχει διπλάσιο εμβαδό από το προηγούμενο του. Το αρχικό τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά ίση με α, έχει εμβαδό $α^2$, το ΒΔΖΗ έχει εμβαδό $2α^2$, το ΔΗΘΚ έχει εμβαδό $4α^2$.

Σχεδιάζοντας τετράγωνο με πλευρά τη διαγώνιο του ΔΗΘΚ θα προκύψει τετράγωνο με εμβαδό $8α^2$.

Επομένως για να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του κα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ, θα πρέπει να κάνουμε τη διαδικασία αυτή συνολικά τέσσερις φορές. Δηλαδή, μετά το τετράγωνο ΔΗΘΚ του σχήματος θα χρειαστεί να φτιάξουμε, όπως περιεγράφηκε, δύο ακόμη τετράγωνα.



18564. Ο παππούς του Πέτρου έχει έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου και θέλει να φυτέψει στον μισό διάφορα λουλούδια και στο υπόλοιπο γκαζόν. Λέει λοιπόν στον Πέτρο ότι έχει σκεφτεί κάποιους απλούς τρόπους να τον χωρίσει σε δύο κομμάτια που να έχουν το ίδιο εμβαδό.

α) Να σχεδιάσετε δύο (2) τρόπους με τους οποίους χωρίζεται ο κήπος σε δύο κομμάτια ίδιου εμβαδού και να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας. (Μονάδες 10)

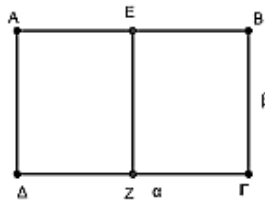
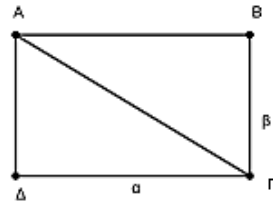
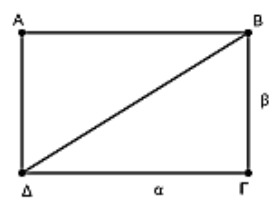
β) Ο Πέτρος προτείνει στον παππού του έναν δικό του τρόπο για το χωρισμό. Για να ορίσει το κομμάτι που κα φυτεύει με λουλούδια χρησιμοποιεί τρεις πέτρες. Τοποθετεί την πρώτη πέτρα σε ένα εσωτερικό σημείο της μιας πλευράς του κήπου και τις άλλες δύο στις απέναντι κορυφές του ορθογωνίου. Δείχνει στον παππού του το τρίγωνο που σχηματίζεται εξηγώντας του πως είναι το μισό του κήπου. Προτείνει δε στον παππού του, το τριγωνικό χωρίο που σχηματίζεται, να το μετακινήσει εκείνος σε όποια θέση νομίζει καλύτερα μετακινώντας μόνο την πρώτη πέτρα, χωρίς παρ' όλα αυτά να αλλάξει το εμβαδό του.

i. Να σχεδιάσετε τον τρόπο που προτείνει ο Πέτρος και να αποδείξετε ότι, το εμβαδό του σχηματιζόμενου τριγωνικού χωρίου είναι το μισό του κήπου. (Μονάδες 08)

ii. Τι εννοεί ο Πέτρος λέγοντας ότι «το τριγωνικό χωρίο μπορεί να μετακινηθεί όταν αλλάζει η θέση της πρώτης πέτρας σε εσωτερικό σημείο της πλευράς του κήπου και παρ' όλα αυτά δεν αλλάζει το εμβαδό του»; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

Λύση

α)

1^η περίπτωση2^η περίπτωση3^η περίπτωση4^η περίπτωση

Κάποιοι τρόποι με τους οποίους μπορεί να χωριστεί ένα ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία είναι είτε φέροντας τις μεσοπαράλληλες των απέναντι πλευρών του ορθογωνίου είτε τις διαγώνιες του.

Οι δύο πρώτες περιπτώσεις όπως και η 3η και 4η θεωρούνται διαφορετικές αφού το χωρίο είναι κήπος και έχει σημασία ο προσανατολισμός του.

Αν $AB = \Gamma\Delta = \alpha$ και $A\Delta = B\Gamma = \beta$ τότε $(AB\Gamma\Delta) = \alpha \cdot \beta$.

Στην 1η περίπτωση έχουμε $(AB\Theta H) = (H\Theta\Gamma\Delta) = \alpha \cdot \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$.

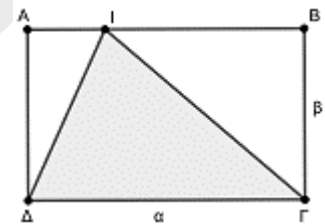
Στην 2η περίπτωση έχουμε $(AEZ\Delta) = (EB\Gamma Z) = \frac{\alpha}{2} \cdot \beta = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$.

Στην 3η και 4η περίπτωση τα τρίγωνα που δημιουργούνται από κάθε διαγώνιο γνωρίζουμε ότι είναι ίσα,

άρα και ισοδύναμα με $(AB\Gamma) = (A\Delta\Gamma) = (AB\Delta) = (B\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}\alpha\beta = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$.

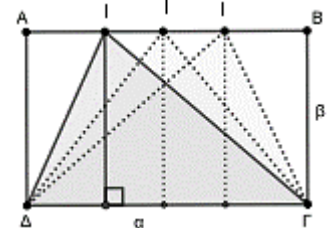
β) i. Έστω ότι το εσωτερικό σημείο μιας πλευράς του ορθογωνίου είναι το σημείο I, τότε οι απέναντι κορυφές είναι οι Γ και Δ. Οπότε σχηματίζεται το τρίγωνο IΔΓ που η πλευρά του ΔΓ είναι το μήκος α του ορθογωνίου και το ύψος προς αυτή είναι η απόσταση του I από τη ΔΓ, δηλαδή η άλλη διάσταση

του ορθογωνίου που ισούται με β. Άρα $(I\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}\alpha\beta = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$.



ii. Έστω ότι η θέση του σημείου I μεταβάλλεται και μπορεί να είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο της πλευράς AB. Σε κάθε τέτοια μετακίνηση του σημείου I, το τρίγωνο που σχηματίζεται έχει εμβαδό το μισό του αρχικού ορθογωνίου όπως αποδείχθηκε στο β) i. ερώτημα.

Οι θέσεις του I είναι τα άπειρα εσωτερικά σημεία της πλευράς AB.



18565. Δίνονται δύο κύκλοι με κέντρα O και K.

Ο κύκλος με κέντρο O έχει ακτίνα $R=7$ ενώ ο κύκλος με κέντρο K έχει ακτίνα $r=2$.

Το τμήμα AB είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων και το τμήμα KE είναι παράλληλο στο τμήμα AB με E σημείο του τμήματος OA. Η διάκεντρος OK τέμνει τον κύκλο (O,R) στο σημείο Γ και τον κύκλο (K,r) στο σημείο Δ.

α) Αν η θέση των δύο κύκλων είναι τέτοια ώστε, η απόσταση των σημείων Γ και Δ είναι $\Gamma\Delta=4$, τότε:

i. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AB.
(Μονάδες 10)

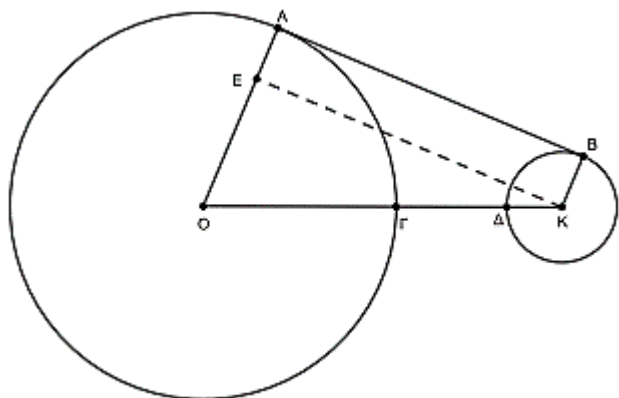
ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ABKO.

(Μονάδες 07)

β) Ποια πρέπει να είναι η σχετική θέση των 2 κύκλων, ώστε το εμβαδόν του ABKE να ισούται

με $4\sqrt{14}$ τ.μ. ;

(Μονάδες 08)



Λύση

α) i. Οι ακτίνες OA και KB είναι κάθετες στο εφαπτόμενο τμήμα AB στα σημεία επαφής A και B. Το τμήμα KE είναι παράλληλο στο AB και αφού $AB \perp OA$, θα είναι και $KE \perp OA$. Άρα το τετράπλευρο ABKE έχει 3 ορθές γωνίες και είναι ορθογώνιο. Επομένως $AE = KB = 2$ και $OE = OA - EA = 7 - 2 = 5$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο OEK η υποτείνουσα του OK είναι $OG + \Gamma\Delta + \Delta K = 7 + 4 + 2 = 13$. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$KE^2 = OK^2 - OE^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Leftrightarrow KE = 12, \text{ οπότε και } AB = 12.$$

ii. Στο τετράπλευρο ABKO είναι $OA \perp AB$ και $KB \perp AB$, άρα $OA \parallel KB$. Επίσης $OA = 7 \neq 2 = KB$, άρα οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και άνισες, οπότε το ABKO είναι τραπέζιο, στο οποίο η μικρή του βάση είναι η KB, η μεγάλη βάση του η OA και το ύψος του είναι το μήκος του εφαπτόμενου

$$\text{τμήματος AB. Οπότε } (ABKO) = \frac{(KB + KA)AB}{2} = \frac{(2 + 7) \cdot 12}{2} = 54 \text{ τ.μ.}$$

β) Το ABKE είναι ορθογώνιο, άρα $(ABKE) = AB \cdot KB \Leftrightarrow 4\sqrt{14} = 2AB \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{14} = KE$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο OKE έχουμε:

$$OK^2 = OE^2 + KE^2 = 5^2 + (2\sqrt{14})^2 = 25 + 56 = 81 \Leftrightarrow OK = 9.$$

Για το τμήμα OK ισχύει ότι $OK = OG + \Gamma\Delta + \Delta K \Leftrightarrow 9 = 7 + \Gamma\Delta + 2 \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 0$. Δηλαδή η διάκεντρος OK των δύο κύκλων ισούται με το άθροισμα των ακτίνων τους. Άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

18566. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $A = 90^\circ$.

Με πλευρά την υποτείνουσα ΒΓ και έξω από το τρίγωνο, γράφουμε το τετράγωνο ΒΓΔΕ.

Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το Α και παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε $BZ = B\Gamma$. Από τα σημεία Γ και Ζ φέρουμε παράλληλες προς τα τμήματα ΒΖ και ΒΓ αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο Η.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΒΓΗΖ είναι ρόμβος και να βρείτε τις περιμέτρους του ρόμβου και του τετραγώνου. (Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: «Ο ρόμβος και το τετράγωνο αφού έχουν ίσες περιμέτρους, θα έχουν και ίσα εμβαδά».

Ισχυρισμός 2: «Ο ρόμβος έχει μικρότερο εμβαδό από το τετράγωνο και μάλιστα, όπως έχουν κατασκευαστεί τα δύο τετράπλευρα δεν γίνεται να είναι ποτέ ισεμβαδικά». Εξετάστε ποιους από τους 2 παραπάνω ισχυρισμούς είναι σωστός και να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

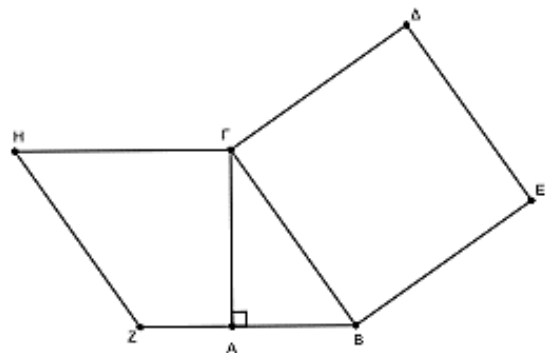
(Μονάδες 15)

Λύση

α) Το τετράπλευρο ΒΓΘΗ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον οι διαδοχικές πλευρές του ΒΓ και ΒΗ είναι ίσες από την κατασκευή, οπότε το ΒΓΘΗ είναι ρόμβος με πλευρά ίση με την υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Άρα η περίμετρος του ρόμβου είναι ίση με $4 \cdot B\Gamma$. Επίσης το τετράγωνο ΒΓΔΕ έχει πλευρά ίση με την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου, άρα η περίμετρος του είναι ίση με $4 \cdot B\Gamma$.

Δηλαδή ο ρόμβος και το τετράγωνο έχουν ίσες περιμέτρους.



β) Είναι $(B\Gamma\Delta E) = B\Gamma^2$ και $(B\Gamma H Z) = BZ \cdot \Gamma A$.

Συγκρίνοντας τα δύο εμβαδά παρατηρούμε ότι, για το εμβαδό του τετραγώνου το τμήμα ΒΓ πολλαπλασιάζεται με το ΒΓ και για το εμβαδό του ρόμβου, το ΒΓ πολλαπλασιάζεται με το ΑΓ.

Το τμήμα ΑΓ είναι κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ και το τμήμα ΒΓ είναι υποτείνουσα. Όμως η κάθετη πλευρά είναι πάντα μικρότερη την υποτείνουσα, επομένως το εμβαδό του ρόμβου είναι μικρότερο από το εμβαδό του τετραγώνου και δεν γίνεται ποτέ τα δύο οχήματα να είναι ισεμβαδικά.

Άρα ο ισχυρισμός 2 είναι σωστός.

21124.α) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $a = 40$, $\beta = 25$, $\gamma = 25$ και αντίστοιχα ύψη u_a, u_b, u_γ . Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 6)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $E = 300$ και τα ύψη του είναι $u_a = 15$ και $u_b = u_\gamma = 24$.

(Μονάδες 7)

iii. Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη u_a, u_b, u_γ είναι οξυγώνιο.

(Μονάδες 7)

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου, είναι ισοσκελές και οξυγώνιο.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) i. Είναι $\alpha^2 = 40^2 = 1600$ και $\beta^2 + \gamma^2 = 25^2 + 25^2 = 625 + 625 = 1250$.

Είναι $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ οπότε $A > 90^\circ$, άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.

ii. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$, το ύψος του $AD = u_a$ είναι και διάμεσος του τριγώνου, άρα

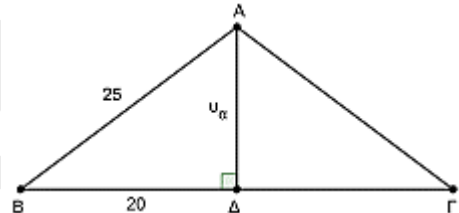
$$BD = \Delta\Gamma = 20.$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε:

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 25^2 - 20^2 = 625 - 400 = 225 \Leftrightarrow AD = 15$$

$$\text{Είναι } E = (AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 15 = 300.$$

$$\text{Είναι } E = (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \beta \cdot u_b \Leftrightarrow 300 = \frac{1}{2} \cdot A\Gamma \cdot u_b \Leftrightarrow 600 = 25u_b \Leftrightarrow u_b = \frac{600}{25} = 24.$$



iii. Είναι $u_\gamma = u_b = 24$ και $AD = u_a = 15$. Είναι $u_\gamma^2 = 24^2 = 576$ και $u_a^2 + u_b^2 = 225 + 576 = 801$.

Επειδή $u_\gamma^2 < u_a^2 + u_b^2$ το τρίγωνο με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου $AB\Gamma$, είναι οξυγώνιο

β) Έστω α, β, γ οι πλευρές οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ με $\beta = \gamma$

και u_a, u_b, u_γ τα αντίστοιχα ύψη. Είναι $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \alpha^2 > 2\beta^2 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} > 2 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > \sqrt{2} > 1$

Είναι $E = \frac{1}{2} \alpha \cdot u_a = \frac{1}{2} \beta \cdot u_b = \frac{1}{2} \gamma \cdot u_\gamma$ και επειδή $\beta = \gamma$, είναι και $u_\gamma = u_b$. Επομένως το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου, είναι ισοσκελές.

Επίσης είναι $\frac{1}{2} \alpha \cdot u_a = \frac{1}{2} \beta \cdot u_b \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{u_b}{u_a}$ και επειδή $\frac{\alpha}{\beta} > 1$, είναι $\frac{u_b}{u_a} > 1 \Leftrightarrow u_b > u_a$.

Είναι $u_\gamma^2 < u_\gamma^2 + u_a^2 = u_b^2 + u_a^2$ άρα το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου $AB\Gamma$, είναι οξυγώνιο. Επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής.

21183. Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά $\sqrt{2}$ και το τετράγωνο ΔEZH έχει πλευρά 1.

α) Να αποδείξετε ότι $AG = 2$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι

i. $AZ^2 = 4 + 2\sqrt{2}$.

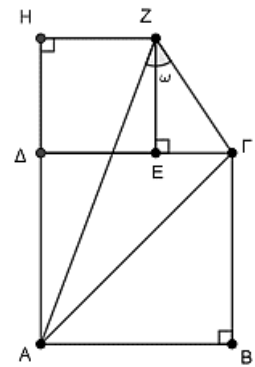
(Μονάδες 7)

ii. $\Gamma Z^2 = 4 - 2\sqrt{2}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε σε μοίρες το μέτρο της γωνίας $AZ\Gamma = \hat{\omega}$.

(Μονάδες 5)



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$$AG^2 = BG^2 + AB^2 = \sqrt{2}^2 + 2^2 = 2 + 2 = 4 \Leftrightarrow AG = 2$$

β) i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο AHZ είναι $AH = AD + DH = \sqrt{2} + 1$, οπότε από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $AZ^2 = AH^2 + HZ^2 = (\sqrt{2} + 1)^2 + 1^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 + 1 = 4 + 2\sqrt{2}$

ii. Είναι $EG = \Delta\Gamma - \Delta E = \sqrt{2} - 1$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ZEG έχουμε:

$$\Gamma Z^2 = ZE^2 + EG^2 = 1^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 1 = 4 - 2\sqrt{2}.$$

γ) Είναι $AZ^2 = 4 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow AZ = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$ και $\Gamma Z^2 = 4 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \Gamma Z = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$

Στο τρίγωνο $AZ\Gamma$ με εφαρμογή του νόμου των συνημιτόνων προκύπτει

$$AG^2 = AZ^2 + \Gamma Z^2 - 2AZ \cdot \Gamma Z \cdot \sin\omega \Leftrightarrow 2^2 = 4 + 2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \cdot \sin\omega \Leftrightarrow$$

$$4 = 8 - 2\sqrt{(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})} \cdot \sin\omega \Leftrightarrow 2\sqrt{16 - 4 \cdot 2} \cdot \sin\omega = 4 \Leftrightarrow \sqrt{8} \cdot \sin\omega = 2 \Leftrightarrow$$

$$\sin\omega = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \hat{\omega} = 45^\circ$$

21840. Έστω $AB\Gamma\Delta$ τραπέζιο με $A = \Delta = 90^\circ$, $AB = 5$, $\Gamma\Delta = 13$ και εμβαδόν $(AB\Gamma\Delta) = 54$. Ο κύκλος με διάμετρο τη $B\Gamma$ τέμνει τη $\Gamma\Delta$ στο σημείο E .

α) Να αποδείξετε ότι $AD = 6$.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μήκος των BE και $B\Gamma$.

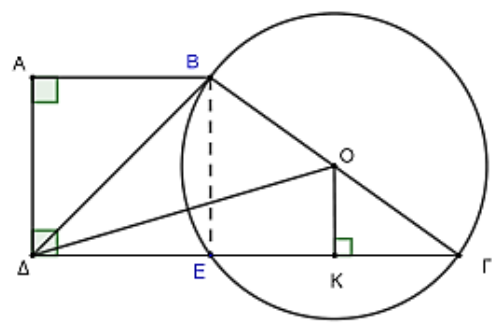
(Μονάδες 6)

γ) Αν OK είναι η κάθετη από το σημείο O στην $E\Gamma$, να αποδείξετε ότι $OK = 3$, και να υπολογίσετε το μήκος της OD .

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου BAO .

(Μονάδες 7)



Λύση

$$\alpha) (AB\Gamma\Delta) = 54 \Leftrightarrow \frac{(AB + \Gamma\Delta) \cdot AD}{2} = 54 \Leftrightarrow \frac{(5 + 13) \cdot AD}{2} = 54 \Leftrightarrow \frac{18 \cdot AD}{2} = 54 \Leftrightarrow 9AD = 54 \Leftrightarrow AD = 6$$

β) Η γωνία $BE\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, οπότε είναι ορθή, οπότε το τετράπλευρο $ABE\Delta$ έχει 3 ορθές και είναι ορθογώνιο. Άρα $BE = AD = 6$. Ακόμη $E\Gamma = \Delta\Gamma - \Delta E = 13 - 5 = 8$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $BE\Gamma$ έχουμε

$$B\Gamma^2 = BE^2 + E\Gamma^2 = 36 + 64 = 100 \Leftrightarrow B\Gamma = 10.$$

γ) Η κάθετος ΟΚ από το κέντρο Ο στη χορδή ΕΓ του κύκλου διχοτομεί τη χορδή, άρα το Κ είναι το μέσο του τμήματος ΕΓ. Το Ο ως κέντρο του κύκλου είναι το μέσο της διαμέτρου ΒΓ. Οπότε το ΟΚ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΕΓ του τριγώνου ΒΕΓ και άρα $OK = \frac{BE}{2} = 3$.

Αφού η ΟΚ είναι κάθετος στην ΕΓ, άρα και είναι κάθετος και στην ΔΓ, οπότε το τρίγωνο ΔΟΚ είναι ορθογώνιο και εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΔΟΚ έχουμε:

$$\Delta O^2 = \Delta K^2 + KO^2 = 81 + 9 = 90 \Leftrightarrow \Delta O = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.$$

δ) Είναι $(B\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} \Delta\Gamma \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 = 39$.

Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ενός τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα και εφόσον η ΔΟ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΔΓ, ισχύει ότι $(B\Delta O) = \frac{(B\Delta\Gamma)}{2} = \frac{39}{2}$

22100. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνίες $A = 20^\circ$, $B = 100^\circ$, και η διχοτόμος ΑΕ της γωνίας του Α. Από το Β φέρνουμε την κάθετη προς την ΑΕ και έστω Ζ, Δ τα σημεία τομής της καθέτου με τις ΑΕ, ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\Gamma B\Delta = A = 20^\circ$.

(Μονάδες 10)

ii. Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ, να γράψετε τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών τους και να αιτιολογήσετε γιατί είναι αυτές οι πλευρές ομόλογες.

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ δύο τετράπλευρα: ένα τετράγωνο με πλευρά την ΒΓ και ένα ορθογώνιο που η μία του πλευρά είναι η πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και η άλλη του πλευρά είναι ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ. Να εξετάσετε αν τα δυο τετράπλευρα, που σχεδιάσατε, έχουν ίσα εμβαδά.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) i. Αφού η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Α,

τότε $A_1 = A_2 = 10^\circ$.

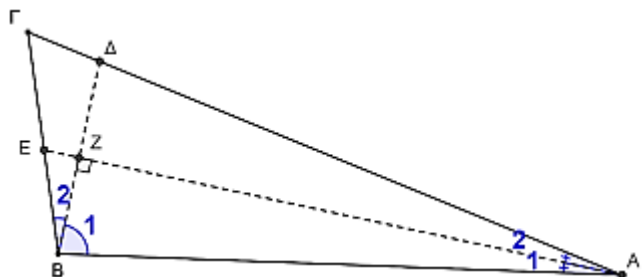
Επειδή το τρίγωνο ΒΖΑ είναι ορθογώνιο, αφού η ΒΔ είναι κάθετη στην ΑΕ, οι γωνίες του

ΒΔ είναι συμπληρωματικές, οπότε

$$A_1 + B_1 = 90^\circ \Leftrightarrow B_1 = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ.$$

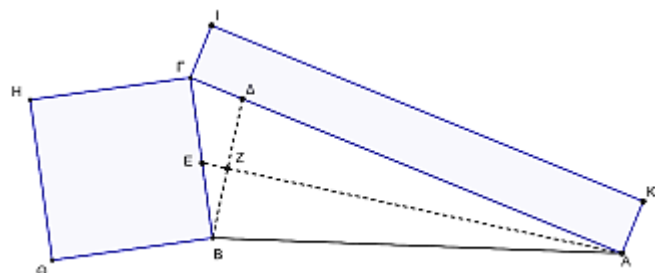
Είναι $\Gamma B A = B = 100^\circ$, οπότε

$$B_2 = \Gamma B A - B_1 = 100^\circ - 80^\circ = 20^\circ, \text{ άρα } \Gamma B \Delta = A = 20^\circ.$$



ii. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ έχουν $\Gamma B \Delta = A$ και τη γωνία Γ κοινή, οπότε θα είναι όμοια γιατί έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία. Αφού τα τρίγωνα είναι όμοια θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $\Gamma \Delta B = \Delta B \Gamma$, οπότε τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών είναι οι ΓΔ, ΒΓ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\Gamma B \Delta$ και Α, οι ΒΔ, ΑΒ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τη γωνία Γ (κοινή) και οι ΒΓ, ΑΓ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\Gamma \Delta B$ και $\Delta B \Gamma$.

β) Έστω ΒΓΗΘ είναι το τετράγωνο με πλευρά την ΒΓ και ΑΓΙΚ είναι το ορθογώνιο με διαστάσεις την ΑΓ και το τμήμα ΓΔ. Το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΓΗΘ είναι $(B\Gamma H\Theta) = B\Gamma^2$ και το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΓΙΚ είναι $(A\Gamma I K) = A\Gamma \cdot \Gamma \Delta$. Τα εμβαδά των τετραπλεύρων θα είναι ίσα αν ισχύει η σχέση:



$$B\Gamma^2 = A\Gamma \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow \frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma} \quad (1)$$

Από το ερώτημα α) ii. τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια, οπότε οι λόγοι των ομόλογων πλευρών τους είναι ίσοι, δηλαδή $\frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma} = \frac{B\Delta}{AB} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma}$. Επομένως $\frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma} \Leftrightarrow B\Gamma^2 = A\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

Συνεπώς, ισχύει η σχέση (1), άρα τα τετράπλευρα $B\Gamma\Theta$ και $A\Gamma\Theta$ έχουν ίσα εμβαδά.

22104. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ εσωτερικό της πλευράς του $B\Gamma$. Έστω M το μέσο M του τμήματος $A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

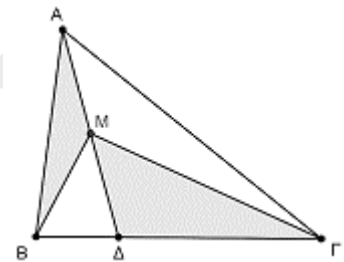
i. $(ABM) = \frac{1}{2}(AB\Delta)$. (Μονάδες 8)

ii. $(ABM) + (M\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$. (Μονάδες 9)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει θέση του σημείου Δ τέτοια ώστε τα τρίγωνα ABM και $M\Delta\Gamma$ να έχουν ίσα εμβαδά. Στην περίπτωση που υπάρχει θέση του σημείου Δ για την οποία τα εμβαδά των τριγώνων ABM και $M\Delta\Gamma$ είναι ίσα, να βρείτε τι μέρος του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι το εμβαδόν του κάθε τριγώνου ABM και $M\Delta\Gamma$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

Λύση

α) i. Στο τρίγωνο $AB\Delta$ η BM είναι διάμεσος στην πλευρά του $A\Delta$, οπότε τα τρίγωνα ABM και $MB\Delta$ θα έχουν ίσα εμβαδά γιατί έχουν ίσες βάσεις, τις MA και $M\Delta$ αντίστοιχα και κοινό ύψος από την κορυφή B στον φορέα της πλευράς $A\Delta$. Οπότε $(ABM) = (MB\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Delta)$ (1).



ii. Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ η $ΓM$ είναι διάμεσος στην πλευρά του $A\Delta$, οπότε τα τρίγωνα $A\Gamma M$ και $M\Gamma\Delta$ θα έχουν ίσα εμβαδά, γιατί έχουν ίσες βάσεις, τις MA και $M\Delta$ αντίστοιχα και κοινό ύψος από την κορυφή Γ στον φορέα της πλευράς $A\Delta$.

Οπότε $(A\Gamma M) = (M\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(A\Gamma\Delta)$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $(ABM) + (MB\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Delta) + \frac{1}{2}(A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}[(AB\Delta) + (A\Gamma\Delta)] = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$

β) Αν είναι $(ABM) = (M\Delta\Gamma)$, τότε από τις σχέσεις (1) και (2) θα ισχύει:

$$\frac{1}{2}(AB\Delta) = \frac{1}{2}(A\Gamma\Delta) \Leftrightarrow (AB\Delta) = (A\Gamma\Delta)$$

Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ έχουν το ίδιο ύψος από την κοινή τους κορυφή A στον φορέα των βάσεων τους $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$. Επομένως για να έχουν ίσα εμβαδά αρκεί να έχουν ίσες βάσεις, δηλαδή $B\Delta = \Delta\Gamma$. Αυτό θα συμβαίνει όταν το Δ είναι το μέσο της $B\Gamma$.

Όταν το σημείο Δ είναι το μέσο της $B\Gamma$, τότε $(ABM) = \frac{1}{2}(AB\Delta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(AB\Gamma) = \frac{1}{4}(AB\Gamma)$ και όμοια

$$(M\Delta\Gamma) = \frac{1}{4}(AB\Gamma).$$

22396. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και έστω Δ η προβολή του σημείου B πάνω στην ευθεία $A\Gamma$.

Έστω $A\Delta = 3$ και $\Delta\Gamma = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $B\Delta = 4$.

(Μονάδες 6)

ii. $(AB\Gamma) = 10$.

(Μονάδες 6)

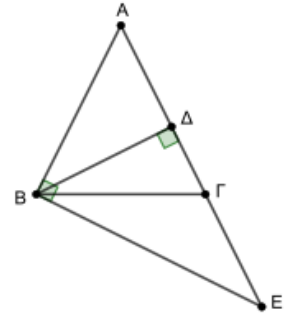
β) Έστω ότι η κάθετη της AB στο σημείο B , τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο E . Να βρείτε:

i. Το μήκος του ΔE .

(Μονάδες 6)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $B\Gamma E$.

(Μονάδες 7)



Λύση

α) i. Είναι $AB = A\Gamma = A\Delta + \Delta\Gamma = 3 + 2 = 5$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ έχουμε:

$$B\Delta^2 = AB^2 - A\Delta^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow B\Delta = 4.$$

$$\text{ii. Είναι } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} A\Gamma \cdot B\Delta = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$$

β) i) Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $ABE = 90^\circ$ άρα για το ύψος του $B\Delta$ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα AE , έχουμε $B\Delta^2 = \Delta A \cdot \Delta E \Leftrightarrow 4^2 = 3\Delta E \Leftrightarrow \Delta E = \frac{16}{3}$.

$$\text{ii. Είναι } \Gamma E = \Delta E - \Delta\Gamma = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3} \text{ και } (B\Gamma E) = \frac{1}{2} \Gamma E \cdot B\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot 4 = \frac{20}{3}.$$

22509. Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2a$ και $A\Delta = a$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο M με $MB = x$ και στην προέκταση της $A\Delta$ σημείο N με $AN = 2x$.

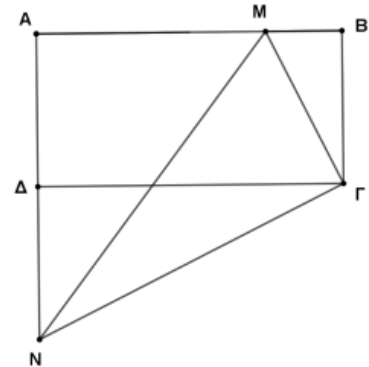
α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση των a, x τα $M\Gamma^2$, $N\Gamma^2$ και MN^2 .
(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $MN\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε συναρτήσει των a, x τα εμβαδά των τριγώνων AMN και ΓMN .
(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τη θέση του σημείου M , πάνω στην AB ώστε τα τρίγωνα AMN και ΓMN να είναι ισεμβαδικά.
(Μονάδες 5)



Λύση

α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $MB\Gamma$ έχουμε $M\Gamma^2 = MB^2 + B\Gamma^2 = x^2 + a^2$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta N\Gamma$ έχουμε

$$N\Gamma^2 = N\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = (2x)^2 + (2a)^2 = 4x^2 + 4a^2.$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο AMN έχουμε:

$$MN^2 = AN^2 + AM^2 = (a + 2x)^2 + (2a - x)^2 = a^2 + 4ax + 4x^2 + 4a^2 - 4ax + x^2 \Leftrightarrow MN^2 = 5a^2 + 5x^2$$

β) Από το α) έπεται $M\Gamma^2 + N\Gamma^2 = x^2 + a^2 + 4a^2 + 4x^2 = 5a^2 + 5x^2 = MN^2$, οπότε το τρίγωνο $MN\Gamma$ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη MN .

$$\gamma) \text{ Είναι } (AMN) = \frac{1}{2} AM \cdot AN = \frac{1}{2} (2a - x)(a + 2x) = \frac{1}{2} (2a^2 + 4ax - ax - 2x^2) = \frac{1}{2} (2a^2 + 3ax - 2x^2)$$

$$(M\Gamma) = \frac{1}{2} M\Gamma \cdot \Gamma N = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 + x^2} \cdot \sqrt{4\alpha^2 + 4x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 + x^2} \cdot \sqrt{4(\alpha^2 + x^2)} \Leftrightarrow$$

$$(M\Gamma) = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 + x^2} \cdot 2 \cdot \sqrt{\alpha^2 + x^2} = (\sqrt{\alpha^2 + x^2})^2 = \alpha^2 + x^2$$

$$\delta) \text{ Είναι } (AMN) = (M\Gamma) \Leftrightarrow \frac{1}{2} (2\alpha^2 + 3\alpha x - 2x^2) = \alpha^2 + x^2 \Leftrightarrow \cancel{2\alpha^2} + 3\alpha x - 2x^2 = \cancel{2\alpha^2} + 2x^2 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 - 3\alpha x = 0 \Leftrightarrow x(4x - 3\alpha) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ απορρίπτεται ή } 4x - 3\alpha = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\alpha}{4}.$$

Επομένως $AM = \frac{3}{4}\alpha$ και η θέση του Μ είναι γνωστή.

22510. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Θεωρούμε τις διαμέτρους ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $(AOB) = (BO\Delta)$ και $(AOG) = (GO\Delta)$

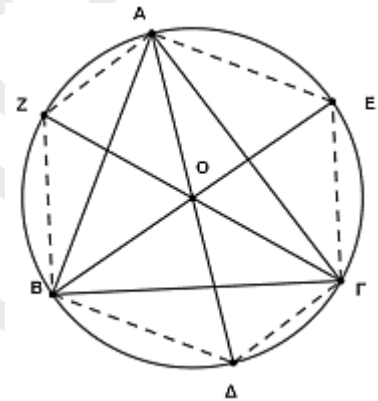
(Μονάδες 8)

β) $(B\Delta\Gamma) = (AOB) + (AOG) - (BO\Gamma)$

(Μονάδες 8)

γ) $(AZB\Delta\Gamma E) = 2(AB\Gamma)$

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΔ θ ΒΟ είναι διάμεσος, οπότε χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΔ σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα.

Επομένως $(AOB) = (BO\Delta)$.

Ομοίως στο τρίγωνο ΑΓΔ θ ΓΟ είναι διάμεσος, οπότε $(AOG) = (GO\Delta)$.

β) Από το α) ερώτημα έχουμε $(AOB) = (BO\Delta)$ (1) και $(AOG) = (GO\Delta)$ (2).

Προσθέτοντας τις (1), (2) κατά μέλη παίρνουμε $(AOB) + (AOG) = (BO\Delta) + (GO\Delta)$, οπότε

$$(AOB) + (AOG) = (BO\Gamma\Delta).$$

Αφαιρώντας από τα δύο μέλη το $(BO\Gamma)$ έχουμε $(AOB) + (AOG) - (BO\Gamma) = (B\Delta\Gamma)$

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε $(AOB) + (AOG) - (BO\Gamma) = (B\Delta\Gamma)$ (3).

Ομοίως αποδεικνύεται ότι

$$(BO\Gamma) + (AOB) - (AOG) = (\Gamma E A) \text{ (4) και } (BO\Gamma) + (AOG) - (BOA) = (AZB) \text{ (5).}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3), (4), (5) παίρνουμε

$$(AOB) + (BO\Gamma) + (AOG) = (\Delta B\Gamma) + (\Gamma E A) + (ZAB) \Leftrightarrow (AB\Gamma) = (B\Delta\Gamma) + (\Gamma E A) + (AZB).$$

Επομένως $2(AB\Gamma) = (AB\Gamma) + (\Delta B\Gamma) + (\Gamma E A) + (ZAB) = (AZB\Delta\Gamma E)$.

3^ο Θέμα

17908. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ τα μήκη των πλευρών του είναι $a = 4$, $\beta = \sqrt{17}$ και $\gamma = 5$.

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$, ως προς τις γωνίες του.

(Μονάδες 9)

β) Αν AD είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ από την κορυφή A , τότε:

i. να υπολογίσετε το ΔB .

(Μονάδες 9)

ii. να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Είναι $\gamma^2 = 25$ και $a^2 + \beta^2 = 4^2 + (\sqrt{17})^2 = 16 + 17 = 33$, δηλαδή

$\gamma^2 < a^2 + \beta^2$ οπότε $\Gamma < 90^\circ$ και το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο, εφόσον απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία του.

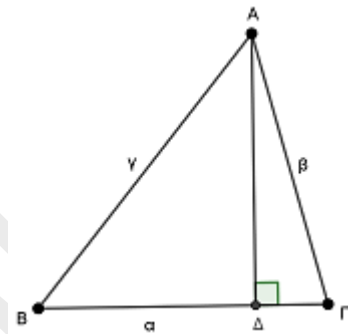
β) i. Από τη γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$$\gamma^2 = a^2 + \beta^2 - 2a \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow 25 = 33 - 2 \cdot 4 \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow 8\Delta\Gamma = 8 \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 1, \text{ οπότε } \Delta B = B\Gamma - \Delta\Gamma = 3.$$

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$A\Delta^2 = \beta^2 - \Delta\Gamma^2 = (\sqrt{17})^2 - 1^2 = 17 \Leftrightarrow A\Delta = 4.$$

$$\text{Είναι } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$$



Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

2^ο Θέμα

15979. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG=5$ και $A=120^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = 5\sqrt{3}$ (Μονάδες 13)

β) $(AB\Gamma) = \frac{25\sqrt{3}}{4}$ (Μονάδες 12)

Λύση

α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, από το νόμο των συνημιτόνων είναι:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + AG^2 - 2AB \cdot AG \cdot \cos A = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = 25 + 25 - 50 \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$B\Gamma^2 = 50 + 25 = 75 \Leftrightarrow B\Gamma = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

β) Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot AG \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

17346. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=6$, $B\Gamma=4$ και $B=60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $AG=2\sqrt{7}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 8)

Δίνεται ότι $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Λύση

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει

$$AG^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2AB \cdot B\Gamma \cdot \cos B = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 36 + 16 - 48 \cdot \frac{1}{2} = 52 - 24 = 28 \Leftrightarrow$$

$$AG = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}.$$

β) Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι η AB , άρα η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου είναι η Γ , γιατί βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά.

Είναι $AB^2 = 6^2 = 36$ και $AG^2 + B\Gamma^2 = 28 + 16 = 44$, άρα $AB^2 < AG^2 + B\Gamma^2 \Leftrightarrow \Gamma < 90^\circ$, οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο.

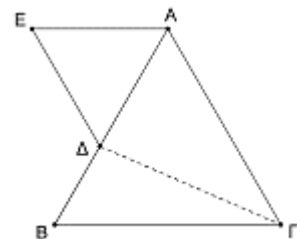
γ) Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot B\Gamma \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

17347. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο πλευράς 10 και το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο πλευράς 6.

α) Να αποδείξετε ότι $(A\Gamma\Delta) = 15\sqrt{3}$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $A\Gamma\Delta E$. (Μονάδες 13)

Δίνεται ότι $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Λύση

$$\alpha) (\text{ΑΓΔ}) = \frac{1}{2} \text{ΑΔ} \cdot \text{ΑΓ} \cdot \eta\mu\text{Α} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \eta\mu 60^\circ = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}.$$

β) Το εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α ισούται με $\frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4}$, άρα το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου ΑΔΕ που έχει πλευρά 6 είναι $\frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$.

Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΓΔΕ είναι $(\text{ΑΓΔΕ}) = (\text{ΑΓΔ}) + (\text{ΑΔΕ}) = 15\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$.

21196. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές $\beta = 8$ και $\gamma = 6$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ είναι $E = 24$.

(Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε:

i. Να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς α του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 6)

ii. Το ύψος του u_a που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα α του τριγώνου.

(Μονάδες 7)

iii. Την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

(Μονάδες 7)

Λύση

$$\alpha) E = (\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$$

β) i. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

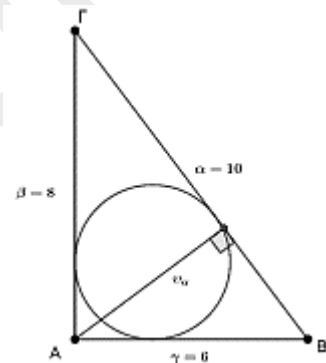
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \Leftrightarrow \alpha = 10$$

$$\text{ii. } E = \frac{1}{2} \alpha \cdot u_a \Leftrightarrow 24 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot u_a \Leftrightarrow 24 = 5 \cdot u_a \Leftrightarrow u_a = \frac{24}{5}$$

iii. Αν ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου,

τότε το εμβαδό του Ε είναι $E = \tau \cdot \rho$. Η ημιπερίμετρος τ του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \frac{24}{2} = 12, \text{ οπότε } E = \tau \cdot \rho \Leftrightarrow 24 = 12\rho \Leftrightarrow \rho = 2$$



21838. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $AB=8$, $ΑΓ=12$ και γωνία $A = 60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$(\text{ΑΒΓ}) = 24\sqrt{3}.$$

(Μονάδες 13)

β) Αν ΒΔ και ΓΕ διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι :

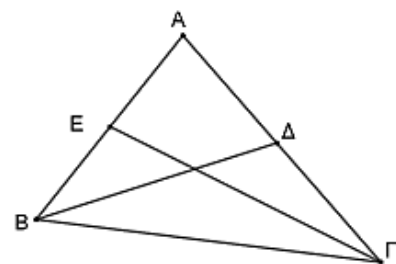
i. Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΑΕΓ είναι ισοδύναμα.

(Μονάδες 4)

ii. Τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΔΓΒ είναι ισοδύναμα με

$$(\text{ΕΒΓ}) = (\text{ΔΓΒ}) = 12\sqrt{3}.$$

(Μονάδες 8)



Λύση

$$\alpha) \text{ Είναι } (\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 \cdot \eta\mu 60^\circ = 48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$$

β) i. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος του τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα.

Αφού η ΓΕ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, άρα $(\text{ΒΕΓ}) = (\text{ΑΕΓ})$.

ii. Αφού $(BE\Gamma) = (AE\Gamma)$ και $(BE\Gamma) + (AE\Gamma) = (AB\Gamma)$, άρα $(BE\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 24\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

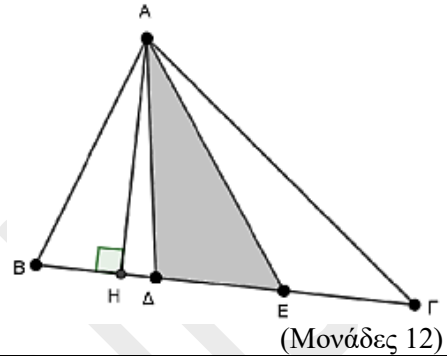
Ομοίως αφού η ΒΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ είναι $(\Delta B\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma) = 12\sqrt{3}$, οπότε $(EB\Gamma) = (\Delta\Gamma B) = 12\sqrt{3}$.

22259. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και στην πλευρά του ΒΓ, τα σημεία Δ, Ε ώστε $BD = DE = EG$. Από την κορυφή Α, φέρνουμε το ύψος ΑΗ του τριγώνου ΑΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $(A\Delta E) = \frac{1}{3}(AB\Gamma)$.

(Μονάδες 13)

β) Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι $(AME) = \frac{1}{6}(AB\Gamma)$.



(Μονάδες 12)

Λύση

α) Είναι $BD = DE = EG = \frac{1}{3}BG$.

Το ΑΗ είναι ύψος στα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ, οπότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων θα ισούται

με το λόγο των αντιστοίχων βάσεων. Δηλαδή: $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta E}{BG} = \frac{\frac{1}{3}BG}{BG} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow (A\Delta E) = \frac{1}{3}(AB\Gamma)$

β) Στο τρίγωνο ΑΔΕ, η ΑΜ είναι διάμεσος. Επομένως το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα. Τα ΑΜΕ και ΑΜΔ. Οπότε $(AME) = \frac{1}{2}(A\Delta E) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(AB\Gamma) = \frac{1}{6}(AB\Gamma)$

22511. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 2$, $AG = 3$ και $A = 60^\circ$. Να υπολογίσετε:

α) το μήκος της πλευράς ΒΓ.

(Μονάδες 9)

β) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 8)

γ) το ύψος v_a .

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$BG^2 = AB^2 + AG^2 - 2AB \cdot AG \cdot \sin A = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ = 4 + 9 - 12 \cdot \frac{1}{2} = 13 - 6 = 7 \Leftrightarrow BG = \sqrt{7}$$

$$\beta) (AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot AG \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\gamma) \text{ Είναι } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} a \cdot v_a \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot v_a \Leftrightarrow 3\sqrt{3} = \sqrt{7} v_a \Leftrightarrow v_a = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$$

4ο θέμα

22101. Δίνεται τρίγωνο ABΓ του οποίου οι πλευρές AB και AG έχουν σταθερά μήκη 3 και 4 αντίστοιχα.

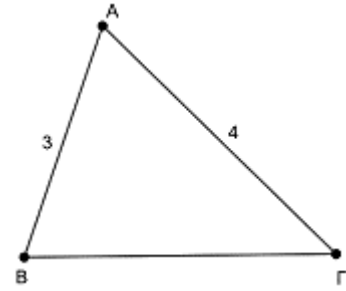
α) Αν η γωνία A έχει μέτρο 60° , τότε να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 08)

ii. Το μήκος της πλευράς BG. (Μονάδες 09)

β) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας A ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ να γίνεται μέγιστο;

Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 08)



Λύση

α) i. Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot AG \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \eta\mu 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

ii. Εφαρμόζουμε τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ABΓ:

$$BG^2 = AB^2 + AG^2 - 2AB \cdot AG \cdot \sigma\upsilon\nu A = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ = 9 + 16 - 24 \cdot \frac{1}{2} = 25 - 12 = 13 \Leftrightarrow$$

$$BG = \sqrt{13}$$

β) Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot AG \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \eta\mu A = 6 \cdot \eta\mu A$.

Για την γωνία A του τριγώνου ισχύει ότι $0^\circ < A < 180^\circ$, άρα

$$0 < \eta\mu A \leq 1 \Leftrightarrow 0 < 6\eta\mu A \leq 6 \Leftrightarrow 0 < (AB\Gamma) \leq 6.$$

Η μέγιστη τιμή του $\eta\mu A$ είναι 1, όταν η γωνία A είναι 90° . Επομένως, το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν η γωνία A είναι ορθή και η μέγιστη τιμή του είναι $E = 6 \cdot 1 = 6$ τ.μ.

22369. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $AB = 8$, $B\Gamma = 7$ και

$A = 60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $AG = 3$ ή $AG = 5$. (Μονάδες 6)

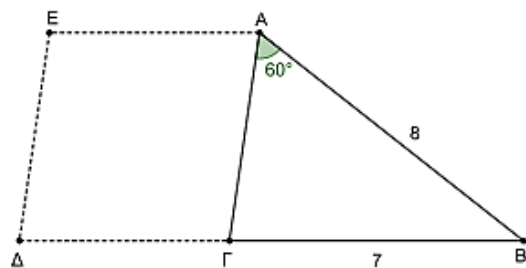
β) Έστω ότι το τρίγωνο ABΓ είναι οξυγώνιο όπως στο διπλανό σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι $AG = 5$. (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι $(AB\Gamma) = 10\sqrt{3}$. (Μονάδες 6)

iii. Προεκτείνουμε τη BΓ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = AG$ και σχηματίζουμε τον ρόμβο ΑΓΔΕ.

Να βρείτε το εμβαδόν του ρόμβου ΑΓΔΕ. (Μονάδες 7)



Λύση

α) Εφαρμόζουμε τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ABΓ:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + AG^2 - 2AB \cdot AG \cdot \sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow 7^2 = 8^2 + AG^2 - 2 \cdot 8 \cdot AG \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ \Leftrightarrow 49 = 64 + AG^2 - 16AG \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$AG^2 - 8AG + 15 = 0.$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 4$ και ρίζες $AG = 3$ ή $AG = 5$.

β) i) Αν $AG = 3$, τότε $AG^2 + B\Gamma^2 = 3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$ και $AB^2 = 8^2 = 64$, άρα

$AB^2 > AG^2 + B\Gamma^2 \Leftrightarrow \Gamma > 90^\circ$, άρα το τρίγωνο ABΓ είναι αμβλυγώνιο που είναι άτοπο.

Αν $AG = 5$, τότε $AG^2 + B\Gamma^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$ και $AB^2 = 8^2 = 64$, άρα

$AB^2 < AG^2 + B\Gamma^2 \Leftrightarrow \Gamma < 90^\circ$, άρα το τρίγωνο ABΓ είναι οξυγώνιο.

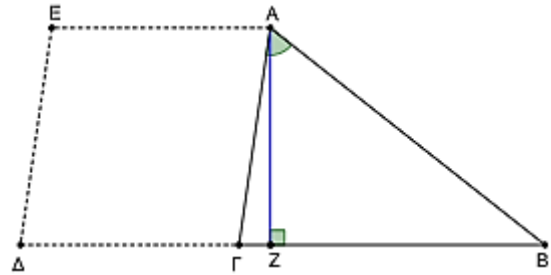
Επομένως $AG = 5$.

ii) Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \eta\mu 60^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

iii) Έστω AZ το ύψος του τριγώνου ABΓ από την κορυφή A. Τότε αυτό θα είναι ύψος και του ρόμβου ΑΓΔΕ με αντίστοιχη βάση την ΓΔ. Είναι ΓΔ=ΑΓ=5 επειδή το ΑΓΔΕ είναι ρόμβος.

Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot AZ \Leftrightarrow 10\sqrt{3} = \frac{1}{2} 7 \cdot AZ \Leftrightarrow$

$$AZ = \frac{20\sqrt{3}}{7}.$$



Επομένως το εμβαδόν του ρόμβου ΑΓΔΕ είναι $(ΑΓΔΕ) = ΓΔ \cdot AZ = 5 \cdot \frac{20\sqrt{3}}{7} = \frac{100\sqrt{3}}{7}$

22568. Δίνεται κύκλος με κέντρο το σημείο Λ και ακτίνα R=10, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο ενός άλλου κύκλου με κέντρο το σημείο Κ και ακτίνα ρ=6. Η εφαπτομένη του κύκλου (Κ,ρ) στο σημείο του Γ τέμνει τον κύκλο (Λ, R) στα σημεία Α και Β. Η προέκταση της ΚΛ προς το Λ τέμνει τον κύκλο (Λ, R) στο σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΚΑΔ είναι όμοια.

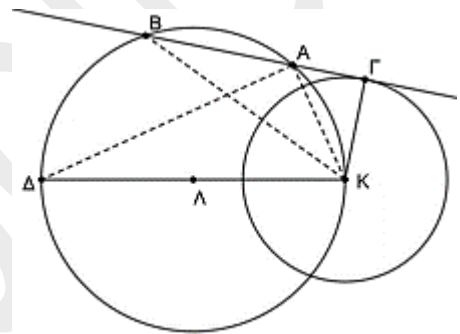
(Μονάδες 8)

ii. $KA \cdot KB = 120$.

(Μονάδες 9)

β) Αν είναι $KB=15$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΚ.

(Μονάδες 8)



Λύση

α) i. Οι γωνίες ΚΒΓ και ΚΔΑ είναι εγγεγραμμένες γωνίες του κύκλου (Λ, R) που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΚΑ, άρα είναι ίσες. Η ευθεία ΓΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου (Κ, ρ) στο σημείο του Γ, επομένως η γωνία ΚΓΒ είναι ορθή. Η ΚΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Λ, R) και η γωνία ΚΑΔ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, άρα είναι ορθή.

Τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΚΑΔ έχουν $\angle ΚΓΒ = \angle ΚΑΔ = 90^\circ$ και

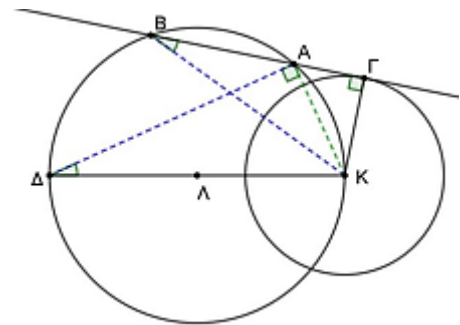
$\angle ΚΒΓ = \angle ΚΔΑ$, επομένως έχοντας δύο γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια.

ii. Η ΚΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Λ, R), άρα $ΚΔ = 2 \cdot R = 20$ και η ΚΓ είναι ακτίνα του κύκλου (Κ, ρ), άρα $ΚΓ = \rho = 6$. Εφόσον τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΚΑΔ είναι όμοια, έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή

$$\frac{ΚΓ}{ΚΑ} = \frac{ΚΒ}{ΚΔ} = \frac{ΓΒ}{ΔΑ} \Leftrightarrow \frac{6}{ΚΑ} = \frac{ΚΒ}{20} \Leftrightarrow ΚΑ \cdot ΚΒ = 120.$$

β) Αφού είναι $ΚΒ = 15$ και $ΚΑ \cdot ΚΒ = 120$ τότε $15 \cdot ΚΑ = 120$, άρα $ΚΑ = 8$. Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΚΑΓ έχουμε $\Gamma A^2 = ΚΑ^2 - ΚΓ^2 = 64 - 36 = 28 \Leftrightarrow \Gamma A = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

Είναι $(ΑΓΚ) = \frac{1}{2} ΚΓ \cdot ΑΚ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{7} = 6\sqrt{7}$



3^ο Θέμα

21783. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\Gamma = 90^\circ$, $A = 30^\circ$ και $AB = 2$.

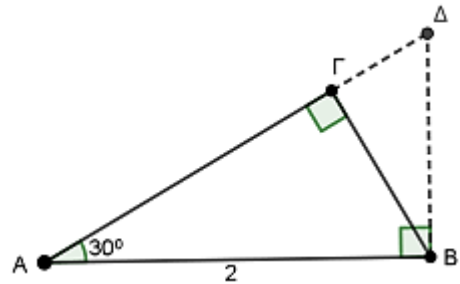
α) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = \sqrt{3}$. (Μονάδες 7)

β) Φέρνουμε κάθετη στην AB , στο σημείο B , που τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο Δ .

Να αποδείξετε ότι $A\Delta = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 10)

γ) Αν K είναι το μέσο της $A\Delta$, να αποδείξετε ότι

$(KAB) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 8)



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A = 30^\circ$ άρα $B\Gamma = \frac{AB}{2} = 1$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

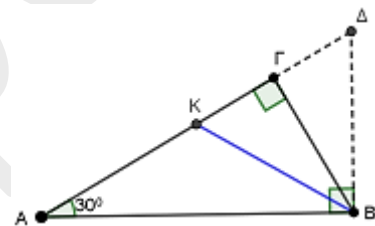
$$A\Gamma^2 = AB^2 - B\Gamma^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 \Leftrightarrow A\Gamma = \sqrt{3}$$

β) Από τα δεδομένα τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AB\Gamma$ είναι ορθογώνια. Επίσης, έχουν τη γωνία A κοινή, οπότε θα είναι όμοια. Επομένως θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Άρα

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AB}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{A\Delta}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3}A\Delta = 4 \Leftrightarrow A\Delta = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

γ) Το K είναι μέσο του $A\Delta$ επομένως $AK = \frac{A\Delta}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\text{Είναι } (KAB) = \frac{1}{2} AB \cdot AK \cdot \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Λόγος Εμβαδών

2^ο Θέμα

15978. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, τα Δ, Ε, Ζ, είναι σημεία των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα, ώστε:

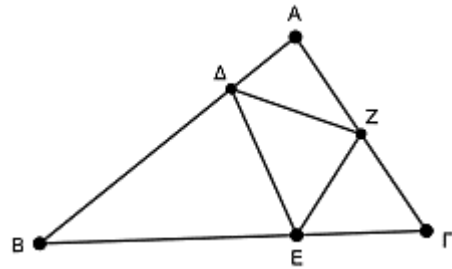
$$ΑΔ = \frac{1}{4}ΑΒ, ΒΕ = \frac{2}{3}ΒΓ \text{ και } ΓΖ = \frac{1}{2}ΑΓ. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

$$α) (ΑΔΖ) = \frac{1}{8}(ΑΒΓ), (ΒΕΔ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ), (ΓΕΖ) = \frac{1}{6}(ΑΒΓ).$$

(Μονάδες 15)

$$β) (ΔΕΖ) = \frac{5}{24}(ΑΒΓ)$$

(Μονάδες 10)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΓ έχουν κοινή τη γωνία Α, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

$$\text{Δηλαδή: } \frac{(ΑΔΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΖ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} = \frac{\frac{1}{4}ΑΒ \cdot \frac{1}{2}ΑΓ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow (ΑΔΖ) = \frac{1}{8}(ΑΒΓ),$$

$$\frac{(ΒΕΔ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΒΔ \cdot ΒΕ}{ΒΑ \cdot ΒΓ} = \frac{\frac{3}{4}ΒΑ \cdot \frac{2}{3}ΒΓ}{ΒΑ \cdot ΒΓ} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (ΒΕΔ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ) \text{ και}$$

$$\frac{(ΓΕΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΓΖ \cdot ΓΕ}{ΓΑ \cdot ΓΒ} = \frac{\frac{1}{2}ΓΑ \cdot \frac{1}{3}ΒΓ}{ΓΑ \cdot ΒΓ} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow (ΓΕΖ) = \frac{1}{6}(ΑΒΓ)$$

$$β) (ΔΕΖ) = (ΑΒΓ) - (ΑΔΖ) - (ΒΕΔ) - (ΓΕΖ) = \frac{1}{8}(ΑΒΓ) - \frac{1}{2}(ΑΒΓ) - \frac{1}{6}(ΑΒΓ) = \frac{5}{24}(ΑΒΓ)$$

16127. Ένα τρίγωνο έχει πλευρά $ΒΓ = 9$ και αντίστοιχο ύψος $ΑΔ = 8$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 9)

β) Ένα άλλο τρίγωνο Α'Β'Γ' είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ και η ομόλογη πλευρά της ΒΓ είναι η Β'Γ' = 6. Να υπολογίσετε:

i. τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και Α'Β'Γ',

(Μονάδες 7)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου Α'Β'Γ'.

(Μονάδες 9)

Λύση

$$α) (ΑΒΓ) = \frac{1}{2}ΒΓ \cdot ΑΔ = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 = 36$$

$$β) i) \text{ Ο λόγος ομοιότητας των όμοιων τριγώνων ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι } λ = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$ii. \text{ Είναι } \frac{(ΑΒΓ)}{(Α'Β'Γ')} = λ^2 \Leftrightarrow \frac{36}{(Α'Β'Γ')} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{36}{(Α'Β'Γ')} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow$$

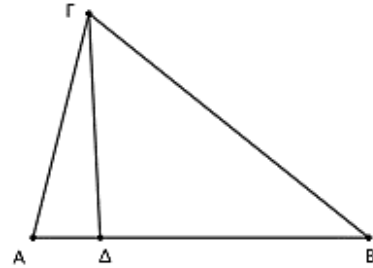
$$9(Α'Β'Γ') = 36 \cdot 4 \Leftrightarrow (Α'Β'Γ') = \frac{36^4 \cdot 4}{9} = 16$$

16756. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB .

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{(AB\Gamma)}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{AB}{\Delta B}$.

(Μονάδες 15)

β) Αν $(AB\Gamma) = 25$ και $AB = 5A\Delta$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta B\Gamma$. (Μονάδες 10)



Λύση

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ έχουν κοινή τη γωνία B . Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία B σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{AB \cdot B\Gamma}{\Delta B \cdot B\Gamma} = \frac{AB}{\Delta B}$$

β) Αφού είναι $AB = 5A\Delta$, τότε: $\Delta B = AB - A\Delta = 5A\Delta - A\Delta = 4A\Delta$. Οπότε, είναι:

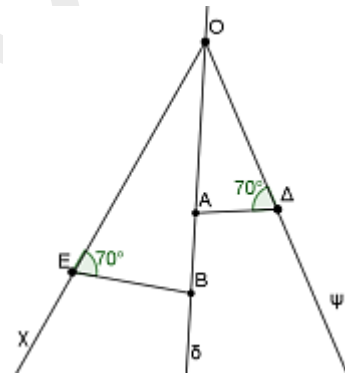
$$\frac{25}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{5A\Delta}{4A\Delta} \Leftrightarrow \frac{25}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 5(\Delta B\Gamma) = 100 \Leftrightarrow (\Delta B\Gamma) = 20$$

16770. Δίνεται γωνία $\chi O\psi$ και η διχοτόμος της $O\delta$. Πάνω στην $O\delta$ παίρνουμε τυχαία σημεία A και B . Θεωρούμε σημείο E στην πλευρά $O\chi$ τέτοιο ώστε $OEB = 70^\circ$ και σημείο Δ στην $O\psi$ τέτοιο ώστε $O\Delta A = 70^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OEB και $O\Delta A$ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β) Αν $\frac{OA}{OB} = \frac{2}{3}$ να υπολογίσετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών των τριγώνων. (Μονάδες 06)

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου $O\Delta A$ είναι 28 τ.μ. να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου OEB .



(Μονάδες 09)

Λύση

α) Τα τρίγωνα OEB και $O\Delta A$ έχουν:

- $\angle OEB = \angle O\Delta A$ επειδή η OA είναι διχοτόμος της γωνίας $\epsilon O\Delta$.

- $\angle E = \angle \Delta = 70^\circ$

Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μια προς μια αντίστοιχα.

β) Αφού τα δύο τρίγωνα είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{E} = \hat{\Delta}$	$\hat{EOB} = \hat{AO\Delta}$	$\hat{B} = \hat{A}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο OEB	OB	EB	OE
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο $O\Delta A$	OA	$A\Delta$	$O\Delta$

Επομένως, θα είναι: $\frac{OB}{OA} = \frac{EB}{A\Delta} = \frac{OE}{O\Delta}$.

γ) Τα τρίγωνα OEB και $O\Delta A$ είναι όμοια, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του

λόγου ομοιότητας, δηλαδή $\frac{(OEB)}{(OAA)} = \left(\frac{OB}{OA}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{(OEB)}{28} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow 4(OEB) = 252 \Leftrightarrow (OEB) = 63$

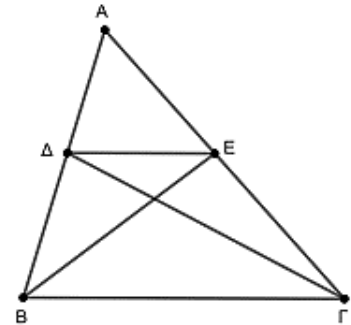
16806. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB φέρουμε παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$ που τέμνει την AG στο σημείο E .

α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\frac{(ADE)}{(\Delta EB)} = \frac{AD}{\Delta B}$ και $\frac{(ADE)}{(\Delta E\Gamma)} = \frac{AE}{E\Gamma}$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $(\Delta EB) = (\Delta E\Gamma)$.

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΔDE και ΔEB έχουν τις γωνίες Δ_1 και Δ_2 παραπληρωματικές, άρα

$$\frac{(ADE)}{(\Delta EB)} = \frac{AD \cdot DE}{\Delta B \cdot DE} = \frac{AD}{\Delta B}$$

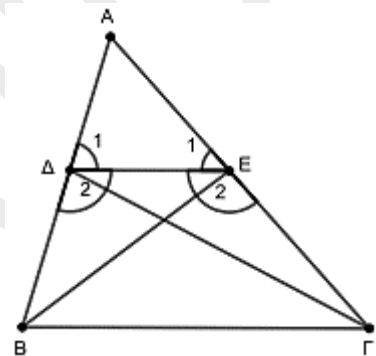
Τα τρίγωνα ΔDE και $\Delta E\Gamma$ έχουν παραπληρωματικές τις γωνίες

$$E_1 \text{ και } E_2, \text{ άρα } \frac{(ADE)}{(\Delta E\Gamma)} = \frac{AE \cdot ED}{E\Gamma \cdot ED} = \frac{AE}{E\Gamma}.$$

β) Το τμήμα DE είναι παράλληλο στην πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$,

οπότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Θαλή, έχουμε ότι $\frac{AD}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$.

Επομένως από το α) ερώτημα ισχύει ότι $\frac{(ADE)}{(\Delta EB)} = \frac{(ADE)}{(\Delta E\Gamma)} \Leftrightarrow (\Delta EB) = (\Delta E\Gamma)$.

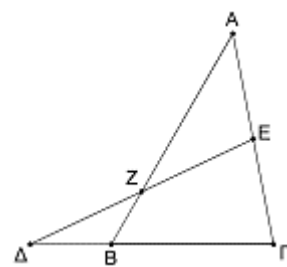


20667. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 8$. Στην προέκταση της GB προς το B παίρνουμε σημείο Δ , ώστε $\Delta B = 4$ και E είναι το μέσο της AG .

α) Να αποδείξετε ότι $(AB\Gamma) = 4AG \cdot \eta\mu\Gamma$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $(\Gamma\Delta E) = 3AG \cdot \eta\mu\Gamma$. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών των τριγώνων $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, αν το εμβαδόν του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ είναι 12 τ.μ. (Μονάδες 8)



Λύση

α) Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot AG \cdot \eta\mu\Gamma = \frac{1}{2} 4 \cdot AG \cdot \eta\mu\Gamma = 4AG \cdot \eta\mu\Gamma$.

β) $(\Gamma\Delta E) = \frac{1}{2} \Gamma\Delta \cdot GE \cdot \eta\mu\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{AG}{2} \cdot \eta\mu\Gamma = 3AG \cdot \eta\mu\Gamma$

γ) $\frac{(AB\Gamma)}{(\Gamma\Delta E)} = \frac{4AG \cdot \eta\mu\Gamma}{3AG \cdot \eta\mu\Gamma} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{(AB\Gamma)}{12} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(AB\Gamma) = 48 \Leftrightarrow (AB\Gamma) = 16$

18561. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα ΓΔ=ΒΓ και την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ=ΑΒ.

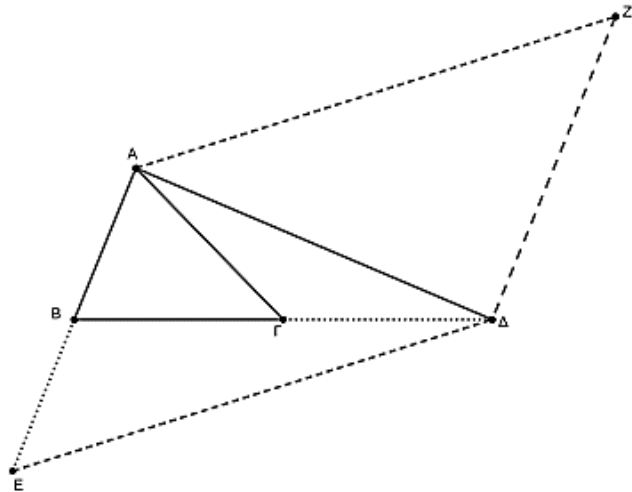
α) Αν $(ΑΒΓ) = 25 \text{ m}^2$, να αποδείξετε ότι $(ΒΔΕ) = 50 \text{ m}^2$.

(Μονάδες 10)

β) Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΕΔ και από την κορυφή Δ ευθεία παράλληλη στην ΕΑ που τέμνονται στο σημείο Ζ.

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΖΔ είναι 4-πλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 15)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΕ έχουν $\angle B + \angle B_{\text{εξ}} = 180^\circ$, οπότε

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΒΔΕ)} = \frac{ΑΒ \cdot ΒΓ}{ΒΔ \cdot ΒΕ} = \frac{ΑΒ \cdot ΒΓ}{2ΒΓ \cdot ΑΒ} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{25}{(ΒΔΕ)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (ΒΔΕ) = 50 \text{ m}^2$$

β) Στο τρίγωνο ΑΒΔ το τμήμα ΑΓ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΔ, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι ισοδύναμα, δηλαδή $(ΑΓΔ) = (ΑΒΓ)$.

Η διαγώνιος ΑΔ χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε δύο ίσα τρίγωνα, τα ΑΗΔ και ΑΕΔ, οπότε αυτά είναι ισοδύναμα, δηλαδή $(ΑΔΖ) = (ΑΕΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) + (ΒΔΕ) = 4(ΑΒΓ)$.

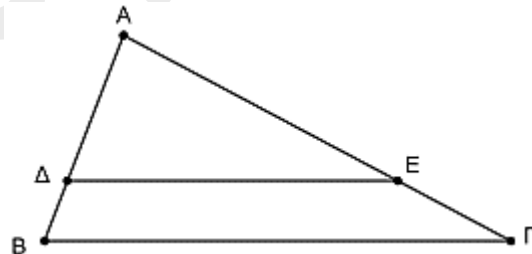
21120. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = \sqrt{2}$. Από σημείο Δ της πλευράς ΑΒ ώστε $ΑΔ = 1$, φέρνουμε παράλληλη στη ΒΓ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια και να γράψετε τον λόγο ομοιότητας,

ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 18)

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 2, να βρείτε τα εμβαδά του τριγώνου ΑΔΕ και του τραπεζίου ΒΓΕΔ. (Μονάδες 7)



Λύση

α) i) Γνωρίζουμε ότι το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου. Επίσης, αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια. Επομένως τα τρίγωνα ΑΔΕ

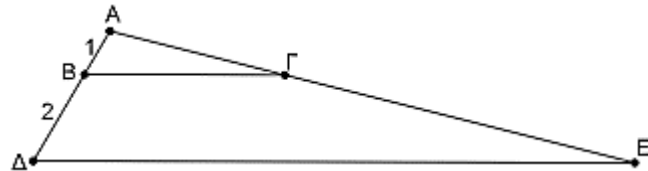
και ΑΒΓ είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητάς τους είναι $\lambda = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

ii) Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \lambda^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (ΑΔΕ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ).$$

β) Είναι $(ΑΔΕ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ και $(ΒΓΕΔ) = (ΑΒΓ) - (ΑΔΕ) = 2 - 1 = 1$.

21304. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 1$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ και E , αντίστοιχα, ώστε η ΔE να είναι παράλληλη στη $B\Gamma$ και $B\Delta = 2$. α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta\Delta E$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $1/3$. (Μονάδες 10)



β) Αν η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίση με $8,5$, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $\Delta\Delta E$. (Μονάδες 08)

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta\Delta E$ είναι 15 , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 07)

Λύση

α) Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, οι πλευρές του τριγώνου $\Delta\Delta E$ είναι ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$, εφόσον το $\Delta\Delta E$ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών AB και $A\Gamma$ του $AB\Gamma$ και την ΔE που είναι παράλληλη στην $B\Gamma$. Επομένως τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta\Delta E$ είναι όμοια με $\frac{AB}{\Delta\Delta} = \frac{A\Gamma}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{\Delta E}$.

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων $AB\Gamma$ και $\Delta\Delta E$ είναι $\frac{AB}{\Delta\Delta} = \frac{AB}{AB + B\Delta} = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3}$

β) Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους, άρα οι περίμετροι των όμοιων τριγώνων $AB\Gamma$ και $\Delta\Delta E$ έχουν λόγο $\frac{1}{3}$. Επομένως η περίμετρος του $\Delta\Delta E$ είναι τριπλάσια της περιμέτρου του $AB\Gamma$, δηλαδή είναι ίση με $3 \cdot 8,5 = 25,5$.

γ) Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, άρα ο λόγος των εμβαδών ($AB\Gamma$) και ($\Delta\Delta E$) των όμοιων τριγώνων $AB\Gamma$ και $\Delta\Delta E$, αντίστοιχα είναι $\frac{1}{9}$,

$$\text{δηλαδή: } \frac{(AB\Gamma)}{(\Delta\Delta E)} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{(AB\Gamma)}{15} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow (AB\Gamma) = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}.$$

21636. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με μήκη πλευρών $AB=6$, $A\Gamma=8$, και $B\Gamma=10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)

β) Αν $\Delta\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{3}{4}$. (Μονάδες 10)

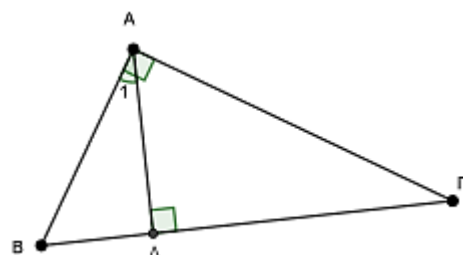
ii. Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$. (Μονάδες 5)

Λύση

α) Είναι $B\Gamma^2 = 10^2 = 100$ και $AB^2 + A\Gamma^2 = 36 + 64 = 100$, άρα $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$ οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$, είναι ορθογώνιο με υποτεινούσα τη $B\Gamma$ και ορθή γωνία την A .

β) i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι:

$A_1 + B = 90^\circ \Leftrightarrow A_1 = 90^\circ - B$ και στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι $\Gamma + B = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 90^\circ - B$, άρα $A_1 = \Gamma$.



Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$, $A\Gamma\Delta$ είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

ii. Γνωρίζουμε ότι ο λόγος των εμβαδών ομοίων τριγώνων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας. Οπότε λόγω του ερωτήματος (β, i) είναι $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)} = \lambda^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

22070. Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει μήκη πλευρών $a = 17$, $\beta = 8$, $\gamma = 15$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 13)

β) Αν $\Delta\Delta$ είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$:

i. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους λ .

ii. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$.

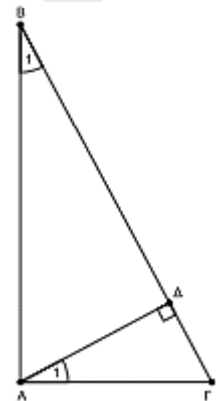
(Μονάδες 12)

Λύση

α) Είναι $\beta^2 + \gamma^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2 = a^2$ οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά a και $A = 90^\circ$.

β) i. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνια με $B = A_1$ αφού είναι και οι δύο γωνίες συμπληρωματικές της γωνίας Γ . Άρα είναι όμοια και ο λόγος ομοιότητάς τους είναι ίσος με το λόγο των υποτείνουσών τους. Δηλαδή $\lambda = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{15}{8}$.

ii. Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, άρα $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)} = \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{225}{64}$.



4^ο Θέμα

16582. Στο διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Δ και E είναι σημεία των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Έστω ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{2}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 07)

ii. Αν H είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου $A\Delta H E$ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

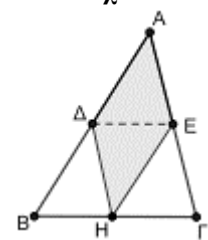
(Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζετε ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \lambda$, τότε ποια είναι η σχέση των εμβαδών του τετραπλεύρου $A\Delta H E$ και του τριγώνου $AB\Gamma$;

(Μονάδες 06)

Λύση

α) i. Επειδή $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma}$ τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες μία προς μία και την περιεχόμενη στις πλευρές αυτές γωνία ίση (είναι η κοινή η γωνία A), οπότε



$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB} \cdot \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (A\Delta E) = \frac{1}{4}(AB\Gamma).$$

ii. Τα τρίγωνα $AH\Delta$ και AHB έχουν κοινή γωνία τη A_1 επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία αυτή, δηλαδή

$$\frac{(AH\Delta)}{(AHB)} = \frac{A\Delta \cdot AH}{AB \cdot AH} = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (AH\Delta) = \frac{1}{2}(AHB) \quad (1).$$

Τα τρίγωνα AHE και $AH\Gamma$ έχουν κοινή γωνία τη A_2 επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία αυτή, δηλαδή

$$\frac{(AHE)}{(AH\Gamma)} = \frac{AE \cdot AH}{A\Gamma \cdot AH} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (AHE) = \frac{1}{2}(AH\Gamma) \quad (2)$$

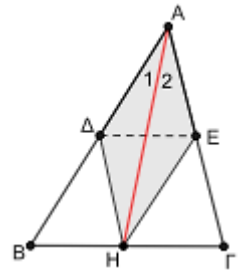
$$\text{Είναι } (A\Delta HE) = (AH\Delta) + (AHE) \stackrel{(1),(2)}{=} \frac{1}{2}(AHB) + \frac{1}{2}(AH\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$$

β) Επειδή $A\Delta < AB$ και $AE < A\Gamma$, τότε αν $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \lambda$ θα είναι $0 < \lambda < 1$.

Από το προηγούμενο σκέλος είναι

$$\frac{(AH\Delta)}{(AHB)} = \frac{A\Delta}{AB} = \lambda \Leftrightarrow (AH\Delta) = \lambda(AHB) \quad \text{και} \quad \frac{(AHE)}{(AH\Gamma)} = \frac{AE}{A\Gamma} = \lambda \Leftrightarrow (AHE) = \lambda(AH\Gamma), \text{ οπότε}$$

$$(A\Delta HE) = (AH\Delta) + (AHE) = \lambda(AHB) + \lambda(AH\Gamma) = \lambda(AB\Gamma)$$



16732. Έστω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και M το μέσο της AB . Οι ευθείες ΔM και ΓB τέμνονται στο K . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα MKB και $\Delta K\Gamma$ είναι όμοια.

(5 μονάδες)

β) $(MKB) = \frac{1}{4}(\Delta K\Gamma).$

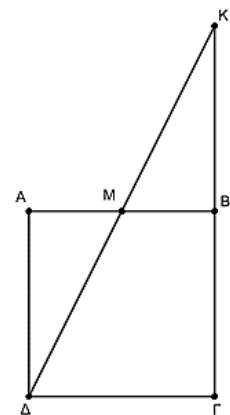
(5 μονάδες)

γ) $(MB\Gamma\Delta) = \frac{3}{4}(AB\Gamma\Delta).$

(10 μονάδες)

δ) Αν $(MB\Gamma\Delta) = 75 \text{ m}^2$ να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου.

(5 μονάδες)



Λύση

α) Τα τρίγωνα MKB και $\Delta K\Gamma$ είναι ορθογώνια και έχουν κοινή τη γωνία K , οπότε έχουν δυο γωνίες τους ίσες μια προς μια, άρα είναι όμοια.

β) Τα όμοια τρίγωνα MKB και ΔKB έχουν λόγο ομοιότητας

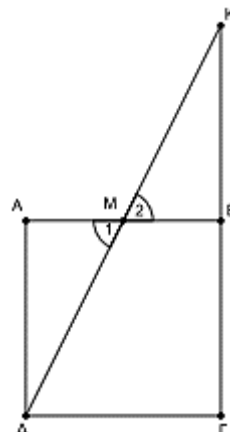
$$\lambda = \frac{\frac{1}{2}MB}{\Delta\Gamma} = \frac{\frac{1}{2}AB}{AB} = \frac{1}{2}, \text{ οπότε ο λόγος των}$$

εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, δηλαδή:

$$\frac{(MKB)}{(\Delta K\Gamma)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (MKB) = \frac{1}{4}(\Delta K\Gamma).$$

γ) Τα τρίγωνα $AM\Delta$ και MKB είναι ίσα αφού έχουν:

- $AM = MB$, το M είναι μέσο του AB



$$\bullet \Delta AM = MBK = 90^\circ$$

$$\bullet M_1 = M_2 \text{ ως κατακορυφήν γωνίες}$$

Άρα, είναι και ισεμβαδικά, δηλαδή $(AM\Delta) = (MKB)$ (1)

Είναι $(\Delta K\Gamma) = (\Delta MB\Gamma) + (MKB) = (\Delta MB\Gamma) + (AM\Delta) = (AB\Gamma\Delta)$, λόγω της σχέσης (1).

$$(\Delta MB\Gamma) = (\Delta K\Gamma) - (MKB) = (\Delta K\Gamma) - \frac{1}{4}(\Delta K\Gamma) = \frac{3}{4}(\Delta K\Gamma) = \frac{3}{4}(AB\Gamma\Delta)$$

δ) Έστω ότι το τετράγωνο έχει πλευρά α . Τότε $(AB\Gamma\Delta) = \alpha^2$ και $(MB\Gamma\Delta) = 75$.

Από το ερώτημα γ) έχουμε ότι:

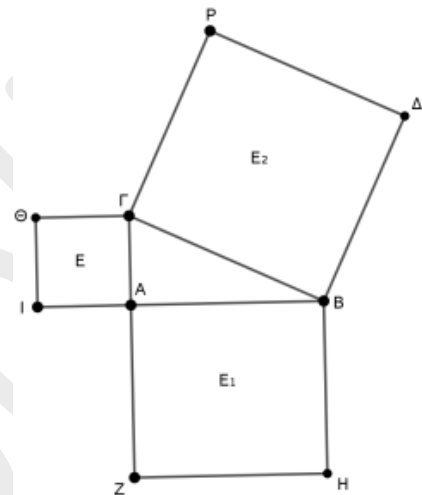
$$75 = \frac{3}{4}\alpha^2 \Leftrightarrow 300 = 3\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 100 \Leftrightarrow \alpha = 10 \text{ m}$$

17907. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Με πλευρές τις AB , $A\Gamma$, $B\Gamma$ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$, τα τετράγωνα $ABHZ$, $A\Gamma\Theta I$, $B\Gamma P\Delta$. Έστω E , E_1 , E_2 , τα εμβαδά των τετραγώνων $A\Gamma\Theta I$, $ABHZ$, $B\Gamma P\Delta$ αντίστοιχα. Αν ισχύουν οι ισότητες $E_1 = 4E$, $E_2 = 5E$ τότε:

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία A . (Μονάδες 9)

β) να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των τριγώνων $AB\Gamma$, AIZ , $BH\Delta$, $\Gamma P\Theta$ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

γ) αν η $A\Gamma = 1$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του πολυγώνου $ZH\Delta P\Theta I$. (Μονάδες 7)



Λύση

$$\alpha) \text{ Είναι } E_1 = 4E \Leftrightarrow AB^2 = 4A\Gamma^2 \text{ και } E_2 = 5E \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 5A\Gamma^2$$

Επειδή $B\Gamma^2 = 5A\Gamma^2 = 4A\Gamma^2 + A\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$, λόγω του πυθαγορείου θεωρήματος, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A .

$$\beta) \text{ Είναι } (AB\Gamma) = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma,$$

$$(AIZ) = \frac{1}{2}AI \cdot AZ = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma = (AB\Gamma).$$

$$\text{Είναι } AB\Gamma + \Gamma B\Delta + \Delta B\Theta + \Theta B\Gamma = 360^\circ \Leftrightarrow$$

$$AB\Gamma + 90^\circ + 90^\circ + HBA = 360^\circ \Leftrightarrow AB\Gamma + HBA = 180^\circ, \text{ οπότε}$$

$$\frac{(B\Gamma\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{BH \cdot B\Delta}{B\Gamma \cdot BA} = \frac{\gamma \cdot \alpha}{\alpha \cdot \beta} = 1 \Leftrightarrow (B\Gamma\Delta) = (AB\Gamma)$$

$$\text{Είναι } \Theta\Gamma P + P\Gamma B + A\Gamma B + \Theta\Gamma A = 360^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Theta\Gamma P + 90^\circ + A\Gamma B + 90^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \Theta\Gamma P + A\Gamma B = 180^\circ, \text{ οπότε}$$

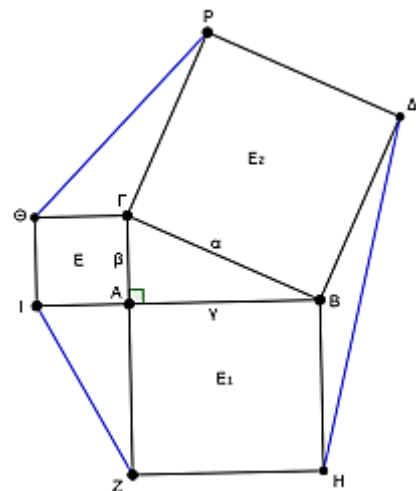
$$\frac{(\Theta\Gamma P)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Gamma\Theta \cdot \Gamma P}{\Gamma A \cdot \Gamma B} = \frac{\beta \cdot \alpha}{\beta \cdot \alpha} = 1 \Leftrightarrow (\Theta\Gamma P) = (AB\Gamma). \text{ Επομένως}$$

$$(AIZ) = (B\Gamma\Delta) = (\Theta\Gamma P) = (AB\Gamma).$$

$$\gamma) \text{ Αν } A\Gamma = \beta = 1, \text{ τότε } AB^2 = 4A\Gamma^2 = 4 \Leftrightarrow AB = 2 \text{ και } B\Gamma^2 = 5A\Gamma^2 = 5 \Leftrightarrow B\Gamma = \sqrt{5}.$$

$$\text{Τότε } (AIZ) = (B\Gamma\Delta) = (\Theta\Gamma P) = (AB\Gamma) = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

$$\text{Ακόμη } E_1 = 4E = 4, \quad E_2 = 5E = 5, \text{ οπότε}$$



$$(ZH\Delta P\Theta I) = E + E_1 + E_2 + (AIZ) + (BH\Delta) + (\Gamma P\Theta) + (AB\Gamma) = 1 + 4 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1 = 14$$

17956. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τμήματος $B\Gamma$. Από το Δ φέρουμε παράλληλες στις πλευρές AB και AG . Η παράλληλη στην AB τέμνει την AG στο Z και η παράλληλη στην AG τέμνει την AB στο E . Θεωρούμε K και Λ τα μέσα των $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(EK\Delta) = \frac{(BE\Delta)}{2}$. (Μονάδες 09)

β) $(EZ\Delta) = \frac{(AE\Delta Z)}{2}$. (Μονάδες 09)

γ) Το εμβαδόν του $KEZ\Lambda$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου Δ . (Μονάδες 07)

Λύση

α) Στο τρίγωνο $BE\Delta$, η EK είναι διάμεσος, οπότε τα τρίγωνα BEK και $EK\Delta$ έχουν ίσες βάσεις BK και $K\Delta$ και κοινό ύψος από το E . Επομένως τα εμβαδά τους θα είναι ίσα, δηλαδή $(BEK) = (EK\Delta)$. Άρα $(EK\Delta) = \frac{(BE\Delta)}{2}$ (1).

β) Το $AE\Delta Z$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, αφού $\Delta Z \parallel AE$ και $DE \parallel AZ$.

Η διαγώνιος EZ του παραλληλογράμμου $AE\Delta Z$ το χωρίζει σε δύο ίσα άρα και ισοδύναμα τρίγωνα, δηλαδή $(EZ\Delta) = (AEZ)$. Επομένως $(EZ\Delta) = \frac{(AE\Delta Z)}{2}$ (2)

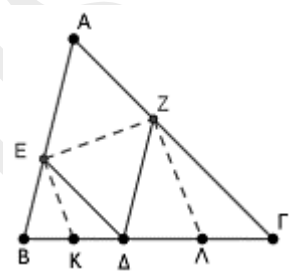
γ) Στο τρίγωνο $\Delta Z\Gamma$, η $Z\Lambda$ είναι διάμεσος, οπότε τα τρίγωνα $\Delta Z\Lambda$ και $\Gamma Z\Lambda$ έχουν ίσες βάσεις $\Delta\Lambda$ και $\Gamma\Lambda$ και κοινό ύψος από το Z . Επομένως τα εμβαδά τους θα είναι ίσα, δηλαδή $(\Delta Z\Lambda) = (\Gamma Z\Lambda)$.

Άρα $(\Delta Z\Lambda) = \frac{(\Delta\Gamma Z)}{2}$ (3)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε:

$$(EK\Delta) + (EZ\Delta) + (\Delta Z\Lambda) = \frac{(BE\Delta)}{2} + \frac{(AE\Delta Z)}{2} + \frac{(\Delta\Gamma Z)}{2} = \frac{(BE\Delta) + (AE\Delta Z) + (\Delta\Gamma Z)}{2} = \frac{(AB\Gamma)}{2}$$

Επομένως, το εμβαδόν του $KEZ\Lambda$ θα ισούται με το μισό του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$ ανεξάρτητα από τη θέση του σημείου Δ πάνω στη $B\Gamma$.



18101. Στο σχήμα, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι ισοσκελή με $AG = B\Gamma = 3$ και $AB = A\Delta = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες B και $BA\Gamma$ είναι ίσες.

(Μονάδες 8)

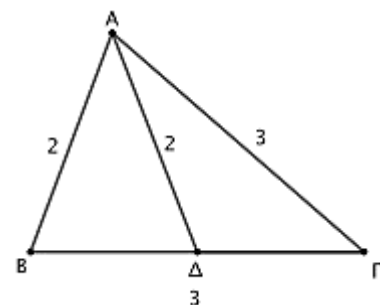
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Delta A$ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(AB\Gamma)}{(B\Delta A)}$ των εμβαδών των δύο

τριγώνων.

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AG = B\Gamma$. Άρα, οι γωνίες B και $BA\Gamma$ θα είναι ίσες, ως προσκείμενες στη βάση AB .

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Delta A$ είναι ισοσκελή και έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, αφού $B = BA\Gamma$

Επομένως, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι όμοια.

γ) Αφού τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. Ο λόγος ομοιότητας λ των δύο τριγώνων ισούται με τον λόγο των πλευρών που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $BA\Gamma$ και B αντίστοιχα, δηλαδή είναι $\frac{B\Gamma}{A\Delta} = \frac{3}{2}$,

$$\text{οπότε } \frac{(AB\Gamma)}{(B\Delta A)} = \left(\frac{B\Gamma}{A\Delta}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

18301. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τις πλευρές BA και GA κατά τμήματα $A\Delta$ και AE αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο

σχήμα. α) Αν είναι $A\Delta = \frac{1}{2} AB$ και $AE = \frac{2}{5} A\Gamma$, να υπολογίσετε

τον λόγο

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}.$$

(Μονάδες 10)

β) Αν είναι $A\Delta = \frac{1}{\lambda} AB$ και $AE = \frac{\lambda}{\mu} A\Gamma$ όπου λ, μ είναι θετικοί

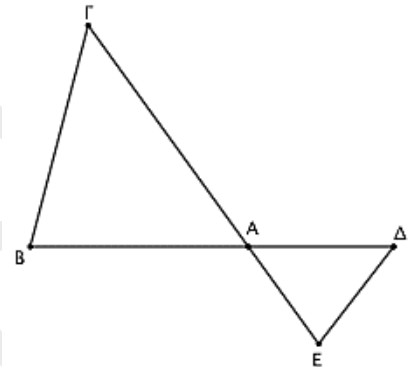
ακέραιοι, να αποδείξετε ότι ο λόγος $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}$ είναι ανεξάρτητος

από την τιμή του λ .

(Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ για τα οποία είναι $(A\Delta E) = (AB\Gamma)$ ». Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)



Λύση

α) Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ έχουν $\Delta A E = B A \Gamma$ (ως κατακορυφήν), οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές, δηλαδή:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot \frac{2}{5} A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{1}{5}$$

β) Εργαζόμενοι όπως στο προηγούμενο ερώτημα, έχουμε σε αυτή την περίπτωση:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{1}{\lambda} AB \cdot \frac{\lambda}{\mu} A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{1}{\mu}, \text{ επομένως ο ζητούμενος λόγος είναι ανεξάρτητος από την τιμή του } \lambda.$$

γ) Αφού είναι $(A\Delta E) = (AB\Gamma)$, τότε $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{\mu} \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{\mu} \Leftrightarrow \mu = 1$.

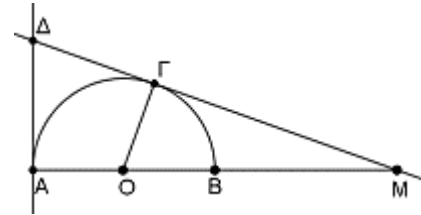
Άρα, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ισεμβαδικά για $\mu = 1$ και για οποιαδήποτε τιμή του λ , αφού, όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα (β), ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ . Επομένως, υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ , για τα οποία είναι $(A\Delta E) = (AB\Gamma)$. Τα ζεύγη αυτά είναι της μορφής $(\lambda, 1)$ με $\lambda \in \mathbb{N}^*$. Άρα, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

18370. Δίνεται ημικύκλιο κέντρου O και διαμέτρου $AB = 2\rho$. Στην προέκταση του AB προς το B , θεωρούμε σημείο M . Από το M φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα MG στο ημικύκλιο. Αν η εφαπτόμενη του ημικυκλίου στο σημείο A τέμνει την προέκταση της MG στο Δ τότε:

α) Αν $BM = 2\rho$ να αποδείξετε ότι $MG = 2\sqrt{2}\rho$. (Μονάδες 09)

β) i. Να αποδείξετε ότι $\frac{MO}{MG} = \frac{MA}{MA}$. (Μονάδες 09)

ii. Αν για το M ισχύει ότι $BM = \lambda \cdot \rho$, όπου λ θετικός αριθμός, να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ , τέτοια ώστε $(\Delta M) = 9(MOG)$. (Μονάδες 07)



Λύση

α) Το εφαπτόμενο τμήμα MG είναι κάθετο στην ακτίνα OG . Είναι $MO = MB + BO = 2\rho + \rho = 3\rho$.

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο MOG :

$$OM^2 = OG^2 + MG^2 \Leftrightarrow MG^2 = OM^2 - OG^2 = (3\rho)^2 - \rho^2 = 8\rho^2 \Leftrightarrow MG = 2\sqrt{2}\rho$$

β) i. Τα τρίγωνα OMG και ΔM είναι όμοια γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία αντίστοιχα:

$\hat{A} = \hat{G} = 90^\circ$ και την γωνία M κοινή. Επομένως οι ομόλογες πλευρές τους θα είναι ανάλογες:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{G}$	M κοινή	$\hat{O} = \hat{\Delta}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο OMG	MO	OG	MG
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΔM	$M\Delta$	ΔA	MA

$$\frac{M\Delta}{MO} = \frac{MA}{MG} \Leftrightarrow \frac{M\Delta}{MA} = \frac{MO}{MG}$$

ii. Δείξαμε ότι τα τρίγωνα ΔM και OMG είναι όμοια, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το

$$\text{τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, δηλαδή} \quad \frac{(AM\Delta)}{(OMG)} = \left(\frac{AM}{GM}\right)^2 = \frac{AM^2}{GM^2} \quad (1)$$

$$OM = MB + BO = \lambda\rho + \rho = (\lambda + 1)\rho.$$

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο MOG :

$$GM^2 = OM^2 - OG^2 = ((\lambda + 1)\rho)^2 - \rho^2 = (\lambda^2 + 2\lambda + 1 - 1)\rho^2 = (\lambda^2 + 2\lambda)\rho^2$$

$$\text{Είναι } AM = 2\rho + \lambda\rho = (\lambda + 2)\rho.$$

$$\text{Η (1) γίνεται } \frac{(AM\Delta)}{(OMG)} = \frac{AM^2}{GM^2} = \frac{(\lambda + 2)^2 \rho^2}{(\lambda^2 + 2\lambda)\rho^2} = \frac{(\lambda + 2)^2}{\lambda(\lambda + 2)} = \frac{\lambda + 2}{\lambda}.$$

$$\text{Αφού } (AM\Delta) = 9(OMG) \text{ έχουμε } \frac{(AM\Delta)}{(OMG)} = \frac{9(OMG)}{(OMG)} = 9 \Leftrightarrow \frac{\lambda + 2}{\lambda} = 9 \Leftrightarrow \lambda + 2 = 9\lambda \Leftrightarrow 8\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}.$$

18371. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ μέσο της AG . Από το Δ φέρουμε ΔE παράλληλη στην $B\Gamma$ και ίση με το μισό της AB όπως στο σχήμα.

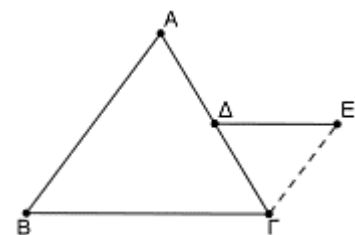
α) i. Να αποδείξετε ότι $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta E}{2B\Gamma}$. (Μονάδες 10)

ii. Αν το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, τότε να αποδείξετε ότι $(\Delta E\Gamma) = (AB\Delta)$. (Μονάδες 10)

β) Σε ένα τεστ που χρειάστηκε από τους μαθητές να βρεθεί ο λόγος

$\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)}$ ένας μαθητής έγραψε: «Παρατηρώ ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$ έχουν $\Delta = \Gamma$, ως εντός

εναλλάξ των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $\Delta\Gamma$ και δύο πλευρές τους ανάλογες,



αφού $\frac{\Delta\Gamma}{\Lambda\Gamma} = \frac{\Delta\Xi}{\Lambda\Xi} = \frac{1}{2}$. Επειδή έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις γωνίες τους Δ, Γ ίσες, τα τρίγωνα θα είναι όμοια. Επομένως, ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους $\frac{(\Delta\Xi\Gamma)}{(\Lambda\Gamma\Xi)} = \left(\frac{\Delta\Xi}{\Lambda\Xi}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ». Ο καθηγητής του του είπε ότι έχει κάνει ένα σημαντικό λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε σε ποιο σημείο ο συλλογισμός του μαθητή είναι λανθασμένος;

(Μονάδες 05)

Λύση

α) i. Τα τρίγωνα $\Delta\Xi\Gamma$ και $\Lambda\Gamma\Xi$ έχουν τις γωνίες τους $\Gamma = \Delta$, γιατί είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\Delta\Xi$ και $\Lambda\Gamma$ που τέμνονται από την $\Delta\Gamma$. Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές:

$$\frac{(\Delta\Xi\Gamma)}{(\Lambda\Gamma\Xi)} = \frac{\Delta\Xi \cdot \Delta\Gamma}{\Lambda\Gamma \cdot \Lambda\Xi} = \frac{\Delta\Xi \cdot \Delta\Gamma}{2\Delta\Gamma \cdot \Lambda\Xi} = \frac{\Delta\Xi}{2\Lambda\Xi} \quad (1), \text{ γιατί από υπόθεση } \Lambda\Gamma = 2\Delta\Gamma.$$

ii. Αν $\Delta\Xi\Gamma\Lambda$ παραλληλόγραμμο, τότε $\Delta\Xi = \Lambda\Gamma$. Επομένως η (1) γίνεται

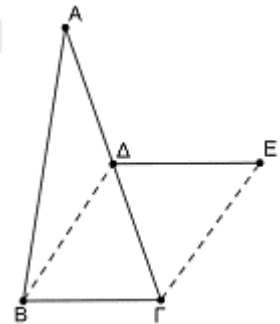
$$\frac{(\Delta\Xi\Gamma)}{(\Lambda\Gamma\Xi)} = \frac{\Delta\Xi}{2\Lambda\Xi} = \frac{\Lambda\Gamma}{2\Lambda\Xi} = \frac{1}{2}.$$

Στο τρίγωνο $\Lambda\Gamma\Xi$ η διάμεσος $\Lambda\Delta$ χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, τα $\Lambda\Delta\Gamma$ και $\Lambda\Delta\Xi$. Επομένως το καθένα από αυτά θα έχει το μισό

$$\text{εμβαδόν του } \Lambda\Gamma\Xi. \quad \frac{(\Lambda\Delta\Gamma)}{(\Lambda\Gamma\Xi)} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

Από τις (2), (3) προκύπτει ότι $(\Delta\Xi\Gamma) = (\Lambda\Delta\Gamma)$.

β) Ο μαθητής για να αποδείξει ότι τα τρίγωνα είναι όμοια χρησιμοποιεί το επιχείρημα ότι έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες μία προς μία και τις γωνίες Δ και Γ ίσες. Για να εξασφαλίσουμε όμως την ομοιότητα από το κριτήριο θα έπρεπε οι γωνίες να είναι οι περιεχόμενες των ανάλογων πλευρών, πράγμα το οποίο εδώ δεν συμβαίνει. Οι περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές $\Delta\Xi$, $\Delta\Gamma$ και $\Lambda\Xi$, $\Lambda\Gamma$ είναι οι Δ και Λ .



21189. Δίνεται παραλληλόγραμμο $\Lambda\Gamma\Delta$ και M, N τα μέσα των πλευρών του $\Lambda\Xi$ και $\Lambda\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) (\Lambda\Xi\Gamma) = (\Lambda\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(\Lambda\Xi\Gamma\Delta). \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

$$\beta) \frac{(\Lambda M N)}{(\Lambda\Xi\Gamma)} = \frac{1}{4}. \quad (\text{Μονάδες } 12)$$

$$\gamma) (\Lambda M N) = \frac{1}{8}(\Lambda\Xi\Gamma\Delta). \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

Λύση

α) Για τα τρίγωνα $\Lambda\Xi\Gamma$ και $\Lambda\Gamma\Delta$ έχουμε

- $\Lambda\Gamma$ είναι κοινή πλευρά.
- $\Lambda\Xi = \Gamma\Delta$ αφού το τετράπλευρο $\Lambda\Xi\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
- $\Xi\Gamma = \Delta\Lambda$ αφού το τετράπλευρο $\Lambda\Xi\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα έχουν ίσα εμβαδά, δηλαδή

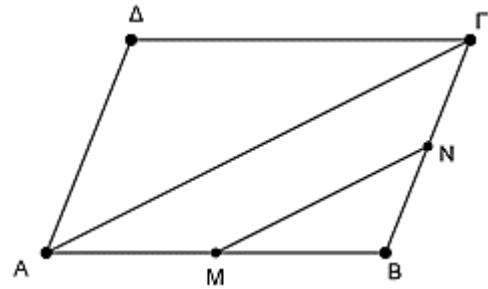
$$(\Lambda\Xi\Gamma) = (\Lambda\Gamma\Delta) \text{ τότε } (\Lambda\Xi\Gamma\Delta) = (\Lambda\Xi\Gamma) + (\Lambda\Gamma\Delta) = (\Lambda\Xi\Gamma) + (\Lambda\Xi\Gamma) = 2(\Lambda\Xi\Gamma) \text{ δηλαδή}$$

$$(AB\Gamma) = (A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$$

β) Αφού τα M, N είναι τα μέσα των πλευρών AB και AΓ αντίστοιχα, τότε $MA = MB = \frac{AB}{2}$ και $BN = NG = \frac{B\Gamma}{2}$.

Τα τρίγωνα BMN και ABΓ έχουν την γωνία B κοινή,

$$\text{επομένως } \frac{(BMN)}{(AB\Gamma)} = \frac{MB \cdot BN}{AB \cdot B\Gamma} = \frac{\frac{AB}{2} \cdot \frac{B\Gamma}{2}}{AB \cdot B\Gamma} = \frac{1}{4}$$



γ) Είναι $\frac{(BMN)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (BMN) = \frac{1}{4}(AB\Gamma)$. Επειδή από το (α) ερώτημα έχουμε $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$,

$$\text{ισχύει ότι } (BMN) = \frac{1}{4}(AB\Gamma) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{8}(AB\Gamma\Delta).$$

21194. Δίνεται τρίγωνο ABΓ, AM η διάμεσός του και E το μέσο της AM. Από το σημείο E φέρουμε παράλληλες στις AB και AΓ οι οποίες τέμνουν την BΓ στα σημεία Δ και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: α) $(AMB) = (AM\Gamma)$ (Μονάδες 5)

β) $(ME\Delta) = \frac{1}{8}(AB\Gamma)$. (Μονάδες 12)

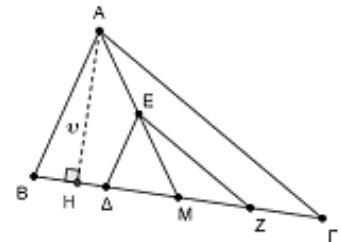
γ) $(AB\Delta E) = (A\Gamma Z E)$ (Μονάδες 8)

Λύση

α) Έστω $AH = v$ το κοινό ύψος των τριγώνων AMB και AMΓ. Έχουμε

$$(AMB) = \frac{1}{2} BM \cdot v \text{ και } (AM\Gamma) = \frac{1}{2} \Gamma M \cdot v.$$

Η AM είναι διάμεσος του τριγώνου ABΓ, επομένως $BM = \Gamma M$ και από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε $(AMB) = (AM\Gamma)$.



β) Στο τρίγωνο AMB το E είναι το μέσο της AM και $ED \parallel AB$, επομένως

$$\text{και το } \Delta \text{ είναι το μέσο της BM, άρα } M\Delta = \frac{1}{2} BM \text{ και } ME = \frac{1}{2} AM$$

$$\text{Από το (α) ερώτημα έχουμε } (AMB) = (AM\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma).$$

Τα τρίγωνα MEΔ και AMB έχουν την γωνία AMB κοινή, επομένως

$$\frac{(ME\Delta)}{(AMB)} = \frac{ME \cdot M\Delta}{AM \cdot BM} = \frac{\frac{1}{2} AM \cdot \frac{1}{2} BM}{AM \cdot BM} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (ME\Delta) = \frac{1}{4}(AMB) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}(AB\Gamma) = \frac{1}{8}(AB\Gamma).$$

γ) Από το (α) ερώτημα είναι $(AMB) = (AM\Gamma)$ (1), επιπλέον στο τρίγωνο ΔEZ είναι

$$M\Delta = \frac{1}{2} BM = \frac{1}{2} \Gamma M = MZ \text{ συνεπώς η EM είναι διάμεσος του, άρα } (ME\Delta) = (MEZ) \text{ (2).}$$

$$\text{Αφαιρώντας τις σχέσεις (1) - (2) έχουμε: } (AMB) - (ME\Delta) = (AM\Gamma) - (MEZ) \Leftrightarrow (AB\Gamma\Delta) = (A\Gamma Z E)$$

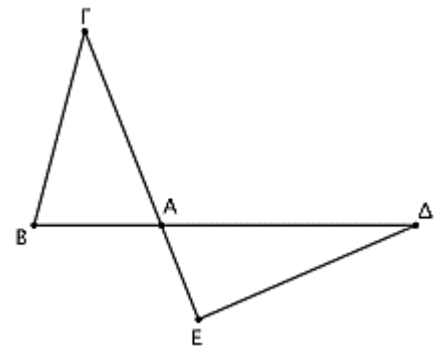
18302. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τις πλευρές BA και GA κατά τμήματα $A\Delta$ και AE αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν είναι $A\Delta = 2AB$ και $AE = \frac{1}{2}AG$, να αποδείξετε ότι τα

τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι ισοδύναμα. (Μονάδες 09)

β) Αν προεκτείνουμε τις πλευρές BA και GA κατά τμήματα είναι $A\Delta = \mu \cdot AB$ και $AE = \nu \cdot AG$ αντίστοιχα, όπου μ, ν είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ποια πρέπει να είναι η σχέση των αριθμών μ και ν ώστε τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ να είναι ισοδύναμα; (Μονάδες 10)

γ) Αν είναι $AG = \frac{3}{2}AB$ και $A\Delta = 2AB$, να βρείτε τις δυνατές θέσεις του E ώστε τα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ να είναι όμοια. (Μονάδες 06)



Λύση

α) Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ έχουν $\Delta AE = B\hat{A}\Gamma$ (ως κατακορυφήν), οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές, δηλαδή:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot AG} = \frac{2AB \cdot \frac{1}{2}AG}{AB \cdot AG} = 1 \Leftrightarrow (A\Delta E) = (AB\Gamma), \text{ δηλαδή τα τρίγωνα } A\Delta E \text{ και } AB\Gamma \text{ είναι ισοδύναμα.}$$

β) Αν προεκτείνουμε τις πλευρές BA και GA κατά τμήματα είναι $A\Delta = \mu \cdot AB$ και $AE = \nu \cdot AG$ αντίστοιχα, όπου μ, ν είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε θα έχουμε:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot AG} = \frac{\mu AB \cdot \nu AG}{AB \cdot AG} = \mu \cdot \nu$$

Αφού τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι ισοδύναμα, θα πρέπει $\mu \cdot \nu = 1$. Επομένως, οι αριθμοί μ και ν είναι αντίστροφοι.

γ) Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ έχουν $\Delta AE = B\hat{A}\Gamma$ (ως κατακορυφήν), οπότε θα είναι όμοια αν και μόνο αν έχουν τις προσκείμενες πλευρές σε αυτές τις γωνίες ανάλογες. Επομένως πρέπει:

$$\frac{AG}{A\Delta} = \frac{AB}{AE} \Leftrightarrow \frac{AG}{AB} = \frac{A\Delta}{AE} \Leftrightarrow \frac{2AB}{AE} = \frac{\frac{3}{2}AB}{AB} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow AE = \frac{4}{3}AB \text{ ή}$$

$$\frac{AG}{AE} = \frac{AB}{A\Delta} \Leftrightarrow \frac{AG}{AB} = \frac{AE}{A\Delta} \Leftrightarrow \frac{AE}{2AB} = \frac{\frac{3}{2}AB}{AB} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow AE = 3AB.$$

Άρα, τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια όταν $AE = \frac{4}{3}AB$ ή $AE = 3AB$.

18369. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$, $A = 36^\circ$.

α) Αν η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B , να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

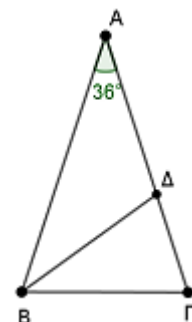
ii. Να γράψετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών.

(Μονάδες 06)

β) Μετακινούμε το σημείο Δ στο εσωτερικό της AG .

Για ποια θέση του σημείου Δ θα ισχύει $\frac{(AB\Delta)}{(\Delta B\Gamma)} = 3$.

(Μονάδες 09)



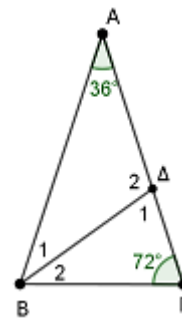
Λύση

α) Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = A\Gamma$, οπότε $B = \Gamma$.

$$\text{Είναι } A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 36^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow 2B = 144 \Leftrightarrow B = \Gamma = 72^\circ.$$

Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B , οπότε $B_1 = B_2 = 36^\circ$, άρα $A = B_1$ και το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με $A\Delta = B\Delta$.

Η γωνία Δ_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο $A\Delta B$, οπότε $\Delta_1 = A + B_1 = 72^\circ$ επομένως το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές με $B\Delta = B\Gamma$.



i. Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $AB\Gamma$ έχουν τη γωνία Γ κοινή και $A = B_2 = 36^\circ$, επομένως είναι όμοια, διότι έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

ii. Οι ομόλογες πλευρές των όμοιων τριγώνων του προηγούμενου ερωτήματος φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}$	$\hat{B}_2 = \hat{A}$	$\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$	$B\Delta$	$\Delta\Gamma$	$B\Gamma$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο $AB\Gamma$	AB	$B\Gamma$	$A\Gamma$

$$\text{οπότε } \frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma} = \frac{B\Delta}{AB}.$$

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Delta B\Gamma$ έχουν τις γωνίες Δ_1, Δ_2 παραπληρωματικές. Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν αυτές τις γωνίες, δηλαδή

$$\frac{(AB\Delta)}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot B\Delta}{\Delta\Gamma \cdot B\Delta} = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow 3 = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow A\Delta = 3\Delta\Gamma.$$

Το Δ θα χωρίζει το $A\Gamma$ σε δύο τμήματα $A\Delta$ και $\Delta\Gamma$ με λόγο 3:1.

20678. Η κορνίζα του παρακάτω σχήματος αποτελείται από δύο όμοια ορθογώνια με παράλληλες πλευρές και κοινό κέντρο O . Το ορθογώνιο $A'B'\Gamma'\Delta'$ έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$.

α) Να βρείτε τον λόγο ομοιότητας του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ προς το ορθογώνιο $A'B'\Gamma'\Delta'$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι όμοια. (Μονάδες 6)

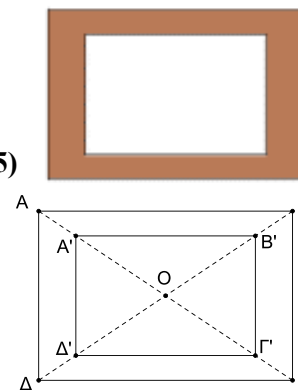
γ) Στην κορνίζα τοποθετούμε μια φωτογραφία που χωράει ακριβώς στο κάδρο, χωρίς να χάνεται κανένα μέρος της.

Η διαγώνιος $A\Gamma$ της κορνίζας έχει μήκος 40 cm και $\angle AOB = 120^\circ$.

i. Πόσο μήκος έχει η διαγώνιος της φωτογραφίας; (Μονάδες 6)

ii. Πόσο είναι το εμβαδόν της φωτογραφίας;

(Μονάδες 8)



Λύση

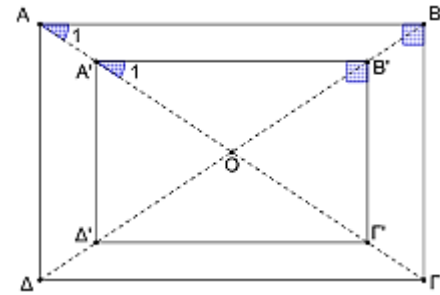
α) Αφού το ορθογώνιο $A'B'\Gamma'\Delta'$ έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, είναι

$$(AB\Gamma\Delta) = 2(A'B'\Gamma'\Delta') \Leftrightarrow \frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma'\Delta')} = 2.$$

Αν είναι λ ο λόγος ομοιότητας του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ προς το ορθογώνιο $A'B'\Gamma'\Delta'$, τότε

$$\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma'\Delta')} = \lambda^2, \text{ άρα } \lambda^2 = 2 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{2}$$

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $A_1 = A_2$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων AB , $A'B'$ που τέμνονται από την $A\Gamma$ και $B = B' = 90^\circ$. Επομένως τα δύο τρίγωνα είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.



γ) i. Από το ερώτημα α) έχουμε ότι ο λόγος ομοιότητας των δύο

ορθογωνίων είναι $\lambda = \sqrt{2}$, οπότε $\frac{AB}{A'B'} = \sqrt{2}$.

Επιπλέον, από την ομοιότητα των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουμε ότι

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$, άρα $\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{40}{A'\Gamma'} = \sqrt{2} \Leftrightarrow A'\Gamma' = \frac{40}{\sqrt{2}} = \frac{40\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2}$, δηλαδή η διαγώνιος της φωτογραφίας έχει μήκος $20\sqrt{2}$ cm.

ii. Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου $A'B'\Gamma'\Delta'$ είναι ίσες, οπότε $OA' = OB' = OG' = OD' = \frac{A'\Gamma'}{2} = 10\sqrt{2}$.

Είναι $\angle A'OB' = \angle \Gamma'OD' = 120^\circ$ ως κατακορυφήν. Για το εμβαδόν των τριγώνων $OA'B'$ και $OG'\Delta'$ ισχύει

$$(\angle OA'B') = \frac{1}{2} OA' \cdot OB' \cdot \eta\mu 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ και}$$

$$(\angle OG'\Delta') = \frac{1}{2} OG' \cdot OD' \cdot \eta\mu 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}.$$

Είναι $\angle A'OD' = \angle \Gamma'OB' = 60^\circ$ ως παραπληρωματικές της γωνίας $\angle A'OB'$.

$$\text{Είναι } (\angle OA'\Delta') = \frac{1}{2} OA' \cdot OD' \cdot \eta\mu 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ και}$$

$$(\angle OB'\Gamma') = \frac{1}{2} OB' \cdot OG' \cdot \eta\mu 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}.$$

Το εμβαδόν της φωτογραφίας είναι

$$(\angle A'B'\Gamma'\Delta') = (\angle OA'B') + (\angle OG'\Delta') + (\angle OA'\Delta') + (\angle OB'\Gamma') = 4 \cdot 50\sqrt{3} = 200\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

21839. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 6$ cm και $A\Gamma = 3$ cm και

$\angle A$ οξεία. Εξωτερικά του τριγώνου με πλευρές τις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα του τριγώνου $AB\Gamma$ σχηματίζουμε τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma H Z$ και φέρνουμε την EZ , όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AEZ και $AB\Gamma$ είναι ισοδύναμα. (Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου $EZH\Gamma B\Delta$ είναι $(EZH\Gamma B\Delta) = 54 \text{ cm}^2$:

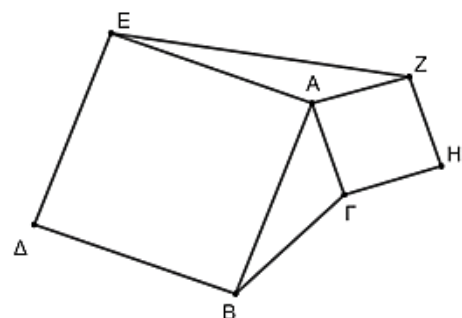
i. Να αποδείξετε ότι η γωνία A του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι

$$\angle A = 30^\circ.$$

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει για πλευρά την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 5)



Λύση

α) Είναι $\angle B\Delta\Gamma + \angle E\Delta Z = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ$ άρα οι γωνίες $B\Delta\Gamma$ και $E\Delta Z$ είναι παραπληρωματικές. Γνωρίζουμε όμως ότι αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των

$$\text{πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα } \frac{(AB\Gamma)}{(E\Delta Z)} = \frac{AB \cdot A\Gamma}{AE \cdot AZ} = 1 \text{ οπότε } (AB\Gamma) = (E\Delta Z).$$

β) i. Από το α) ερώτημα έχουμε ότι $(AB\Gamma) = (E\Delta Z)$ και από υπόθεση είναι $(EZH\Gamma B\Delta) = 54$.

Είναι $(AB\Gamma) + (AB\Delta E) + (AEZ) + (A\Gamma HZ) = (EZH\Gamma B\Delta) \Leftrightarrow (AB\Gamma) + 36 + (AB\Gamma) + 9 = 54 \Leftrightarrow$

$$2(AB\Gamma) = 9 \Leftrightarrow (AB\Gamma) = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma \eta\mu A = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 6 \cdot 3 \eta\mu A = 9 \Leftrightarrow \eta\mu A = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = 30^\circ.$$

ii. Από νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2AB \cdot A\Gamma \cdot \sin 30^\circ = 6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 45 - 18\sqrt{3}.$$

Άρα το εμβαδόν του ζητούμενου τετραγώνου είναι $E = B\Gamma^2 = 45 - 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$

22023. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$ η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.

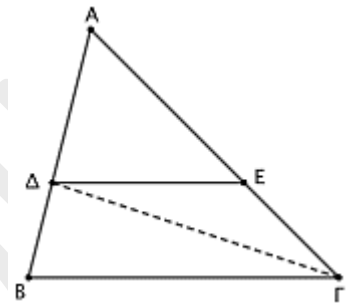
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}$ όταν το σημείο Δ είναι μέσο της AB .

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου Δ ώστε $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{9}$.

(Μονάδες 05)



Λύση

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ έχουν $\angle B = \angle A\Delta E$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $B\Delta$) και κοινή τη γωνία A . Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα (α), τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{A}$	$\hat{A\Delta E} = \hat{\Gamma}$	$\hat{A\Delta E} = \hat{B}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο $A\Delta E$	ΔE	$A\Delta$	AE
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο $AB\Gamma$	$B\Gamma$	AB	$A\Gamma$

Δίνεται ότι το σημείο Δ είναι μέσο της AB . Επομένως, ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων $A\Delta E$ και $AB\Gamma$

$$\text{είναι: } \lambda = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{A\Delta}{2A\Delta} = \frac{1}{2}.$$

Αφού τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο

$$\text{του λόγου ομοιότητας, δηλαδή: } \frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \lambda^2 = \frac{1}{4}.$$

γ) Ζητάμε τη θέση του σημείου Δ ώστε να είναι . Είναι

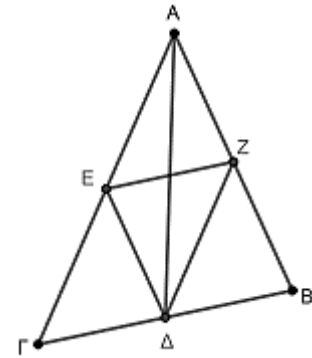
$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow \frac{(A\Delta\Gamma) - (A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow \frac{(A\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma)} - \frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow \frac{\lambda AB \cdot A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} - \lambda^2 = \frac{2}{9} \Leftrightarrow \lambda - \lambda^2 = \frac{2}{9} \Leftrightarrow$$

$$9\lambda^2 - 9\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3} \text{ ή } \lambda = \frac{1}{3}$$

Άρα, το σημείο Δ χωρίζει εσωτερικά την πλευρά AB σε λόγο λ τέτοιο ώστε: $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$ ή $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{1}{3}$.

22150. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με E και Z τα μέσα των πλευρών του $A\Gamma$ και AB , αντίστοιχα.

α) Αν επιπλέον το ευθύγραμμο τμήμα $A\Delta$ ενώνει την κορυφή A του τριγώνου $AB\Gamma$ και το μέσο Δ της απέναντι πλευράς $B\Gamma$, όπως στο σχήμα, να αποδείξετε ότι:



i. Τα τρίγωνα $E\Delta\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$.

ii. Για το εμβαδόν $(AE\Delta Z)$ του τετραπλεύρου $AE\Delta Z$ ισχύει ότι $(AE\Delta Z) = (AB\Gamma) - 2(E\Delta\Gamma)$.

iii. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AE\Delta Z$ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του

εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 18)

β) Αν το σημείο Δ είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο της πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε ισχύει ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AE\Delta Z$ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$;

(Μονάδες 07)

Λύση

α) i. Το E είναι μέσο της $A\Gamma$, άρα $\frac{GE}{AG} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{GE}{AG} = \frac{1}{2}$. Όμοια $\frac{Z\Delta}{B\Gamma} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{Z\Delta}{B\Gamma} = \frac{1}{2}$.

Άρα τα τρίγωνα $E\Delta\Gamma$ και $AB\Gamma$ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, εφόσον η Γ είναι κοινή γωνία.

Επομένως τα τρίγωνα $E\Delta\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας τον λόγο των ομόλογων πλευρών τους, δηλαδή $\frac{1}{2}$.

ii. Άρα τα εμβαδά $(E\Delta\Gamma)$ και $(AB\Gamma)$ των τριγώνων $E\Delta\Gamma$ και $AB\Gamma$ αντίστοιχα έχουν λόγο ίσο με το

τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. Επομένως: $\frac{(E\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (E\Delta\Gamma) = \frac{1}{4}(AB\Gamma)$

Τα τρίγωνα $ZB\Delta$ και $AB\Gamma$ είναι επίσης όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$, αφού το Z είναι μέσο της AB και το

Δ είναι μέσο της $B\Gamma$ και έχουν τη γωνία B κοινή. Επομένως: $\frac{(ZB\Delta)}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (ZB\Delta) = \frac{1}{4}(AB\Gamma)$.

Είναι $(AE\Delta Z) = (AB\Gamma) - (E\Delta\Gamma) - (ZB\Delta) \Leftrightarrow (AE\Delta Z) = (AB\Gamma) - 2(E\Delta\Gamma)$

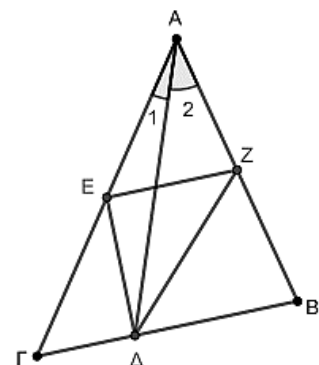
iii. $(AE\Delta Z) = (AB\Gamma) - 2(E\Delta\Gamma) = (AB\Gamma) - 2 \cdot \frac{1}{4}(AB\Gamma) = (AB\Gamma) - \frac{1}{2}(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$

β) Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή A του τριγώνου $AB\Gamma$ με το τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ της απέναντι πλευράς $B\Gamma$.

Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $A\Delta\Gamma$ έχουν κοινή γωνία την $\angle A_1 = \angle \Delta A E$, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα

$\frac{(A\Delta E)}{(A\Delta\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{A\Delta \cdot A\Gamma} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (A\Delta E) = \frac{1}{2}(A\Delta\Gamma)$.

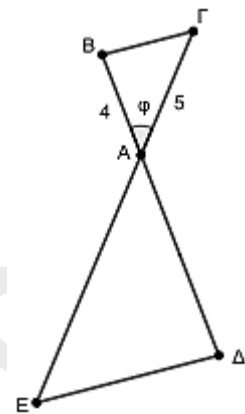
Όμοια προκύπτει ότι $(A\Delta Z) = \frac{1}{2}(A\Delta B)$. Είναι



$$(A\epsilon\Delta Z) = (A\Delta E) + (A\Delta Z) = \frac{1}{2}(A\Delta\Gamma) + \frac{1}{2}(A\Delta B) = \frac{1}{2}[(A\Delta\Gamma) + (A\Delta B)] = \frac{1}{2}(A\Delta\Gamma).$$

Άρα το εμβαδόν του τετραπλεύρου $A\epsilon\Delta Z$ είναι ίσο με το $1/2$ του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

22141. Το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ έχει τα άκρα του B και Γ στις προεκτάσεις των πλευρών ΔA και $E A$, αντίστοιχα, του τριγώνου $A\Delta E$, έτσι ώστε να είναι παράλληλο στην πλευρά ΔE . Επίσης δίνονται τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, $AB = 4$ και $A\Gamma = 5$. Έστω ότι ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι $\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \frac{1}{4}$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια με λόγο $\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $\angle B\Gamma A = \varphi$ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $(A\Delta E)$ του τριγώνου $A\Delta E$ είναι ίσο με $40\eta\mu\varphi$.

(Μονάδες 07)

γ) Να βρείτε σημείο Z εσωτερικό της πλευράς $\Delta\Delta$, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $A\Gamma Z$ που σχηματίζεται να είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου $A\Delta E$.

(Μονάδες 08)

Λύση

α) Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος τους Θαλή το τρίγωνο $AB\Gamma$ που ορίζεται από τις προεκτάσεις των πλευρών ΔA και $E A$ του τριγώνου $A\Delta E$ και την $B\Gamma$, παράλληλη προς τη ΔE έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του $A\Delta E$. Άρα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια, με: $\frac{AB}{\Delta\Delta} = \frac{A\Gamma}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{\Delta\epsilon}$.

Επειδή ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, αν ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ίσος με λ , τότε:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

β) Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu\varphi = \frac{1}{2} 4 \cdot 5 \cdot \eta\mu\varphi = 10\eta\mu\varphi$, οπότε $\frac{10\eta\mu\varphi}{(A\Delta E)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (A\Delta E) = 40\eta\mu\varphi$.

γ) Είναι $(A\Gamma Z) = \frac{1}{4} (A\Delta E) \Leftrightarrow (A\Gamma Z) = (AB\Gamma) \Leftrightarrow \frac{(A\Gamma Z)}{(AB\Gamma)} = 1$.

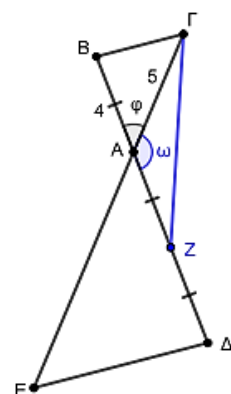
Επίσης οι γωνίες φ και ω , των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Gamma Z$ αντίστοιχα είναι παραπληρωματικές. Επομένως ο λόγος των εμβαδών $(AB\Gamma)$ και $(A\Gamma Z)$ των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Gamma Z$ αντίστοιχα είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Δηλαδή:

$$\frac{(A\Gamma Z)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Gamma \cdot AB}{A\Gamma \cdot AZ} \Leftrightarrow \frac{AB}{AZ} = 1 \Leftrightarrow AB = AZ \Leftrightarrow AZ = \frac{AB}{2}, \text{ εφόσον οι πλευρές } AB$$

και $\Delta\Delta$ είναι ομόλογες σε όμοια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ με λόγο ομοιότητας

$$\lambda = \frac{1}{2} \text{ (από το α)}.$$

Επομένως το σημείο Z είναι το μέσο της πλευράς $\Delta\Delta$ του τριγώνου $A\Delta E$.



22148. Έστω E σημείο στην πλευρά GA του τριγώνου $AB\Gamma$. Από το E φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$ του $AB\Gamma$ η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ και παίρνουμε σημείο Z στην προέκταση $A\chi$ της πλευράς GA του τριγώνου $AB\Gamma$ ώστε να είναι $AZ = AE$, όπως στο σχήμα.

α) Έστω $AG = 3AE$. Να αποδείξετε ότι:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ είναι ίσο με το $\frac{1}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 07)

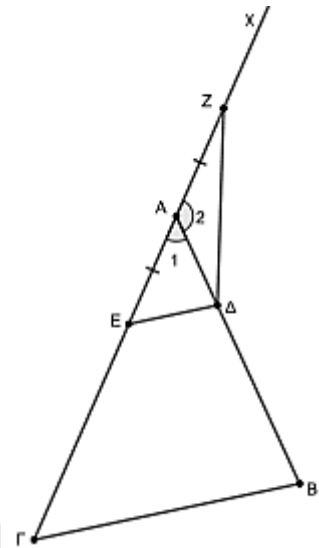
ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΔEZ είναι ίσο με τα $\frac{2}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του ΔEZ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του $AB\Gamma$, να

υπολογίσετε το λόγο $\frac{AE}{AG}$.

(Μονάδες 08)



Λύση

α) i. Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο $A\Delta E$ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών AB και AG του τριγώνου $AB\Gamma$ και την DE , παράλληλη προς τη $B\Gamma$ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του $AB\Gamma$. Άρα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια, με: $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{AG} = \frac{DE}{B\Gamma}$.

Ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι: $\lambda = \frac{AE}{AG} = \frac{AE}{3AE} = \frac{1}{3}$.

Επειδή ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, ο λόγος των εμβαδών ($A\Delta E$) και ($AB\Gamma$) των τριγώνων $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ αντίστοιχα είναι:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

ii. Οι γωνίες A_1 και A_2 των τριγώνων $A\Delta E$ και $A\Delta Z$ αντίστοιχα είναι παραπληρωματικές. Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ($A\Delta E$) και ($A\Delta Z$) αντίστοιχα είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Δηλαδή: $\frac{(A\Delta E)}{(A\Delta Z)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{A\Delta \cdot AZ} = \frac{AE}{AZ} = 1 \Leftrightarrow (A\Delta E) = (A\Delta Z)$.

Για το εμβαδόν του τριγώνου ΔEZ ισχύει ότι $(\Delta EZ) = (A\Delta E) + (A\Delta Z) = 2(A\Delta E)$, επομένως:

$$\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)} = \frac{2(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow (\Delta EZ) = \frac{2}{9}(AB\Gamma).$$

β) Έστω $\lambda = \frac{AE}{AG}$. Τότε με όμοιους συλλογισμούς με το ερώτημα α) έχουμε ότι τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$

είναι όμοια με λόγο λ και για τα εμβαδά τους ισχύει ότι $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \lambda^2$.

Επίσης, εφόσον $AE = AZ$ τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $A\Delta Z$ έχουν ίσα εμβαδά, ανεξάρτητα από την τιμή του λόγου λ και $(\Delta EZ) = (A\Delta E) + (A\Delta Z) = 2(A\Delta E)$ όπως στο α)ii). Άρα:

$$\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)} = \frac{2(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = 2\lambda^2 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}(AB\Gamma)}{(AB\Gamma)} = 2\lambda^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 2\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}. \text{ Άρα } \frac{AE}{AG} = \frac{1}{2}.$$

22243. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ζ στην πλευρά ΑΔ, ώστε

$$AZ = \frac{3}{4}AB.$$

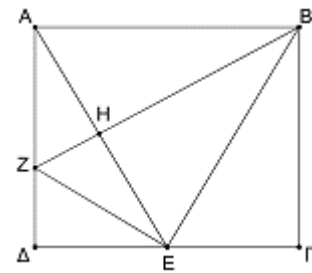
α) Να αποδείξετε ότι $BZ = \frac{5}{4}AB$. (Μονάδες 6)

β) Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, Ε το μέσο της ΓΔ και Η είναι το σημείο τομής των ΑΕ, ΒΖ, να αποδείξετε ότι:

i. $BE^2 = \frac{5}{4}AB^2$ και $ZE^2 = \frac{5}{16}AB^2$. (Μονάδες 6)

ii. το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ είναι όμοια και να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών τους. (Μονάδες 8)



Λύση

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ έχουμε ότι

$$BZ^2 = AB^2 + AZ^2 = AB^2 + \left(\frac{3}{4}AB\right)^2 = AB^2 + \frac{9}{16}AB^2 = \frac{25}{16}AB^2 \Leftrightarrow BZ = \frac{5}{4}AB.$$

β) Αφού το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, θα είναι $AD = BG = AB$. Επιπλέον

$$AZ = AD - AZ = AB - \frac{3}{4}AB = \frac{1}{4}AB.$$

i. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΕ έχουμε ότι

$$BE^2 = BG^2 + GE^2 = AB^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = AB^2 + \frac{1}{4}AB^2 = \frac{5}{4}AB^2.$$

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ έχουμε ότι

$$ZE^2 = DZ^2 + DE^2 = \left(\frac{1}{4}AB\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = \frac{1}{16}AB^2 + \frac{1}{4}AB^2 = \frac{5}{16}AB^2.$$

ii. Από το ερωτήματα α και βί έχουμε ότι $BE^2 + ZE^2 = \frac{5}{4}AB^2 + \frac{5}{16}AB^2 = \frac{25}{16}AB^2 = BZ^2$

Σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο με $BEZ = 90^\circ$.

γ) Είναι $\frac{BE}{BG} = \frac{\sqrt{\frac{5}{4}}AB}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ και $\frac{ZE}{EG} = \frac{\sqrt{\frac{5}{16}}AB}{\frac{1}{2}AB} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$

Τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ έχουν $\frac{BE}{BG} = \frac{ZE}{EG}$ και $BEZ = BGE = 90^\circ$, άρα είναι όμοια, γιατί έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες. Ο λόγος των

εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, οπότε $\frac{(BEZ)}{(BGE)} = \left(\frac{BE}{BG}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$

22260. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω

σχήματος, με $AB=4$, $A\Gamma=6$ και $\angle A = 150^\circ$.

Αν το σημείο Δ είναι το μέσον της $A\Gamma$ και το E

είναι σημείο της $B\Gamma$ ώστε $GE = \frac{2}{3}GB$, τότε να

υπολογίσετε:

α) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. Δίνεται $\eta\mu 150^\circ = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 9)

β) το λόγο $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}$.

(Μονάδες 9)

γ) το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu 150^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 6$

β) Από τα δεδομένα είναι $\Gamma\Delta = \frac{1}{2} \Gamma A$ και $GE = \frac{2}{3} GB$.

Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ έχουν τη γωνία Γ κοινή. Άρα ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν την κοινή γωνία Γ . Δηλαδή:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Gamma\Delta \cdot GE}{\Gamma A \cdot GB} = \frac{\frac{1}{2} \Gamma A \cdot \frac{2}{3} GB}{\Gamma A \cdot GB} = \frac{1}{3}.$$

γ) Είναι $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{(A\Delta E)}{6} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow (A\Delta E) = \frac{6}{3} = 2$

22340. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και το εσωτερικό σημείο K της πλευράς $B\Gamma$. Θεωρούμε σημείο O του ευθύγραμμου τμήματος AK , ώστε

$AO = \frac{3}{4} AK$. Από το O φέρνουμε ευθεία ε η οποία τέμνει τις πλευρές

AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(AO\Delta) = \frac{3}{4} (AK\Delta)$.

(Μονάδες 7)

ii. $(AOE) = \frac{3}{4} (AKE)$.

(Μονάδες 7)

iii. $(A\Delta E) = \frac{3}{4} (A\Delta KE)$.

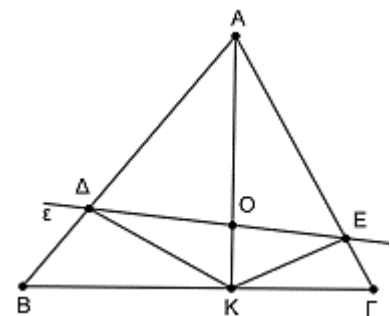
(Μονάδες 7)

β) Είναι δυνατόν να ισχύει $(A\Delta E) = \frac{3}{4} (AB\Gamma)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

Λύση

α) i) Τα τρίγωνα $AO\Delta$ και $AK\Delta$ έχουν την $\angle K\Delta A$ κοινή γωνία, άρα ο λόγος των εμβαδών τους, είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία αυτή. Επομένως

$$\frac{(AO\Delta)}{(AK\Delta)} = \frac{AO \cdot A\Delta}{AK \cdot A\Delta} = \frac{AO}{AK} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow (AO\Delta) = \frac{3}{4} (AK\Delta).$$



ii) Τα τρίγωνα AOE και AKE έχουν την ΚΑΕ κοινή γωνία, άρα ο λόγος των εμβαδών τους, είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία αυτή. Επομένως

$$\frac{(AOE)}{(AKE)} = \frac{AO \cdot AE}{AK \cdot AE} = \frac{AO}{AK} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow (AOE) = \frac{3}{4}(AKE).$$

$$\text{iii) Είναι } (ADE) = (AOD) + (AOE) = \frac{3}{4}(AK\Delta) + \frac{3}{4}(AKE) = \frac{3}{4}[(AK\Delta) + (AKE)] = \frac{3}{4}(A\Delta KE)$$

β) Το τετράπλευρο AΔKE περιέχεται στο εσωτερικό του τριγώνου ABΓ, άρα το εμβαδόν του είναι μικρότερο του εμβαδού του ABΓ, δηλαδή

$$(A\Delta KE) < (AB\Gamma) \Leftrightarrow \frac{3}{4}(A\Delta KE) < \frac{3}{4}(AB\Gamma) \Leftrightarrow (ADE) < \frac{3}{4}(AB\Gamma).$$

Επομένως δεν ισχύει $(ADE) = \frac{3}{4}(AB\Gamma)$.

22375. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημείο Κ ώστε $KB = 2ΚΓ$ και στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΚ παίρνουμε σημείο Λ ώστε $ΛΑ = 2ΛΚ$. Έστω E_1, E_2, E_3 και E_4 τα εμβαδά των τριγώνων ΑΛΓ, ΓΛΚ, ΒΛΚ και ΑΛΒ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } \frac{E_1}{E_2} = 2 \text{ και } \frac{E_4}{E_3} = 2.$$

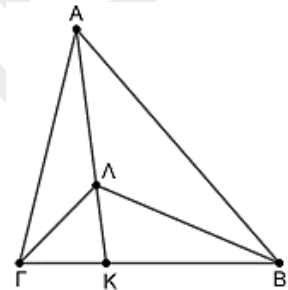
$$\text{ii. } E_1 = E_3.$$

β) Αν $E_1 = 10$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

(Μονάδες 10)

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 7)



Λύση

α) i) Στα τρίγωνα ΑΛΓ και ΓΛΚ οι γωνίες ΑΛΓ και ΓΛΚ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{ΛΓ \cdot ΛΑ}{ΛΓ \cdot ΛΚ} = \frac{ΛΑ}{ΛΚ} = \frac{2ΛΚ}{ΛΚ} = 2 \quad (1).$$

Στα τρίγωνα ΑΛΒ και ΒΛΚ οι γωνίες ΑΛΒ και ΒΛΚ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

$$\text{Επομένως } \frac{E_4}{E_3} = \frac{ΛΒ \cdot ΛΑ}{ΛΒ \cdot ΛΚ} = \frac{ΛΑ}{ΛΚ} = \frac{2ΛΚ}{ΛΚ} = 2 \quad (2).$$

ii) Στα τρίγωνα ΒΛΚ και ΓΛΚ οι γωνίες ΛΚΒ και ΛΚΓ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως

$$\frac{E_3}{E_2} = \frac{ΚΛ \cdot ΚΒ}{ΚΛ \cdot ΚΓ} = \frac{ΚΒ}{ΚΓ} = \frac{2ΚΓ}{ΚΓ} = 2 \quad (3).$$

$$\text{Από τις (1) και (3) έχουμε } \frac{E_1}{E_2} = \frac{E_3}{E_2} \Leftrightarrow E_1 = E_3 \quad (4).$$

$$\text{β) Από την (1) έχουμε } \frac{E_1}{E_2} = 2 \Leftrightarrow \frac{10}{E_2} = 2 \Leftrightarrow E_2 = 5. \text{ Από την (4) έχουμε } E_3 = E_1 = 10.$$

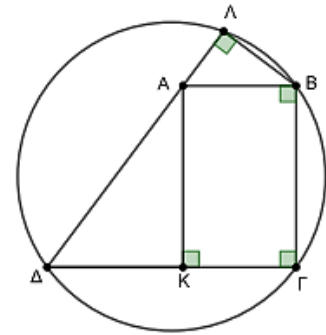
$$\text{Από την (2) έχουμε } \frac{E_4}{E_3} = 2 \Leftrightarrow \frac{E_4}{10} = 2 \Leftrightarrow E_4 = 20.$$

$$\text{Επομένως } (AB\Gamma\Delta) = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = 10 + 5 + 10 + 20 = 45.$$

22380. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $B = \Gamma = 90^\circ$ και $B\Gamma = 16$, $\Gamma\Delta = 22$ και $A\Delta = 20$. Έστω K η προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία $\Gamma\Delta$ και Λ η προβολή του σημείου B πάνω στην ευθεία $A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $K\Lambda = 12$, (Μονάδες 6)
- ii. το εμβαδόν του τριγώνου $AK\Lambda$ είναι 96. (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AK\Lambda$ και $B\Lambda\Delta$ είναι όμοια και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $B\Lambda\Delta$. (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε το μήκος της διαμέτρου του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου $B\Gamma\Delta\Lambda$. (Μονάδες 5)



Λύση

α) i) Το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο αφού έχει τρεις ορθές γωνίες, άρα $AK = B\Gamma = 16$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AK\Delta$ έχουμε:

$$K\Delta^2 = A\Delta^2 - AK^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144 \Leftrightarrow K\Delta = 12.$$

$$\text{ii)} \text{ Είναι } (AK\Delta) = \frac{1}{2} K\Delta \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96.$$

β) Τα τρίγωνα $AK\Delta$ και $B\Lambda\Delta$ είναι ορθογώνια και έχουν $\Delta = \Lambda AB$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $\Lambda\Delta$. Άρα τα τρίγωνα $AK\Delta$ και $B\Lambda\Delta$ είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητας τους είναι $\lambda = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{20}{10} = 2$ αφού $BA = K\Gamma$ από το ορθογώνιο $AB\Gamma K$ και

$$K\Gamma = \Gamma\Delta - K\Delta = 22 - 12 = 10.$$

Επειδή τα τρίγωνα $AK\Delta$ και $B\Lambda\Delta$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda=2$, ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων και ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, άρα

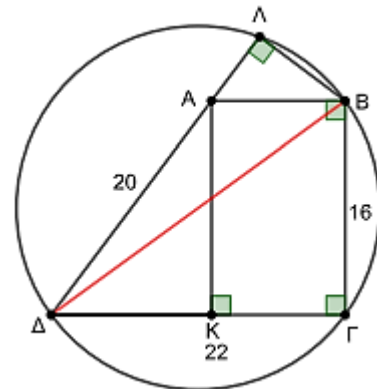
$$\frac{(AK\Delta)}{(B\Lambda\Delta)} = 2^2 \Leftrightarrow \frac{96}{(B\Lambda\Delta)} = 4 \Leftrightarrow 4(B\Lambda\Delta) = 96 \Leftrightarrow (B\Lambda\Delta) = 24.$$

γ) Φέρνουμε τη $B\Delta$, η οποία είναι διάμετρος του παραπάνω κύκλου, αφού $B\Gamma\Delta = 90^\circ$.

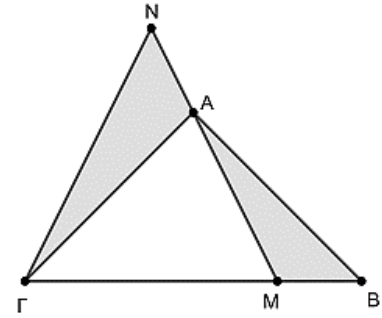
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ έχουμε: $B\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 = 16^2 + 22^2 = 256 + 484 = 740 \Leftrightarrow$

$$B\Delta = \sqrt{740} = \sqrt{4 \cdot 185} = 2\sqrt{185}$$

Επομένως η διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου $B\Gamma\Delta\Lambda$ έχει μήκος $2\sqrt{185}$.



22404. Το σημείο M διαιρεί εσωτερικά την πλευρά $B\Gamma$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ σε λόγο $\frac{MB}{M\Gamma}$ και το σημείο N διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα AM σε λόγο $\frac{NA}{NM}$.



α) Έστω $\frac{MB}{M\Gamma} = \frac{1}{3}$ και $\frac{NA}{NM} = \frac{1}{4}$. Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{(AMB)}{(AM\Gamma)} = \frac{1}{3}$. (Μονάδες 7)

ii. $\frac{NA}{AM} = \frac{1}{3}$. (Μονάδες 6)

iii. $(AMB) = (AN\Gamma)$. (Μονάδες 6)

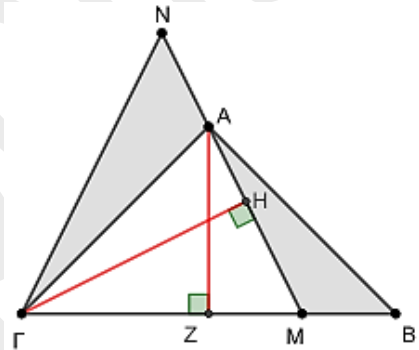
β) Έστω $\frac{MB}{M\Gamma} = 1$ και $(AMB) = (AN\Gamma)$. Να βρείτε τον λόγο $\frac{NA}{NM}$ στον οποίο το σημείο N διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα AM . (Μονάδες 6)

Λύση

α) i. Τα τρίγωνα AMB και $AM\Gamma$ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή A , το AZ , επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων, δηλαδή $\frac{(AMB)}{(AM\Gamma)} = \frac{MB}{M\Gamma} = \frac{1}{3}$ (1).

ii. Είναι $\frac{NA}{NM} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{NA}{NM - NA} = \frac{1}{4 - 1} \Leftrightarrow \frac{NA}{AM} = \frac{1}{3}$

iii. Τα τρίγωνα $AN\Gamma$ και $AM\Gamma$ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Γ , το ΓH , επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων, δηλαδή $\frac{(AN\Gamma)}{(AM\Gamma)} = \frac{NA}{AM} = \frac{1}{3}$ (2).



Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\frac{(AMB)}{(AM\Gamma)} = \frac{(AN\Gamma)}{(AM\Gamma)} \Leftrightarrow (AMB) = (AN\Gamma)$.

β) Είναι $\frac{MB}{M\Gamma} = 1$, άρα το M είναι το μέσο της $B\Gamma$, οπότε $(AMB) = (AM\Gamma)$, αφού έχουν ίσες βάσεις και το ίδιο ύψος AZ . Όμως $(AMB) = (AN\Gamma)$, άρα $(AM\Gamma) = (AN\Gamma)$ και αφού έχουν το ίδιο ύψος ΓH , θα έχουν ίσες τις αντίστοιχες βάσεις $NA = AM$. Επομένως το A είναι το μέσο του NM άρα $\frac{NA}{NM} = \frac{1}{2}$.

22406. Στο διπλανό σχήμα η ΒΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ και επίσης είναι ΒΓ = 2ΑΒ.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΔ.

(Μονάδες 6)

β) Να χωρίσετε το τρίγωνο ΑΒΓ σε τρία ισοδύναμα τρίγωνα.

(Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι ΑΒ = 12 και $\eta\mu B = \frac{3}{4}$.

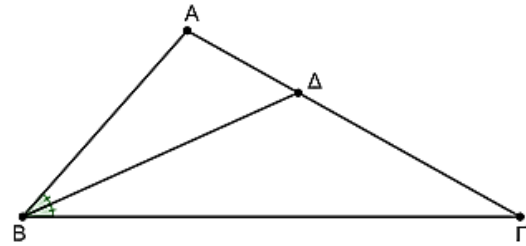
i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 108.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων ΔΒΓ και ΑΒΔ.

(Μονάδες 6)

Λύση



α) Στα τρίγωνα ΔΒΓ και ΑΒΔ οι γωνίες ΔΒΓ και ΑΒΔ είναι ίσες, αφού η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β του τριγώνου. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα

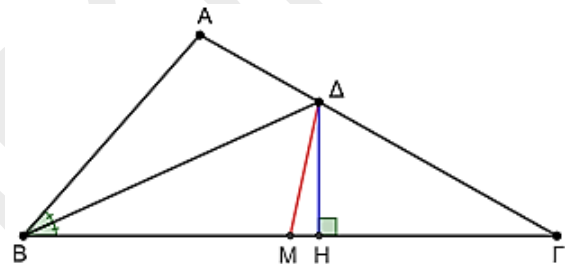
$$\frac{(\Delta B\Gamma)}{(\Delta B\Delta)} = \frac{BD \cdot B\Gamma}{BD \cdot BA} = \frac{B\Gamma}{BA} = \frac{2BA}{BA} = 2 \Leftrightarrow (\Delta B\Gamma) = 2(\Delta B\Delta).$$

β) Έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Τότε η διάμεσος ΔΜ του τριγώνου ΔΒΓ το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΜΓ, αφού αυτά έχουν ίσες βάσεις ΜΒ = ΜΓ και κοινό ύψος το ΔΗ από την κορυφή Δ.

Επομένως

$$(\Delta MB) = (\Delta MG) = \frac{1}{2}(\Delta B\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 2(\Delta B\Delta) = (\Delta B\Delta),$$

$$\text{άρα } (\Delta B\Delta) = (\Delta MB) = (\Delta MG).$$



γ) i. Είναι $(\Delta B\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot BA \cdot \eta\mu B = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 12 \cdot \frac{3}{4} = 108.$

ii. Είναι $(\Delta B\Gamma) + (\Delta B\Delta) = (\Delta B\Gamma) \Leftrightarrow 2(\Delta B\Delta) + (\Delta B\Delta) = 108 \Leftrightarrow 3(\Delta B\Delta) = 108 \Leftrightarrow (\Delta B\Delta) = 36$ και $(\Delta B\Gamma) = 2 \cdot 36 = 72$

22407. Στο διπλανό σχήμα η ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου

ΑΒΓ και η ΑΚ είναι η προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην ευθεία ΑΒ. Δίνονται ΑΒ = 10, ΑΓ = 15 και ΑΚ = 9.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΓΚ = 12 και (ΑΒΓ) = 60.

(Μονάδες 8)

ii. (ΑΔΒ) = 24 και (ΑΔΓ) = 36.

(Μονάδες 10)

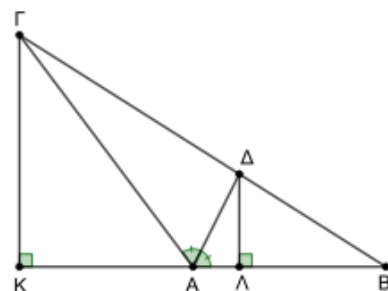
β) Έστω Λ η προβολή του σημείου Δ πάνω στην ευθεία ΑΒ.

i. Να αποδείξετε ότι $\frac{\Delta\Lambda}{\Gamma\Lambda} = \frac{2}{5}.$

(Μονάδες 3)

ii. Να βρείτε τον λόγο $\frac{\Delta\Lambda}{\Lambda\Gamma}$ στον οποίο το Λ σημείο διαιρεί εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα.

(Μονάδες 4)



Λύση

α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ έχουμε:

$$\Gamma K^2 = A\Gamma^2 - A K^2 = 15^2 - 9^2 = 225 - 81 = 144 \Leftrightarrow \Gamma K = 12.$$

$$\text{Είναι } (\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2} \cdot \text{ΑΒ} \cdot \text{ΓΚ} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60.$$

ii. Στα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ οι γωνίες ΔΑΒ και ΔΑΓ είναι ίσες, αφού η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα

$$\frac{(\text{ΑΔΒ})}{(\text{ΑΔΓ})} = \frac{\text{ΑΔ} \cdot \text{ΑΒ}}{\text{ΑΔ} \cdot \text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow (\text{ΑΔΒ}) = \frac{2}{3}(\text{ΑΔΓ}).$$

$$\text{Είναι } (\text{ΑΔΒ}) + (\text{ΑΔΓ}) = (\text{ΑΒΓ}) \Leftrightarrow \frac{2}{3}(\text{ΑΔΓ}) + (\text{ΑΔΓ}) = 60 \Leftrightarrow 2(\text{ΑΔΓ}) + 3(\text{ΑΔΓ}) = 180 \Leftrightarrow$$

$$5(\text{ΑΔΓ}) = 180 \Leftrightarrow (\text{ΑΔΓ}) = 36 \text{ και } (\text{ΑΔΒ}) = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24.$$

β) i. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΒΓ έχουν κοινή βάση την ΑΒ και αντίστοιχα ύψη ΔΛ και ΓΚ, άρα ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών, δηλαδή

$$\frac{(\text{ΑΔΒ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \frac{\Delta\Lambda}{\Gamma\text{Κ}} \Leftrightarrow \frac{24}{60} = \frac{\Delta\Lambda}{\Gamma\text{Κ}} \Leftrightarrow \frac{\Delta\Lambda}{\Gamma\text{Κ}} = \frac{2}{5}$$

ii. Οι ευθείες ΔΛ και ΓΚ είναι παράλληλες, ως κάθετες στην ευθεία ΑΒ. Επομένως τα τρίγωνα ΔΛΒ και ΓΚΒ έχουν πλευρές ανάλογες, άρα

$$\frac{\text{ΛΒ}}{\text{ΚΒ}} = \frac{\Delta\Lambda}{\Gamma\text{Κ}} \Leftrightarrow \frac{\text{ΛΒ}}{\text{ΚΒ}} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{\text{ΛΒ}}{\text{ΚΒ} - \text{ΛΒ}} = \frac{2}{5-2} = \frac{2}{3}.$$

3^ο Θέμα

19037. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ , E , Z των πλευρών AB , $B\Gamma$, $A\Gamma$ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\Delta B = \frac{1}{5} AB$, $E\Gamma = \frac{1}{4} B\Gamma$, $Z\Gamma = \frac{1}{2} A\Gamma$.

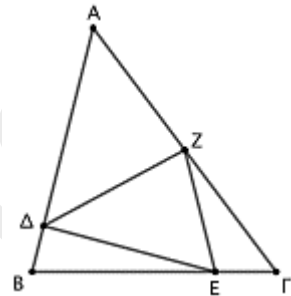
α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{(\Delta BE)}{(AB\Gamma)}$, $\frac{(E\Gamma Z)}{(AB\Gamma)}$, $\frac{(ZA\Delta)}{(AB\Gamma)}$. (Μονάδες 15)

β) Αν είναι $(AB\Gamma) = 120$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔEZ . (Μονάδες 10)

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΔBE και $AB\Gamma$ έχουν κοινή τη γωνία B . Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία B σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(\Delta BE)}{(AB\Gamma)} = \frac{B\Delta \cdot BE}{BA \cdot B\Gamma} = \frac{\frac{1}{5} AB \cdot \frac{3}{4} B\Gamma}{BA \cdot B\Gamma} = \frac{3}{20} \Leftrightarrow (\Delta BE) = \frac{3}{20} (AB\Gamma) \quad (1).$$



Τα τρίγωνα $E\Gamma Z$ και $AB\Gamma$ έχουν κοινή τη γωνία Γ . Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία Γ σε καθένα από

τα τρίγωνα. Έτσι είναι:
$$\frac{(E\Gamma Z)}{(AB\Gamma)} = \frac{E\Gamma \cdot \Gamma Z}{B\Gamma \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{1}{4} B\Gamma \cdot \frac{1}{2} A\Gamma}{B\Gamma \cdot A\Gamma} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow (E\Gamma Z) = \frac{1}{8} (AB\Gamma) \quad (2).$$

Τα τρίγωνα $ZA\Delta$ και $AB\Gamma$ έχουν κοινή τη γωνία A . Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία A σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(ZA\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AZ}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{4}{5} AB \cdot \frac{1}{2} A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow (ZA\Delta) = \frac{2}{5} (AB\Gamma) \quad (3)$$

β) Από το σχήμα έχουμε ότι:

$$(AB\Gamma) = (\Delta BE) + (E\Gamma Z) + (ZA\Delta) + (\Delta EZ) \stackrel{(1),(2),(3)}{=} \frac{3}{20} (AB\Gamma) + \frac{1}{8} (AB\Gamma) + \frac{2}{5} (AB\Gamma) + (\Delta EZ) \Leftrightarrow$$

$$120 = \frac{3}{20} 120 + \frac{1}{8} 120 + \frac{2}{5} 120 + (\Delta EZ) \Leftrightarrow 120 = 18 + 15 + 48 + (\Delta EZ) \Leftrightarrow (\Delta EZ) = 39$$

Κανονικά πολύγωνα

Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων

2^ο Θέμα

20638. Δύο κανονικά πολύγωνα έχουν πλήθος πλευρών n_1 και n_2 , κεντρικές γωνίες ω_1 και ω_2 και γωνίες φ_1 και φ_2 , αντίστοιχα. Αν ο λόγος του n_1 προς το n_2 είναι ίσος με $\frac{1}{2}$, τότε:

α) Να υπολογίσετε τον λόγο των αντίστοιχων κεντρικών γωνιών ω_1 και ω_2 αυτών των πολυγώνων. (Μονάδες 10)

β) Αν το πλήθος των πλευρών ενός από τα δύο κανονικά πολύγωνα είναι $n_1 = 5$, να υπολογίσετε τον λόγο των γωνιών των τους $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$. (Μονάδες 15)

Λύση

α) Είναι $\frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow n_2 = 2n_1$ και $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\frac{360^\circ}{n_1}}{\frac{360^\circ}{n_2}} = \frac{n_2}{n_1} = 2$

β) $n_1 = 5$ και $n_2 = 2 \cdot 5 = 10$, οπότε $\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{180^\circ - \frac{360^\circ}{5}}{180^\circ - \frac{360^\circ}{10}} = \frac{108^\circ}{144^\circ} = \frac{3}{4}$

21841. Έστω ΑΒΓΔΕΖ κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R).

α) Να αποδείξετε ότι:

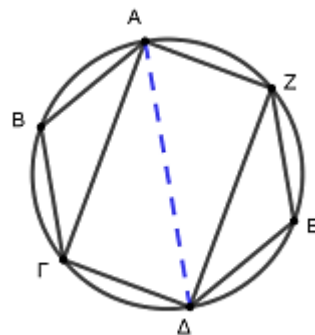
i. Η διαγώνιος ΑΔ του εξαγώνου είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες

6) ii. Οι γωνίες ΓΑΔ και ΑΔΖ είναι ίσες. (Μονάδες 3)

iii. Οι διαγωνιοί ΑΓ και ΖΔ του εξαγώνου είναι παράλληλες. (Μονάδες

3) iv. Το τετράπλευρο ΑΓΔΖ είναι ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδόν του συναρτήσει της ακτίνας R του κύκλου. (Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι σε κάθε κανονικό πολύγωνο με περισσότερες από πέντε πλευρές υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαγώνιοι που να είναι παράλληλες. Συμφωνείτε με την άποψη αυτού του μαθητή; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.



(Μονάδες 6)

Λύση

α) i. Οι κορυφές του κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ χωρίζουν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα μέτρου 60° το καθένα. Επειδή το τόξο ΑΓΔ ισούται με $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$, είναι ημικύκλιο και άρα η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου.

ii. Οι γωνίες ΓΑΔ και ΑΔΖ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα 60° το καθένα, άρα είναι ίσες.

iii. Οι γωνίες ΓΑΔ και ΑΔΖ είναι εντός εναλλάξ των ευθειών ΑΓ και ΔΖ που τέμνονται από την ΑΔ και εφόσον, σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, είναι ίσες οι ευθείς ΑΓ και ΔΖ είναι παράλληλες.

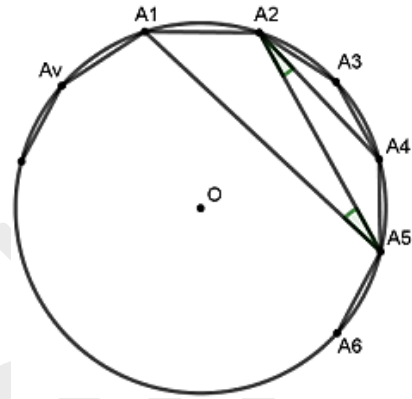
iv. Οι κορυφές του κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ χωρίζουν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα μέτρου 60° το καθένα. Η γωνία Γ του τετραπλεύρου ΑΓΔΖ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο ΔΕΑ που είναι ίσο με $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$ και εφόσον κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό του μέτρου του τόξου

στο οποίο βαίνει, προκύπτει ότι είναι ορθή. Για τον ίδιο λόγο και οι υπόλοιπες γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΔΖ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε τόξα 180° , άρα είναι ορθές. Επομένως το τετράπλευρο ΑΓΔΖ είναι ορθογώνιο. Η ΑΖ είναι πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Ο, R), άρα $AZ = \lambda_6 = R$. Η ΑΓ είναι χορδή που αντιστοιχεί σε τόξο 120° , άρα ισούται με την πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Ο, R). Είναι $AG = \lambda_3 = R\sqrt{3}$ και το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$(ΑΓΔΖ) = AZ \cdot AG = R \cdot R\sqrt{3} = R^2 \sqrt{3}.$$

β) Έστω ένα κανονικό ν-γώνο $A_1A_2 \dots A_n$, ($n > 5$).

Γνωρίζουμε ότι κάθε κανονικό πολύγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο και έστω (Ο, R) ο περιγεγραμμένος κύκλος του πολυγώνου. Δύο διαγώνιοι του πολυγώνου είναι οι A_2A_4 και A_1A_5 οι οποίες είναι χορδές του κύκλου στις οποίες περιέχονται τα τόξα A_1A_2 και A_4A_5 . Το κάθε ένα από αυτά τα τόξα είναι ίσο με $\frac{360^\circ}{n}$, άρα είναι ίσα. Οι γωνίες $A_4A_2A_5$ και $A_2A_5A_1$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα, άρα είναι ίσες, επομένως $A_2A_4 \parallel A_1A_5$ αφού σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Άρα ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.



4^ο Θέμα

22099. Δίνεται κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και σημείο Μ στο εσωτερικό του. Έστω M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 οι προβολές του σημείου Μ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ αντίστοιχα.

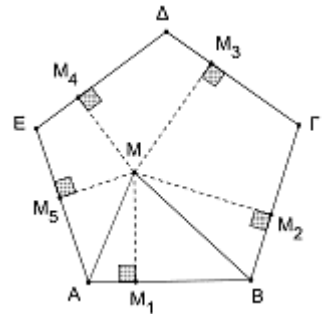
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(ABM) = \frac{1}{2} \lambda_5 \cdot MM_1$, όπου λ_5 είναι η πλευρά του κανονικού πενταγώνου. (Μονάδες 6)

ii. $(ΑΒΓΔΕ) = \frac{1}{2} \lambda_5 \cdot (MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5)$. (Μονάδες 7)

iii. $MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5 = 5\alpha_5$, όπου α_5 είναι το απόστημα του κανονικού πενταγώνου. (Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής διατύπωσε τον ισχυρισμό: «Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός κανονικού ν-γώνου $A_1A_2 \dots A_n$ και $M_1, M_2, \dots, M_n$ είναι οι προβολές του σημείου Μ στις πλευρές $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ αντίστοιχα, τότε $MM_1 + MM_2 + \dots + MM_n = n\alpha_n$, όπου α_n είναι το απόστημα του κανονικού ν-γώνου». Να αποδείξετε ότι ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός. (Μονάδες 5)



Λύση

α) i. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΜ με βάση ΑΒ και αντίστοιχο ύψος το MM_1 είναι

$$(ABM) = \frac{1}{2} AB \cdot MM_1 = \frac{1}{2} \lambda_5 \cdot MM_1$$

Για το εμβαδόν του κανονικού πενταγώνου ΑΒΓΔΕ έχουμε:

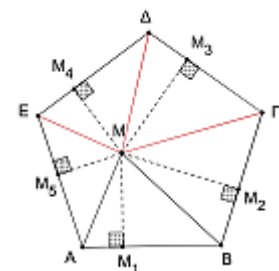
$$(ΑΒΓΔΕ) = (ABM) + (BGM) + (ΓΔΜ) + (ΔΕΜ) + (ΕΑΜ) =$$

$$\frac{1}{2} \lambda_5 \cdot MM_1 + \frac{1}{2} \lambda_5 \cdot MM_2 + \frac{1}{2} \lambda_5 \cdot MM_3 + \frac{1}{2} \lambda_5 \cdot MM_4 + \frac{1}{2} \lambda_5 \cdot MM_5 =$$

$$\frac{1}{2} \lambda_5 (MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5) \quad (1)$$

iii. Το εμβαδόν του κανονικού πενταγώνου ΑΒΓΔΕ είναι

$$(ΑΒΓΔΕ) = \frac{1}{2} \cdot 5\lambda_5 \cdot \alpha_5 \quad (2)$$



Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}\lambda_5 (MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5) = \frac{1}{2} \cdot 5\lambda_5 \cdot \alpha_5 \Leftrightarrow$$

$$MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5 = 5\alpha_5$$

β) Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα $MA_1, MA_2, \dots, MA_n$.

Για το εμβαδόν του κανονικού n -γώνου $A_1A_2 \dots A_n$ έχουμε:

$$(A_1A_2 \dots A_n) = (A_1A_2M) + (A_2A_3M) + \dots + (A_nA_1M) =$$

$$\frac{1}{2}\lambda_n \cdot MM_1 + \frac{1}{2}\lambda_n \cdot MM_2 + \dots + \frac{1}{2}\lambda_n \cdot MM_n =$$

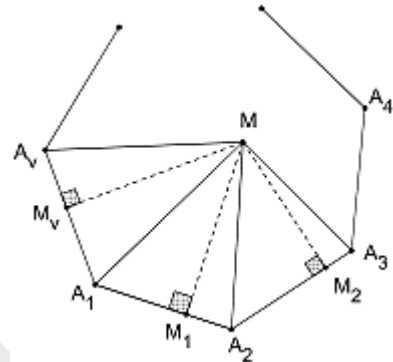
$$\frac{1}{2}\lambda_n (MM_1 + MM_2 + \dots + MM_n) \quad (3)$$

Όμως το εμβαδόν του κανονικού n -γώνου $A_1A_2 \dots A_n$ δίνεται από

$$\text{τον τύπο } (A_1A_2 \dots A_n) = \frac{1}{2} \cdot n\lambda_n \cdot \alpha_n \quad (4)$$

Από τις ισότητες (3) και (4) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}\lambda_n (MM_1 + MM_2 + \dots + MM_n) = \frac{1}{2} \cdot n\lambda_n \cdot \alpha_n \Leftrightarrow MM_1 + MM_2 + \dots + MM_n = n\alpha_n$$



1^ο Θέμα

16097.α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα.

ii. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Στο σχήμα, η προβολή της πλευράς AB στην υποτείνουσα BΓ είναι το τμήμα ΓΔ.

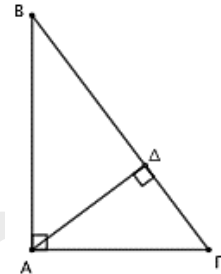
iv. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

v. Ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

(Μονάδες 15)



Λύση

α) i. Σ ii. Λ iii. Λ iv. Λ v. Σ

β) Έστω ένα ορθογώνιο ABΓΔ, με $AB = \alpha$ και $AD = \beta$. Προεκτείνουμε την πλευρά AD κατά τμήμα ΔΕ=α, την AB κατά BI=β και σχηματίζουμε το τετράγωνο ΑΙΗΕ, το οποίο είναι φανερό ότι έχει πλευρά $\alpha + \beta$ και επομένως είναι:

$$(ΑΙΗΕ) = (\alpha + \beta)^2 \quad (1)$$

Προεκτείνοντας τις ΔΓ και ΒΓ σχηματίζονται τα τετράγωνα ΔΓΖΕ, ΒΙΘΓ με πλευρές α, β αντίστοιχα και το ορθογώνιο ΓΘΗΖ που είναι ίσο με το ABΓΔ. Έτσι έχουμε $(ΔΓΖΕ) = \alpha^2$, $(ΒΙΘΓ) = \beta^2$ και $(ΓΘΗΖ) = (ABΓΔ)$ (2)

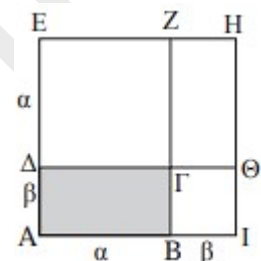
Είναι φανερό όμως ότι

$$(ΑΙΗΕ) = (ABΓΔ) + (ΓΘΗΖ) + (ΒΙΘΓ) + (ΔΓΖΕ),$$

από την οποία με τη βοήθεια των (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$(\alpha + \beta)^2 = 2(ABΓΔ) + \alpha^2 + \beta^2.$$

Από αυτή μετά τις πράξεις καταλήγουμε στη σχέση $(ABΓΔ) = \alpha \cdot \beta$.



21975.α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

ii. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

iv. Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντοτε οξυγώνιο. v. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

β) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) i. Σωστό ii. Λάθος iii. Σωστό iv. Λάθος v. Σωστό

β) Θεώρημα III σελίδα 82.

Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους

2^ο Θέμα

16818. Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρουμε τα τμήματα ΑΓ και ΑΜ, όπου το σημείο Μ είναι το μέσο του ΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο.

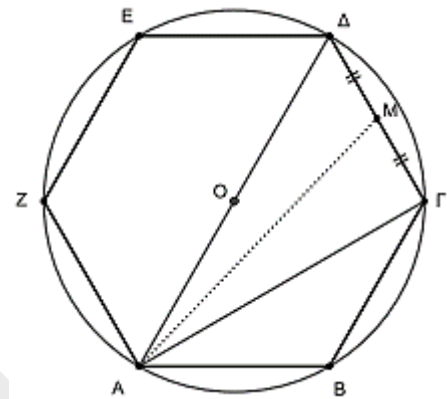
(Μονάδες 7)

β) $ΑΓ = R\sqrt{3}$.

(Μονάδες 9)

γ) $(ΑΜΓ) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Ο, R) και ισχύει $ΑΔ = 2R$. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΔ αφού η γωνία ΑΓΔ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

β) Η κάθετη πλευρά ΓΔ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΓΔ ισούται με $λ_6 = R$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 - ΓΔ^2 = (2R)^2 - R^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \Leftrightarrow ΑΓ = R\sqrt{3}$$

γ) Είναι $(ΑΜΓ) = \frac{1}{2} \cdot ΑΓ \cdot ΓΜ = \frac{1}{2} \cdot R\sqrt{3} \cdot R = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

16820. Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρουμε το τμήμα ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο.

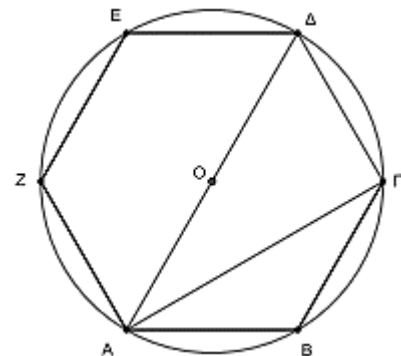
(Μονάδες 7)

β) $ΑΓ = R\sqrt{3}$.

(Μονάδες 9)

γ) $(ΑΒΓΔΕΖ) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Επειδή το ΑΒΓΔΕΖ είναι κανονικό εξάγωνο χωρίζει τον κύκλο σε 6 τόξα ίσα με $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

Επειδή η γωνία ΑΓΔ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο είναι ορθή.

β) Επειδή το τόξο ΑΒΓ είναι $2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ η χορδή ΑΓ αντιστοιχεί σε πλευρά ισόπλευρου τριγώνου.

Άρα $ΑΓ = R\sqrt{3}$.

$$γ) (ΑΒΓΔΕΖ) = \frac{1}{2} \alpha_6 P_6 = \frac{1}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot 6R = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

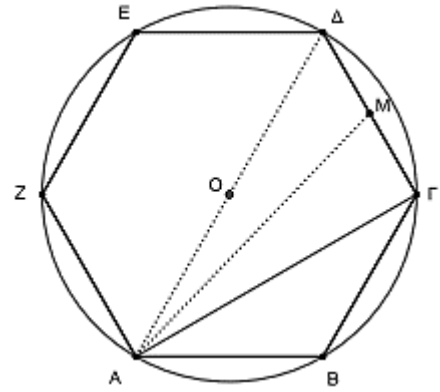
4^ο Θέμα

17600. Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρουμε τα τμήματα ΑΓ, ΑΔ και ΑΜ, όπου το σημείο Μ είναι το μέσο του ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) $(ΑΒΓΔΕΖ) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$. (Μονάδες 7)

β) $(ΑΜΓ) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$. (Μονάδες 6)

γ) $(ΑΜΔΕΖ) = R^2\sqrt{3}$. (Μονάδες 12)



Λύση

α) $(ΑΒΓΔΕΖ) = E_6 = \frac{1}{2} P_6 a_6 = \frac{1}{2} \cdot 6 \lambda_6 \cdot a_6 = 3R \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

β) Η γωνία ΑΓΔ είναι ορθή γιατί είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 - ΓΔ^2 = (2R)^2 - R^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \Leftrightarrow ΑΓ = R\sqrt{3}$$

Το τρίγωνο ΑΓΔ έχει εμβαδό $(ΑΓΔ) = \frac{1}{2}(ΑΓ)(ΓΔ) = \frac{1}{2} R\sqrt{3} \cdot R = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$

Η ΑΜ διάμεσος του τριγώνου ΑΓΔ συνεπώς ξέρουμε ότι χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα,

δηλαδή: $(ΑΜΓ) = (ΑΜΔ) = \frac{1}{2}(ΑΓΔ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

γ) Είναι $(ΑΜΔΕΖ) = (ΑΖΕΔ) + (ΑΜΔ) = \frac{1}{2} E_6 + (ΑΜΓ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}$

Μήκος κύκλου

2^ο Θέμα

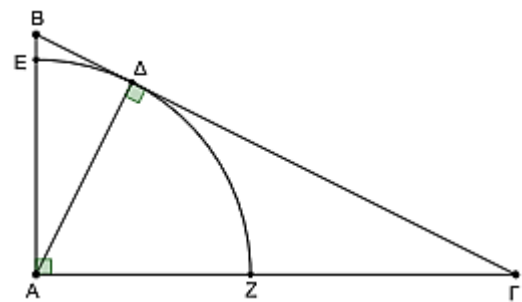
21122. Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος, το Δ είναι η προβολή της κορυφής Α στην υποτείνουσα ΒΓ και είναι ΒΔ = 1 και ΔΓ = 4.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ = 2. (Μονάδες 12)

β) Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΔ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου ΕΔΖ.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

Επομένως είναι $ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ = 1 \cdot 4 = 4 \Leftrightarrow ΑΔ = 2$.

β) Το μήκος του τόξου είναι $\ell = \frac{\pi r \mu}{180} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 90}{180} = \pi$

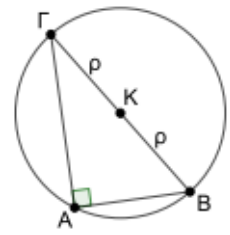
21298. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\angle A$ ορθή γωνία και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου, που έχει κέντρο το K και ακτίνα ρ . Επίσης δίνεται ότι το μήκος του κύκλου ισούται με 10π .

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ του κύκλου έχει μήκος 5. (Μονάδες 08)

β) Αν η χορδή AB έχει μήκος 6 να υπολογίσετε:

i. το μήκος της χορδής $A\Gamma$ του κύκλου, (Μονάδες 10)

ii. το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 07)



Λύση

α) Το μήκος του κύκλου (K, ρ) είναι $L = 2\pi\rho$, άρα $\rho = \frac{L}{2\pi} = \frac{10\pi}{2\pi} = 5$

β) i. Το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει κάθετες πλευρές τις AB και $A\Gamma$ και υποτείνουσα τη $B\Gamma$, που είναι διάμετρος του κύκλου. Για τη διάμετρο $B\Gamma$ ισχύει ότι $B\Gamma = 2\rho = 10$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2 = 100 - 36 = 64 \Leftrightarrow A\Gamma = 8.$$

ii. $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$

22046. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $R = 1$. Θεωρούμε ακτίνα OA την οποία προεκτείνουμε κατά τμήμα $AB = OA = R$ και το εφαπτόμενο τμήμα BA , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $\angle OBA = 30^\circ$.

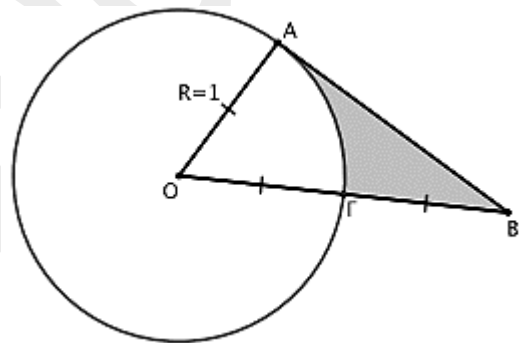
(Μονάδες 05)

β) Να αποδείξετε ότι $AB = \sqrt{3}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου μεικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 10)



Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής, οπότε $BA \perp OA$. Άρα, η γωνία $\angle OAB$ είναι ορθή.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB η κάθετη πλευρά OA ισούται με το μισό της υποτείνουσας OB , οπότε η απέναντι γωνία της $\angle OBA$ ισούται με 30° .

β) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB έχουμε:

$$AB^2 = OB^2 - OA^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 \Leftrightarrow AB = \sqrt{3}$$

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB είναι $\angle AOB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, οπότε $\ell_{AB} = \frac{\pi R \mu}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot R \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$,

Η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου μεικτόγραμμου χωρίου $AB\Gamma$ είναι: $\Pi = AB + B\Gamma + \ell_{AB} = \sqrt{3} + 1 + \frac{\pi}{3}$

22133. Η $ΒΑΓ$ είναι επίκεντρη γωνία σε κύκλο $(Α, 5)$, όπως στο σχήμα. Δίνεται ότι $ΒΓ = 5\sqrt{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι η χορδή $ΒΓ$ είναι ίση με την πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $R = 5$.

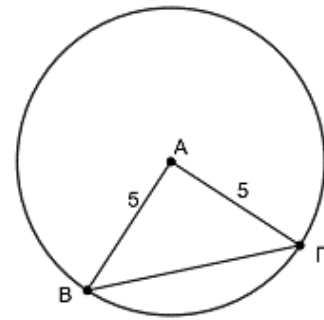
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $ΒΑΓ = 90^\circ$.

(Μονάδες 08)

γ) Αν ℓ είναι το μήκος του κυρτού τόξου $ΒΓ$ να αποδείξετε ότι $\ell = 2,5\pi$.

(Μονάδες 07)



Λύση

α) Το μήκος λ_4 της πλευράς τετραγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R είναι: $\lambda_4 = R\sqrt{2}$, οπότε $ΒΓ = \lambda_4 = R\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

β) Στον κύκλο $(Α, 5)$, η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $ΒΑΓ$ της χορδής $ΒΓ$ είναι ίση με την κεντρική γωνία ω_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο, άρα $ΒΑΓ = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$.

γ) Είναι $\ell = \frac{\pi r \mu}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot 5 \cdot 90^\circ}{180^\circ} = \frac{5\pi}{2}$.

22242. Δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) τέμνονται στα σημεία A, B , ώστε $AKB = 60^\circ$ και $A\Lambda B = 120^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AB = R$.

(Μονάδες 5)

ii. Η κοινή χορδή AB είναι πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Λ, ρ) και ισχύει $R = \rho\sqrt{3}$.

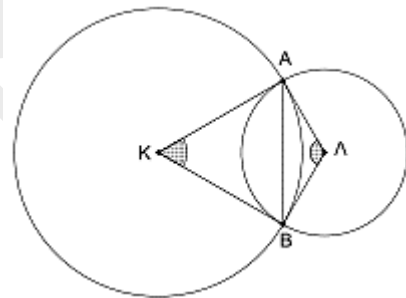
(Μονάδες 7)

β) Αν ℓ_1 είναι το μήκος του τόξου AB του κύκλου (K, R) που

είναι μικρότερο του ημικυκλίου και ℓ_2 είναι το μήκος του τόξου AB του κύκλου (Λ, ρ) που είναι

μικρότερο του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι $\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) i. Αφού $AKB = 60^\circ$ η γωνία αυτή είναι κεντρική γωνία κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (K, R) , επομένως η AB είναι πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (K, R) . Άρα $AB = R$ (1).

ii. Αφού $A\Lambda B = 120^\circ$ η γωνία αυτή είναι κεντρική γωνία ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Λ, ρ) , επομένως η AB είναι πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Λ, ρ) .

Άρα $AB = \rho\sqrt{3}$ (2).

Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι $R = \rho\sqrt{3}$.

β) Αφού $AKB = 60^\circ$ το μήκος ℓ_1 του τόξου AB του κύκλου (K, R) που είναι μικρότερο του ημικυκλίου

είναι $\ell_1 = \frac{\pi R \mu}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot R \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R}{3}$ (3).

Αφού $A\Lambda B = 120^\circ$ το μήκος ℓ_2 του τόξου AB του κύκλου (Λ, ρ) που είναι μικρότερο του ημικυκλίου

$$\text{είναι } \ell_2 = \frac{\pi r}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot \rho \cdot 120^\circ}{180^\circ} = \frac{2\pi\rho}{3} \quad (4).$$

$$\text{Από τις ισότητες (3) και (4) προκύπτει ότι } \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\frac{\pi R}{3}}{\frac{2\pi\rho}{3}} = \frac{R}{2\rho} = \frac{\rho\sqrt{3}}{2\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4^ο Θέμα

16928. Δίνεται κύκλος με μήκος 10.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος P_3 ενός ισοπλεύρου τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον

παραπάνω κύκλο είναι ίση με $\frac{15\sqrt{3}}{\pi}$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο P_6 κανονικού εξαγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο. (Μονάδες 08)

γ) Έστω ένα κανονικό δωδεκάγωνο με περίμετρο P_{12} και ένα κανονικό εικοσιτετράγωνο με περίμετρο P_{24} που είναι εγγεγραμμένα στον παραπάνω κύκλο.

Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{30}{\pi}$, $\frac{15\sqrt{3}}{\pi}$, P_{12} , P_{24} και 10. (Μονάδες 07)

Λύση

α) Αν είναι R η ακτίνα του κύκλου μήκους $L = 10$, τότε: $L = 10 \Leftrightarrow 2\pi R = 10 \Leftrightarrow R = \frac{10}{2\pi} \Leftrightarrow R = \frac{5}{\pi}$.

Η πλευρά λ_3 ενός ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι $\lambda_3 = R\sqrt{3}$.

Συνεπώς η περιμέτρός του είναι $P_3 = 3\lambda_3 = 3R\sqrt{3}$. Επομένως, η περίμετρος του ισοπλεύρου τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο μήκους 10 είναι $P_3 = 3\frac{5}{\pi}\sqrt{3} = \frac{15\sqrt{3}}{\pi}$.

β) Η πλευρά λ_6 του κανονικού εξαγώνου είναι $\lambda_6 = R = \frac{5}{\pi}$.

Η περίμετρος του κανονικού εξαγώνου είναι $P_6 = 6\lambda_6 = \frac{30}{\pi}$.

γ) Θεωρούμε τα κανονικά πολύγωνα που είναι εγγεγραμμένα στον κύκλο με μήκος 10. Γνωρίζουμε ότι η περίμετρος κάθε τέτοιου κανονικού πολυγώνου είναι μικρότερη από το μήκος του κύκλου στον οποίο είναι εγγεγραμμένο, δηλαδή του 10. Έστω $ABΓΔΕΖ$ κανονικό εξαγώνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 10. Θεωρούμε τα μέσα των 6 ίσων τόξων. Έτσι δημιουργούνται 12 ίσα τόξα και το πολύγωνο που κατασκευάζεται είναι κανονικό 12-γωνο.

Έστω AK , KB δύο από τις πλευρές του 12-γώνου.

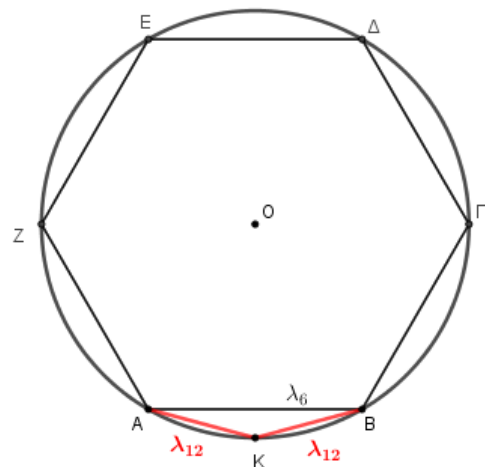
Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο AKB ισχύει ότι

$$AB < AK + KB \Leftrightarrow \lambda_6 < 2\lambda_{12}, \text{ οπότε}$$

$$P_6 = 6\lambda_6 < 6 \cdot 2\lambda_{12} = 12\lambda_{12} = P_{12}.$$

Εργαζόμαστε όμοια κατασκευάζοντας 24-γωνο και προκύπτει $P_{12} = 12\lambda_{12} < 12 \cdot 2\lambda_{24} = 24\lambda_{24} = P_{24}$.

$$\text{Άρα } P_3 < P_{12} < P_{24} < 10 \Leftrightarrow \frac{15\sqrt{3}}{\pi} < \frac{30}{\pi} < P_{12} < P_{24} < 10.$$



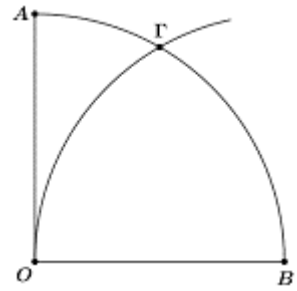
21192. Δίνεται τεταρτοκύκλιο ΟΑΒ κέντρου Ο και ακτίνας R. Αν ο κύκλος κέντρου Β και ακτίνας R τέμνει το τόξο ΑΒ στο σημείο Γ όπως στο σχήμα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο και το μήκος ℓ_{BG}

Γ του τόξου ΒΓ είναι $\ell_{\text{BG}} = \frac{\pi R}{3}$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το μήκος του τόξου ΑΓ είναι $\ell_{\text{AG}} = \frac{\pi R}{6}$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του μεικτόγραμμου τριγώνου ΟΑΓ που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ και τα τόξα ΑΓ και ΟΓ. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Είναι $OB = OG = BG = R$ ως ακτίνες των ίσων κύκλων, επομένως το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο οπότε $\angle BOG = 60^\circ$. Είναι

$$\ell_{\text{BG}} = \frac{\pi R \mu}{180^\circ} = \frac{\pi R \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R}{3}$$

β) Επειδή στο τεταρτοκύκλιο ΟΑΒ η γωνία $\angle AOB = 90^\circ$ έχουμε ότι: $\angle AOG = \angle AOB - \angle BOG = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ και το μήκος του αντίστοιχου τόξου

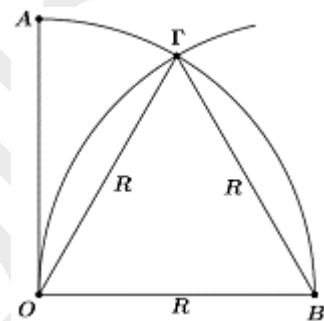
$$\text{ΑΓ είναι } \ell_{\text{AG}} = \frac{\pi R \mu}{180^\circ} = \frac{\pi R \cdot 30^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R}{6}.$$

γ) Επειδή το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο, έχει ίσες γωνίες οπότε τα τόξα ΟΓ και ΒΓ είναι ίσα, ως αντίστοιχα τόξα των ίσων γωνιών ΟΒΓ και ΒΟΓ ίσων κύκλων, συνεπώς από το (α) ερώτημα έχουμε:

$$\ell_{\text{OG}} = \ell_{\text{BG}} = \frac{\pi R}{3}.$$

Η περίμετρος T_{OAG} του μεικτόγραμμου τριγώνου ΟΑΓ είναι:

$$T_{\text{OAG}} = OA + \ell_{\text{OG}} + \ell_{\text{AG}} = R + \frac{\pi R}{3} + \frac{\pi R}{6} = R \left(1 + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \right) = R \left(1 + \frac{\pi}{3} \right)$$



21193. Στο διπλανό σχήμα τρεις κυκλικοί τροχοί με ίσες ακτίνες, έχουν τα κέντρα τους στις κορυφές τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές α , β και γ . Ένας τεντωμένος μίαντας μήκους L συνδέει τους τρεις ίσους τροχούς όπως στο σχήμα και εφάπτεται σε αυτούς στα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν, Ρ, Σ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΛΜΓ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 4)

ii. Η κυρτή γωνία ΚΑΛ και η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ είναι παραπληρωματικές.

(Μονάδες 4)

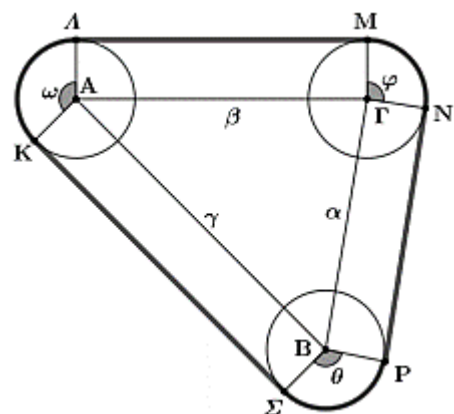
β) Αν $\angle KAL = \hat{\omega}$, $\angle SBP = \hat{\theta}$, $\angle MGN = \hat{\phi}$, να αποδείξετε ότι

$$\hat{\omega} + \hat{\theta} + \hat{\phi} = 360^\circ.$$

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το μήκος του μίαντα L είναι $L = 2(\tau + \pi R)$ όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) i. Επειδή ο μίαντας εφάπτεται στους κυκλικούς τροχούς, οι ακτίνες ΑΛ και ΓΜ είναι ίσες και παράλληλες αφού είναι κάθετες στο ίδιο εφαπτόμενο τμήμα ΛΜ, συνεπώς το τετράπλευρο ΑΛΜΓ είναι ορθογώνιο.

ii. Για τις γωνίες με κορυφή το κέντρο Α του ενός τροχού έχουμε:

$$\angle KAL + 90^\circ + A = 360^\circ \Leftrightarrow \angle KAL + A = 180^\circ$$

β) Με βάση το α)ii. ερώτημα έχουμε: $\hat{\omega} + A = 180^\circ$.

Ανάλογα για τις γωνίες Β και Γ βρίσκουμε $\hat{\theta} + B = 180^\circ$ και $\hat{\phi} + \Gamma = 180^\circ$.

Προσθέτοντας τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι:

$$\hat{\omega} + A + \hat{\theta} + B + \hat{\phi} + \Gamma = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} + \hat{\theta} + \hat{\phi} + 180^\circ = 540^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} + \hat{\theta} + \hat{\phi} = 360^\circ.$$

γ) Με ανάλογο τρόπο, όπως για το τετράπλευρο ΑΛΜΓ του α) i. ερωτήματος, αποδεικνύεται ότι και τα τετράπλευρα ΓΝΡΒ και ΒΣΚΑ είναι επίσης ορθογώνια, οπότε θα έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες, δηλαδή $NP = \alpha$, $LM = \beta$ και $K\Sigma = \gamma$.

Είναι $L = \ell_{KA} + LM + \ell_{MN} + NP + \ell_{PS} + K\Sigma = \ell_{KA} + \ell_{MN} + \ell_{PS} + (\alpha + \beta + \gamma) \Leftrightarrow$

$$L = \frac{\pi R \hat{\omega}}{180^\circ} + \frac{\pi R \hat{\phi}}{180^\circ} + \frac{\pi R \hat{\theta}}{180^\circ} + 2\tau = \frac{\pi R (\hat{\omega} + \hat{\theta} + \hat{\phi})}{180^\circ} + 2\tau = \frac{\pi R \cdot 360^\circ}{180^\circ} + 2\tau = 2\pi R + 2\tau = 2(\pi R + \tau).$$

Εμβαδόν κυκλικού δίσκου - τομέα

2^ο Θέμα

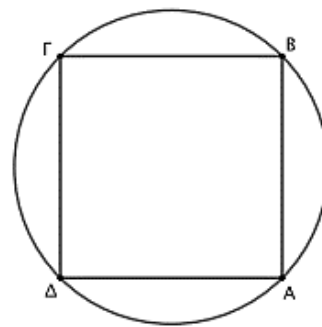
18097. Τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν το εμβαδόν του τετραγώνου είναι ίσο με 4, τότε:

α) Να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του τετραγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι ίσο με $2\pi - 4$.

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Είναι $E_4 = 4 \Leftrightarrow \lambda_4^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda_4 = 2 \Leftrightarrow R\sqrt{2} = 2 \Leftrightarrow R = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$.

β) Το εμβαδόν του κύκλου είναι: $E_k = \pi R^2 = 2\pi$

Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του τετραγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι: $E = E_k - E_\tau = 2\pi - 4$

18098. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $a = 4$.

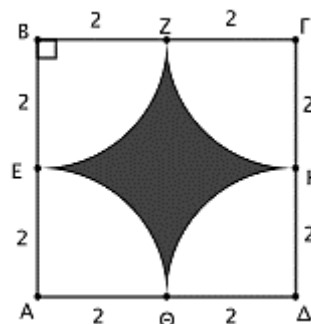
Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα $\rho = 2$ σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι $E = 4(4 - \pi)$.

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Τα τόξα ΘΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ είναι τόξα ίσων κύκλων ακτίνας $\rho = 2$ και αντιστοιχούν σε ίσες επίκεντρες γωνίες 90° . Επομένως, οι κυκλικοί τομείς Α.ΘΕ, Β.ΕΖ, Γ.ΖΗ, Δ.ΗΘ έχουν καθένας εμβαδόν ίσο με

$$(A.\Theta E) = (B.EZ) = (G.ZH) = (D.H\Theta) = \frac{\pi \rho^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = \pi$$

β) Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E_\tau = 4^2 = 16$, οπότε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι: $E = E_\tau - 4(A.\Theta E) = 16 - 4\pi = 4(4 - \pi)$.

18099. Κανονικό εξαγώνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $R = 2\sqrt{3}$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε την πλευρά και το απόστημα του κανονικού εξαγώνου.

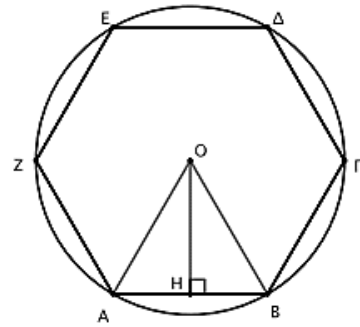
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του κανονικού εξαγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του ισούται με $E = 6(2\pi - 3\sqrt{3})$.

(Μονάδες 7)



Λύση

α) Είναι $\lambda_6 = R = 2\sqrt{3}$ και $\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3$.

β) $E_6 = \frac{1}{2} P_6 \alpha_6 = \frac{1}{2} 6\lambda_6 \alpha_6 = 3 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 18\sqrt{3}$

γ) Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E_\kappa = \pi R^2 = \pi (2\sqrt{3})^2 = 12\pi$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του κανονικού εξαγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι:
 $E = E_\kappa - E_6 = 12\pi - 18\sqrt{3} = 6(2\pi - 3\sqrt{3})$.

20363. Δίνεται ο κύκλος (O, R) και τα σημεία του Α, Β, Γ όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα, ώστε $AB = R$ και $B\Gamma = R\sqrt{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $AB = 60^\circ$ και $B\Gamma = 90^\circ$.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R, τα μήκη των τόξων ΑΒ, ΒΓ.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R, το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $(O, A\Gamma)$ που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία

ΑΟΓ.

(Μονάδες 10)

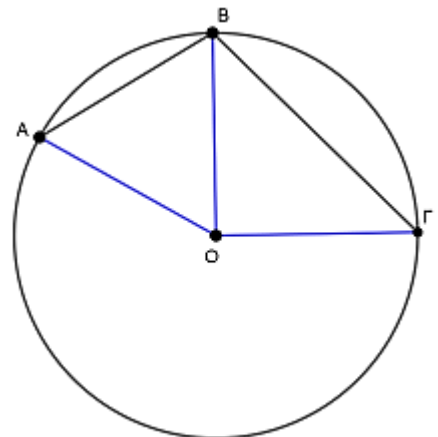
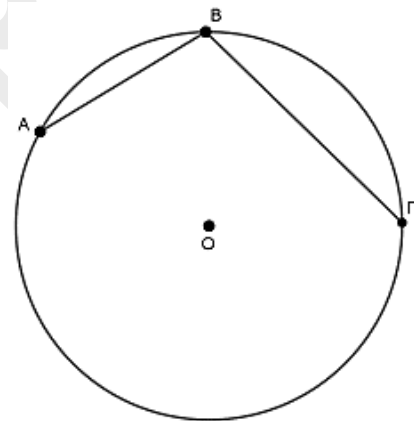
Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι η πλευρά κανονικού 6-γώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου. Επομένως έχουμε: $AB = R$ και το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο (κάθε πλευρά του είναι ίση με R), οπότε η γωνία ΑΟΒ ισούται με 60° όσο και το τόξο ΑΒ. Δηλαδή $AB = 60^\circ$.

Επίσης γνωρίζουμε ότι η πλευρά 4-γώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι ίση με $R\sqrt{2}$, οπότε $B\Gamma = R\sqrt{2}$. Όμως $\lambda_4 = R\sqrt{2}$, άρα $B\Gamma = \lambda_4$, οπότε το τόξο ΒΓ είναι $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$.

β) Το μήκος του τόξου ΑΒ είναι: $\ell_{AB} = \frac{\pi R \mu}{180^\circ} = \frac{\pi R \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R}{3}$.

Το μήκος του τόξου ΒΓ είναι: $\ell_{B\Gamma} = \frac{\pi R \mu}{180^\circ} = \frac{\pi R \cdot 90^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R}{2}$.



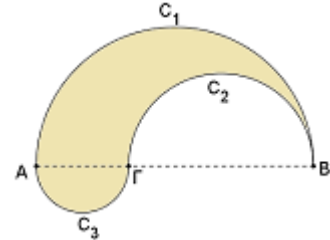
γ) Είναι $AB\Gamma = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$, οπότε και $AO\Gamma = 150^\circ$.

$$(O.A\Gamma) = \frac{\pi R^2 \cdot 150^\circ}{360^\circ} = \frac{5\pi R^2}{12}.$$

20672. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $AB = 6$, και σημείο του Γ , ώστε $B\Gamma = 4$. Στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η AB σχεδιάζουμε τα ημικύκλια C_1 και C_2 με διαμέτρους AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα και στο άλλο ημιεπίπεδο σχεδιάζουμε ημικύκλιο C_3 με διάμετρο $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των ημικυκλίων C_1 , C_2 και C_3 είναι $\frac{9\pi}{2}$, 2π και $\frac{\pi}{2}$ αντίστοιχα. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου. (Μονάδες 10)



Λύση

α) Η ακτίνα του ημικυκλίου C_1 είναι $\rho_1 = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$ και το εμβαδόν του ισούται με $E_1 = \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2}$.

Η ακτίνα του ημικυκλίου C_2 είναι $\rho_2 = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{4}{2} = 2$ και το εμβαδόν του ισούται με $E_2 = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 2\pi$.

Η ακτίνα του ημικυκλίου C_3 είναι $\rho_3 = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{2}{2} = 1$ και το εμβαδόν του ισούται με $E_3 = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$.

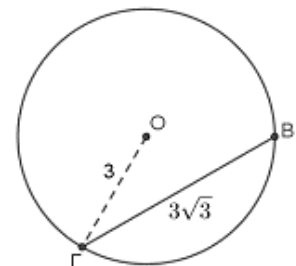
β) Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου ισούται με $E_1 - E_2 + E_3 = \frac{9\pi}{2} - 2\pi + \frac{\pi}{2} = 3\pi$

21069. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 3$. Θεωρούμε την χορδή $B\Gamma = 3\sqrt{3}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του κυρτογώνιου τόξου $B\Gamma$ είναι 120° . (Μονάδες 08)

β) Να υπολογισθεί το μήκος του κυρτογώνιου τόξου $B\Gamma$. (Μονάδες 08)

γ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $O B\Gamma$. (Μονάδες 09)



Λύση

α) Το μήκος της χορδής $B\Gamma$ είναι $B\Gamma = 3\sqrt{3} = \rho\sqrt{3}$ επομένως πρόκειται για πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο. Άρα, το μέτρο του κυρτογώνιου τόξου $B\Gamma$ είναι 120° .

$$\beta) \ell_{B\Gamma} = \frac{\pi \rho \mu}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot 3 \cdot 120^\circ}{180^\circ} = 2\pi$$

$$\gamma) (O.B\Gamma) = \frac{\pi \rho^2 \mu}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = 3\pi$$

21075. Δίνεται κύκλος με κέντρο O , ακτίνα ρ και εμβαδόν ίσο με 16π .

α) Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του κύκλου.

(Μονάδες 07)

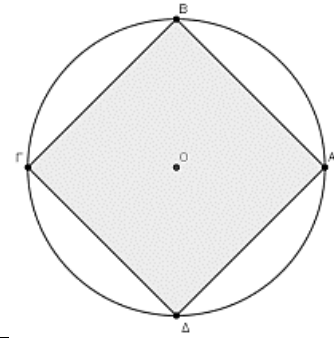
β) Αν η ακτίνα ρ του κύκλου είναι 4 να υπολογίσετε:

i. Την πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου στον κύκλο.

(Μονάδες 09)

ii. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο τετράγωνο και στον κύκλο.

(Μονάδες 09)



Λύση

α) Είναι $E = \pi\rho^2 \Leftrightarrow 16\pi = \pi\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2 = 16 \Leftrightarrow \rho = 4$.

β) i. Η πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με ακτίνα ρ ισούται με $\rho\sqrt{2}$. Επομένως για $\rho = 4$ έχουμε ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι $AB = 4\sqrt{2}$.

ii. Το εμβαδόν του κύκλου είναι 16π , ενώ το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E = (4\sqrt{2})^2 = 32$.

Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το τετράγωνο είναι ίσο με $16\pi - 32$.

21121. Στο διπλανό σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει υποτίνουσα $B\Gamma = 13$ και αντίστοιχο ύψος $A\Delta = 6$. Με κέντρο το A και ακτίνα $A\Delta$ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ του τριγώνου, στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

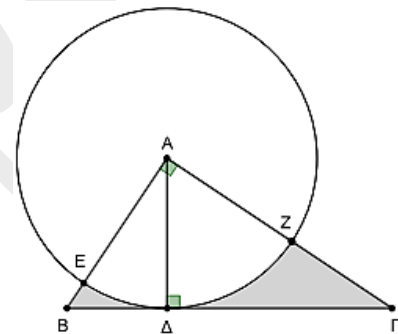
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά:

i. του κυκλικού τομέα $AE\Delta Z$,

(Μονάδες 9)

ii. του σκιασμένου χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ και εξωτερικά του κύκλου, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



(Μονάδες 8)

Λύση

α) $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 = 39$

β) i) $(AE\Delta Z) = \frac{\pi R^2 \mu}{360} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 90^\circ}{360} = 9\pi$

ii) Το εμβαδόν του χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ και εξωτερικά του κύκλου είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών του τριγώνου $AB\Gamma$ και του κυκλικού τομέα $AE\Delta Z$, οπότε

$$E = (AB\Gamma) - (AE\Delta Z) = 39 - 9\pi$$

21123. Στο τρίγωνο OAB του σχήματος είναι $\angle AOB = 90^\circ$, $OA = OB = 2$ και το OH είναι το ύψος του από την κορυφή O . Με κέντρο το O και ακτίνα

$R = OA$ και $\rho = OH$ γράφουμε δύο ομόκεντρους κύκλους. Ο κύκλος (O, ρ) τέμνει τις OA και OB στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

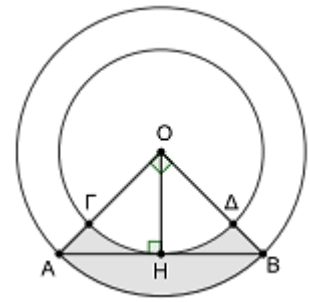
α) Να αποδείξετε ότι $OH = \sqrt{2}$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των κυκλικών τομέων OAB και $O\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους που περικλείεται από τα τόξα AB και $\Gamma\Delta$ και τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$.

(Μονάδες 5)



Λύση

α) Επειδή $\angle AOB = 90^\circ$, το OH είναι το απόστημα τετραγώνου πλευράς AB , εγγεγραμμένου στον κύκλο (O, R) , οπότε $OH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. Όμως $R = OA = 2$, άρα $OH = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

$$\beta) (\text{OAB}) = \frac{\pi \rho^2 \mu}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \pi, (\text{O}\Gamma\Delta) = \frac{\pi \rho^2 \mu}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{2}$$

γ) Το εμβαδόν E του σκιασμένου μέρους, είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των κυκλικών τομέων OAB και $O\Gamma\Delta$, δηλαδή $E = (\text{OAB}) - (\text{O}\Gamma\Delta) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

21300. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$, το οποίο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (K, ρ) , όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AK\Delta$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 08)

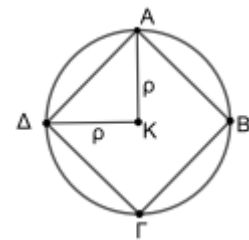
β) Αν επιπλέον το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $AK\Delta$ είναι 4:

i. Να αποδείξετε ότι $\rho = \sqrt{8}$.

(Μονάδες 07)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου (K, ρ) .

(Μονάδες 10)



Λύση

α) Η γωνία $AK\Delta$ είναι η κεντρική γωνία ω_4 του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, άρα $\angle AK\Delta = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$. Επομένως το τρίγωνο $AK\Delta$ είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την $\angle AK\Delta$ και υποτείνουσα την $A\Delta$.

$$\beta) (\text{AK}\Delta) = \frac{1}{2} K\Delta \cdot KA = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \rho = \frac{1}{2} \rho^2 \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{2} \rho^2 \Leftrightarrow \rho^2 = 8 \Leftrightarrow \rho = 2\sqrt{2}$$

ii. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E = \pi \rho^2 = \pi (\sqrt{8})^2 = 8\pi$

21301. Σε κύκλο (K, ρ) εμβαδού $E = 4\pi$ είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$, όπως στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε:

α) την ακτίνα ρ του κύκλου (K, ρ) .

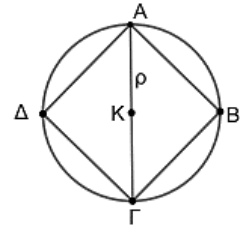
(Μονάδες 07)

β) το μήκος της διαμέτρου $A\Gamma$ του κύκλου (K, ρ) και της πλευράς AB του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 10)

γ) το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 08)



Λύση

α) Για το εμβαδόν E του κύκλου (K, ρ) ισχύει ότι $E = \pi\rho^2 \Leftrightarrow 4\pi = \pi\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2 = 4 \Leftrightarrow \rho = 2$

β) Είναι $AG = 2\rho = 4$ και από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$AB^2 + B\Gamma^2 = AG^2 \stackrel{AB=B\Gamma}{\Leftrightarrow} 2AB^2 = 4^2 \Leftrightarrow 2AB^2 = 16 \Leftrightarrow AB^2 = 8 \Leftrightarrow AB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

γ) $(AB\Gamma\Delta) = AB^2 = 8$

22310. Το παρακάτω σχήμα (Σ) αποτελείται από το ημικύκλιο διαμέτρου AB και το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Το ημικύκλιο και το ορθογώνιο έχουν ίσα εμβαδά. Δίνεται $AB = 8\text{cm}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι $E = 8\pi\text{cm}^2$.

(Μονάδες 8)

ii. το μήκος του ημικυκλίου είναι $L = 4\pi\text{cm}$.

(Μονάδες 8)

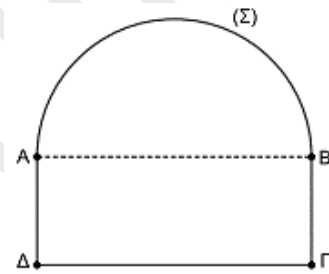
β) Να βρείτε:

i. το μήκος της πλευράς $A\Delta$ του ορθογωνίου,

(Μονάδες 5)

ii. την περίμετρο του σχήματος (Σ) .

(Μονάδες 4)



Λύση

α) i) Επειδή η διάμετρος του ημικυκλίου είναι $AB = 8\text{cm}$, η ακτίνα του είναι $\rho = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4\text{cm}$ και

το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι $E = \frac{1}{2}\pi\rho^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 4^2 = 8\pi\text{cm}^2$.

ii) Το μήκος του ημικυκλίου είναι $L = \frac{1}{2} \cdot 2\pi\rho = \pi \cdot 4 = 4\pi\text{cm}$.

β) i) Το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ είναι $(AB\Gamma\Delta) = AB \cdot A\Delta = 8 \cdot A\Delta\text{cm}^2$.

Επειδή το ημικύκλιο και το ορθογώνιο έχουν ίσα εμβαδά, έχουμε

$$(AB\Gamma\Delta) = E \Leftrightarrow 8 \cdot A\Delta = 8\pi \Leftrightarrow A\Delta = \pi\text{cm}.$$

ii) Το μήκος του ημικυκλίου από το ερώτημα (α ii) είναι $L = 4\pi\text{cm}$.

Στο (β i) βρήκαμε $A\Delta = \pi\text{cm}$ και επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, είναι $B\Gamma = A\Delta = \pi\text{cm}$ και $\Delta\Gamma = AB = 8\text{cm}$.

Η περίμετρος P του σχήματος (Σ) είναι $P = L + A\Delta + \Delta\Gamma + B\Gamma \Leftrightarrow P = 4\pi + \pi + 8 + \pi = 6\pi + 8\text{cm}$.

4^ο Θέμα

17599. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α του παρακάτω σχήματος, γράφουμε τεταρτοκύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου με κέντρο Α και ακτίνα α.

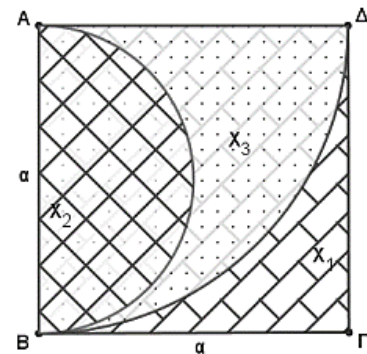
α) Αν X_1 είναι το χωρίο του τετραγώνου που βρίσκεται εξωτερικά του τεταρτοκυκλίου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν

του ισούται με: $(X_1) = \frac{\alpha^2}{4} \cdot (4 - \pi)$. (Μονάδες 5)

β) Με διάμετρο ΑΒ κατασκευάζουμε ημικύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου. Αν X_2 είναι το χωρίο του ημικυκλίου και X_3 το χωρίο του τεταρτοκυκλίου που βρίσκεται εξωτερικά του ημικυκλίου, να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο χωρίων X_2 και X_3 . (Μονάδες 11)

γ) Ποιο από τα χωρία X_1 κι X_2 έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Το εμβαδόν του χωρίου X_1 θα υπολογιστεί, αν από το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα ΑΒ. Έχουμε

$$(X_1) = (ΑΒΓΔ) - (Α.ΒΔ) = \alpha^2 - \frac{\pi\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2}{4} \cdot (4 - \pi)$$

β) Το X_2 είναι ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ, οπότε: $(X_2) = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\pi\alpha^2}{8}$.

Το εμβαδόν X_3 θα υπολογισθεί αν από το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου αφαιρέσουμε το X_2 και θα έχουμε:

$$(X_3) = (ΑΒΔ) - (X_2) = \frac{\pi\alpha^2}{4} - \frac{\pi\alpha^2}{8} = \frac{\pi\alpha^2}{8}$$

$$\gamma) (X_2) - (X_1) = \frac{\pi\alpha^2}{8} - \frac{\alpha^2(4 - \pi)}{4} = \frac{\pi\alpha^2 - 2\alpha^2(4 - \pi)}{8} = \frac{\pi\alpha^2 - 8\alpha^2 + 2\pi\alpha^2}{8} = \frac{\alpha^2}{8}(3\pi - 8) > 0 \Leftrightarrow (X_2) > (X_1)$$

18043. Σε κύκλο (Ο, ρ) θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Η πλευρά ΑΔ είναι ίση με την πλευρά λ_6 κανονικού εξάγωνου εγγεγραμμένου στον κύκλο.

α) Αν η πλευρά ΑΒ ισούται με την πλευρά λ_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο και το τόξο ΒΓ = 120° :

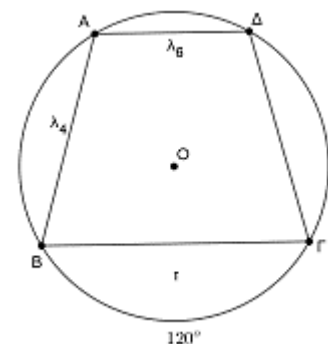
i. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΓΔ ως συνάρτηση της ακτίνας. (Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος που περικλείεται από την κυρτή γωνία ΒΟΓ.

(Μονάδες 10)

β) Κρατάμε τα σημεία Α και Δ σταθερά και μετακινούμε την χορδή ΒΓ παράλληλα προς την ΑΔ ώστε να διέρχεται από το Ο. Ποιο θα είναι το μήκος του τόξου ΑΒ;

(Μονάδες 07)



Λύση

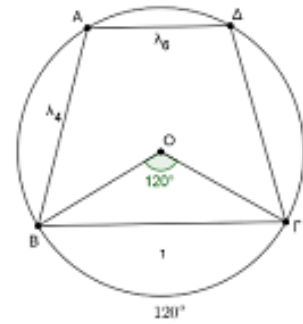
α) i. $AB = \lambda_4$, επομένως $AB = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ γιατί αντιστοιχεί σε τόξο τετραγώνου.

Είναι $ΑΔ = λ_6$, επομένως $ΑΔ = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ γιατί αντιστοιχεί σε τόξο

κανονικού εξάγωνου.

Επομένως $ΔΓ = 360^\circ - ΑΒ - ΒΓ - ΑΔ = 360^\circ - 90^\circ - 120^\circ - 60^\circ = 90^\circ$.

Επειδή το τόξο $ΔΓ$ είναι 90° , είναι $ΔΓ = λ_4 = ρ\sqrt{2}$.



ii. Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος (τ) θα βρεθεί αν από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $ΟΒΓ$ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου ($ΟΒΓ$).

Είναι $(ΟΒΓ) = \frac{\pi \rho^2 120^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \rho^2}{3}$ και

$$(ΟΒΓ) = \frac{1}{2} ΟΒ \cdot ΟΓ \cdot \eta\mu 120^\circ = \frac{1}{2} \rho \cdot \rho \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\rho^2 \sqrt{3}}{4}, \text{ άρα } (\tau) = \frac{\pi \rho^2}{3} - \frac{\rho^2 \sqrt{3}}{4}$$

β) Αφού η $ΒΓ$ διέρχεται από το $Ο$, τότε θα είναι διάμετρος παράλληλη στην $ΑΔ$.

Τα τόξα $ΑΒ$, $ΓΔ$ είναι ίσα γιατί περιέχονται μεταξύ παραλλήλων χορδών.

Είναι $ΒΑ + ΑΔ + ΔΓ = 180^\circ \Leftrightarrow 2ΒΑ + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2ΒΑ = 120^\circ \Leftrightarrow ΒΑ = 60^\circ$

Άρα το μήκος του τόξου $ΑΒ$ είναι: $\ell_{ΑΒ} = \frac{\pi \rho \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi \rho}{3}$.

18043. Σε κύκλο $(Ο, \rho)$ θεωρούμε τα σημεία $Α, Β, Γ$ και $Δ$. Η πλευρά $ΑΔ$ είναι ίση με την πλευρά $λ_6$ κανονικού εξάγωνου εγγεγραμμένου στον κύκλο.

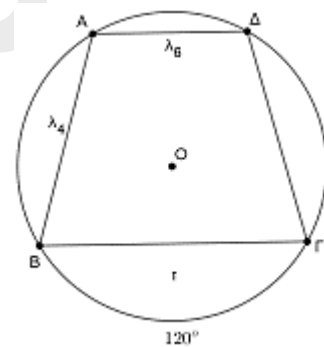
α) Αν η πλευρά $ΑΒ$ ισούται με την πλευρά $λ_4$ τετραγώνου

εγγεγραμμένου στον κύκλο και το τόξο $ΒΓ = 120^\circ$:

i. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $ΓΔ$ ως συνάρτηση της ακτίνας. (Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος που περικλείεται από την κυρτή γωνία $ΒΟΓ$. (Μονάδες 10)

β) Κρατάμε τα σημεία $Α$ και $Δ$ σταθερά και μετακινούμε την χορδή $ΒΓ$ παράλληλα προς την $ΑΔ$ ώστε να διέρχεται από το $Ο$. Ποιο θα είναι το μήκος του τόξου $ΑΒ$;



(Μονάδες 07)

Λύση

α) i. Είναι $ΑΒ = λ_4$, επομένως $ΑΒ = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ γιατί αντιστοιχεί σε τόξο

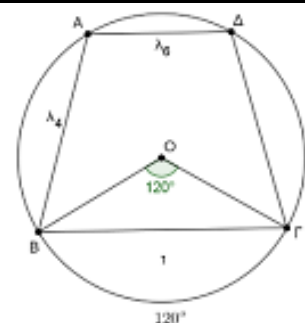
τετραγώνου.

Είναι $ΑΔ = λ_6$, επομένως $ΑΔ = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ γιατί αντιστοιχεί σε τόξο

κανονικού εξάγωνου.

Επομένως $ΔΓ = 360^\circ - ΑΒ - ΑΔ = 360^\circ - 90^\circ - 120^\circ - 60^\circ = 90^\circ$

Επειδή το τόξο $ΔΓ$ είναι 90° , η χορδή $ΔΓ = λ_4$, δηλαδή ισούται με $\rho\sqrt{2}$.



ii. Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος (τ) θα βρεθεί αν από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $ΟΒΓ$ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου ($ΟΒΓ$).

Είναι $(ΟΒΓ) = \frac{\pi \rho^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \rho^2}{3}$ και $(ΟΒΓ) = \frac{1}{2} ΟΒ \cdot ΟΓ \cdot \eta\mu 120^\circ = \frac{1}{2} \rho \cdot \rho \cdot \eta\mu 60^\circ = \frac{1}{2} \rho^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\rho^2 \sqrt{3}}{4}$,

$$\text{οπότε } (\tau) = \frac{\pi \rho^2}{3} - \frac{\rho^2 \sqrt{3}}{4}$$

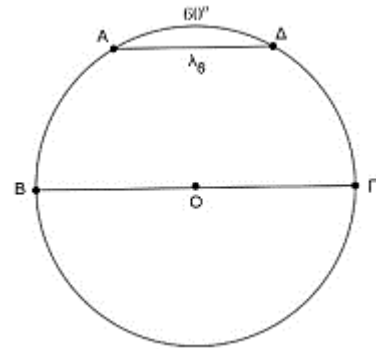
β) Αφού η ΒΓ διέρχεται από το Ο, τότε θα είναι διάμετρος παράλληλη στην ΑΔ.

Τα τόξα ΑΒ, ΓΔ είναι ίσα γιατί περιέχονται μεταξύ παραλλήλων χορδών.

$$\text{Είναι } \text{BA} + \text{AD} + \text{DG} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\text{BA} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$2\text{BA} = 120^\circ \Leftrightarrow \text{BA} = 60^\circ \text{ άρα το μήκος του τόξου ΑΒ είναι:}$$

$$\ell_{\text{AB}} = \frac{\text{πρμ}}{180^\circ} = \frac{\text{πρ} \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\text{πρ}}{3}.$$



21197. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 2α και Λ το μέσο της πλευράς του ΓΔ. Έστω ότι το ημικύκλιο, που σχεδιάζεται στο εσωτερικό του τετραγώνου με διάμετρο την πλευρά του ΑΒ, έχει εμβαδόν 10. Τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

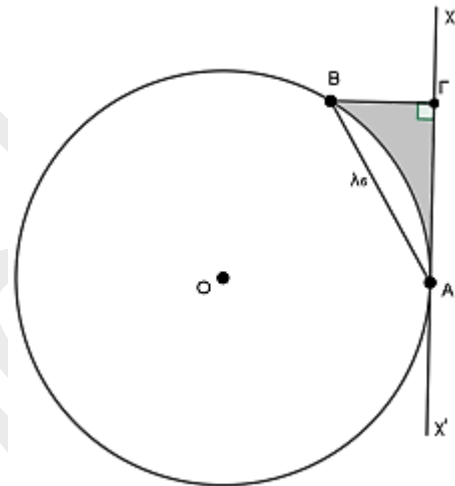
i. Το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{80}{\pi}$.
(Μονάδες 6)

ii. $\text{ΑΛ}^2 = \frac{100}{\pi}$.
(Μονάδες 6)

β) Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΛ κατασκευάζουμε τεταρτοκύκλιο ΑΜΝ, και έστω Μ, Ν είναι τα σημεία τομής του με τις προεκτάσεις των πλευρών του τετραγώνου ΑΒ, ΑΔ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου ΑΒΜΝΑ. (Μονάδες 8)

ii. Τον λόγο του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου ΑΜΝ προς το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 5)



Λύση

α) i. Το ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ = 2α έχει ακτίνα α και εμβαδόν $E_{\text{AB}} = \frac{\pi\alpha^2}{2}$. Αφού το εμβαδό του ημικυκλίου είναι 10 τότε: $10 = \frac{\pi\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 20 = \pi\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{20}{\pi}$.

Το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ με πλευρά 2α είναι: $(\text{ΑΒΓΔ}) = (2\alpha)^2 = 4\alpha^2 = 4 \cdot \frac{20}{\pi} = \frac{80}{\pi}$.

ii. Το σημείο Λ είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ του τετραγώνου, επομένως $\Delta\text{L} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΛ εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\text{ΑΛ}^2 = \text{ΑΔ}^2 + \Delta\text{L}^2 = (2\alpha)^2 + \alpha^2 = 4\alpha^2 + \alpha^2 = 5\alpha^2 = 5 \cdot \frac{20}{\pi} = \frac{100}{\pi}$$

β) i. Το ζητούμενο εμβαδό Ε του σκιασμένου σχήματος, υπολογίζεται αν από το εμβαδό του

τεταρτοκυκλίου Α.ΜΝ αφαιρέσουμε το εμβαδό $E_{\text{AB}} = \frac{\pi \cdot \frac{20}{\pi}}{2} = 10$ του ημικυκλίου με διάμετρο την ΑΒ.

Είναι $(\text{Α.ΜΝ}) = \frac{\pi \cdot \text{ΑΔ}^2}{4} = \frac{\pi \cdot \frac{100}{\pi}}{4} = 25$ επομένως το ζητούμενο εμβαδό Ε του σκιασμένου σχήματος είναι:

$$E = (A.MN) - E_{AB} = 25 - 10 = 15.$$

$$\text{ii. Είναι } \frac{(A.MN)}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{25}{\frac{80}{\pi}} = \frac{25\pi}{80} = \frac{5\pi}{16}$$

20361. Δίνεται κύκλος (O, R) και η χορδή του AB ίση με την πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο.

Στο σημείο A φέρνουμε την εφαπτομένη $x'x$ του κύκλου και από το B την κάθετη στην $x'x$ που την τέμνει στο Γ .

Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) A\Gamma = \frac{R\sqrt{3}}{2}. \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

$$\beta) (OAGB) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{8}. \quad (\text{Μονάδες } 7)$$

$\gamma)$ το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, που φαίνεται στο

$$\text{διπλανό σχήμα είναι: } E = \frac{(9\sqrt{3} - 4\pi)R^2}{24}.$$

(Μονάδες 10)

Λύση

$\alpha)$ Από τα δεδομένα, η AB είναι πλευρά κανονικού 6-γώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο οπότε το τόξο AB θα ισούται με $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Άρα και η επίκεντρη γωνία AOB θα ισούται με 60°

επομένως το τρίγωνο OAB θα είναι ισόπλευρο πλευράς R .

Δηλαδή $AB = R = OA = OB$ και επιπλέον θα έχει όλες του τις γωνίες ίσες με 60° .

Η OA ως ακτίνα που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής, είναι κάθετη στην εφαπτομένη $x'x$, επομένως η γωνία OAG είναι ορθή.

Άρα η γωνία A_1 θα ισούται με 30° , οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο

$$AB\Gamma \text{ είναι } B\Gamma = \frac{AB}{2} = \frac{R}{2}.$$

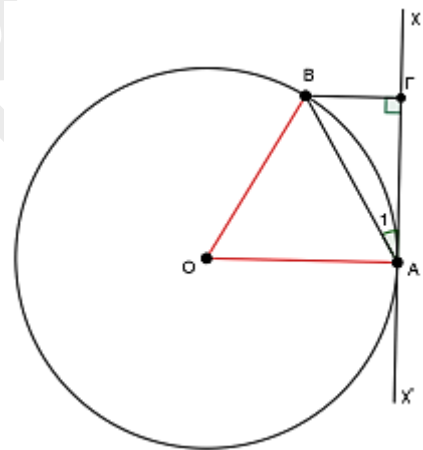
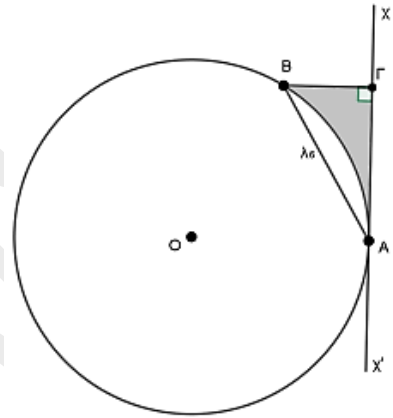
Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$A\Gamma^2 = AB^2 - B\Gamma^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \Leftrightarrow A\Gamma = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

$\beta)$ Λόγω του ερωτήματος (α) , οι $OA, B\Gamma$ ως κάθετες στην $x'x$, θα είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Άρα το τετράπλευρο $OAGB$ είναι τραπέζιο με βάσεις $OA, B\Gamma$ και ύψος $A\Gamma$. Οπότε

$$(OAGB) = \frac{(OA + B\Gamma)A\Gamma}{2} = \frac{\left(R + \frac{R}{2}\right) \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{3R}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{8}$$



γ) Το ζητούμενο εμβαδό θα βρεθεί αν από το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ, αφαιρέσουμε το εμβαδό του κυκλικού τμήματος τ_1 . Δηλαδή $E = (AB\Gamma) - (\tau_1)(1)$.

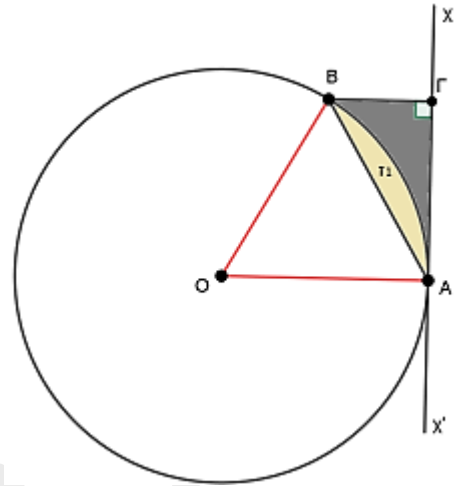
$$\text{Είναι } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} BG \cdot AG = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{8} \text{ και}$$

$$(\tau_1) = (OAB) - (OAB) = \frac{\pi R^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow$$

$$(\tau_1) = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi R^2 - 3R^2\sqrt{3}}{12}$$

Οπότε η (1) γίνεται:

$$E = \frac{R^2\sqrt{3}}{8} - \frac{2\pi R^2 - 3R^2\sqrt{3}}{12} = \dots = \frac{(9\sqrt{3} - 4\pi)R^2}{24}$$



21103. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2α και με διαμέτρους τις ΒΓ και ΒΑ φτιάχνουμε εξωτερικά του τετραγώνου ημικύκλια, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος κάθε ημικυκλίου ισούται με $\pi - \alpha$.

(Μονάδες 07)

β) i. Αν η περίμετρος της καρδιάς είναι $2\pi + 4$, να υπολογίσετε το α.

(Μονάδες 06)

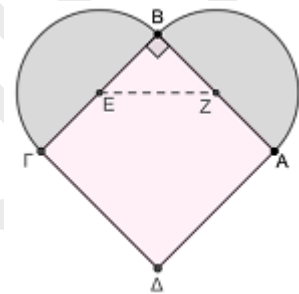
ii. Αν $\alpha = 1$ να βρείτε το μήκος του τμήματος που ενώνει τα κέντρα των δύο ημικυκλίων.

(Μονάδες 06)

γ) Αν (τ) είναι το άθροισμα των εμβαδών των δυο ημικυκλίων να συγκρίνετε τον λόγο

$\frac{(\tau)}{(AB\Gamma\Delta)}$ με την μονάδα. Να αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 06)



Λύση

α) Το κάθε ημικύκλιο έχει ακτίνα ρ ίση με το μισό της πλευράς του τετραγώνου, δηλαδή $\rho = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$.

Το μήκος του κάθε ημικυκλίου είναι $\frac{1}{2} \cdot 2\pi\rho = \pi\alpha$.

β) i. Η περίμετρος της καρδιάς αποτελείται από τα δύο ημικύκλια και τις πλευρές ΑΔ και ΔΓ. Από το α)

ερώτημα το κάθε ημικύκλιο έχει μήκος $\pi\alpha$ οπότε η περίμετρος θα ισούται με

$\pi\alpha + \pi\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 2\pi\alpha + 4\alpha$. Από υπόθεση έχουμε ότι η περίμετρος είναι $2\pi + 4$, οπότε

$$2\pi\alpha + 4\alpha = 2\pi + 4 \Leftrightarrow (2\pi + 4)\alpha = 2\pi + 4, \text{ άρα } \alpha = 1.$$

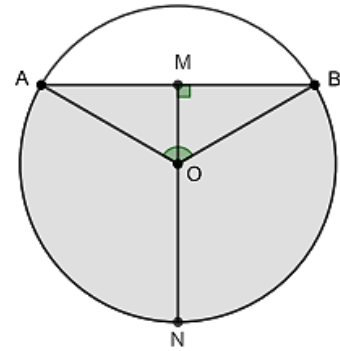
ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο BEZ έχουμε $BE = BZ = \alpha$. Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα:

$$EZ^2 = BE^2 + BZ^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Leftrightarrow EZ = \sqrt{2}$$

γ) Τα δύο ημικύκλια είναι ίσα γιατί έχουν την ίδια ακτίνα α , οπότε το άθροισμά τους θα είναι ένας κυκλικός δίσκος με ακτίνα α . Το εμβαδόν του θα είναι $(\tau) = \pi\rho^2 = \pi\alpha^2$.

$$\text{Είναι } (AB\Gamma\Delta) = AB^2 = 4\alpha^2, \text{ οπότε } \frac{(\tau)}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{\pi\alpha^2}{4\alpha^2} = \frac{\pi}{4} < 1$$

21127. Ο κυκλικός δίσκος του διπλανού σχήματος έχει κέντρο O και ακτίνα R . Έστω AB μια χορδή του κύκλου και M η προβολή του O στην AB . Αν η MO προεκταθεί προς το O , τέμνει τον κύκλο στο σημείο N . Δίνεται ότι $MN = \frac{3R}{2}$.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AB = R\sqrt{3}$,

(Μονάδες 6)

ii. $\angle AOB = 120^\circ$.

(Μονάδες 6)

β) Υποθέστε ότι η διατομή ενός αγωγού μεταφοράς νερού είναι ο κυκλικός δίσκος του σχήματος που έχει δοθεί με $R = 10$ cm.

Η στάθμη του νερού που ρέει στον αγωγό είναι στη χορδή AB και το $MN = 15$ cm. Να βρείτε:

i. το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους του σχήματος που περικλείεται από την χορδή AB και το τόξο ANB .

(Μονάδες 7)

ii. το μήκος του τόξου ANB .

(Μονάδες 6)

Λύση

α) i) Είναι $MN = \frac{3R}{2}$ και $ON = R$, άρα $OM = \frac{R}{2}$. Όμως $\alpha_3 = \frac{R}{2}$, οπότε η έχει απόστημα ίσο με την

πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O, R) οπότε $AB = \lambda_3 = R\sqrt{3}$.

ii) Η γωνία $\angle AOB$ είναι ίση με την κεντρική γωνία ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο, άρα

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ.$$

β) i) Είναι $R = 10$ cm, οπότε $AB = 10\sqrt{3}$ cm και $OM = \frac{10}{2} = 5$ cm

$$\text{Είναι } (\angle AOB) = \frac{1}{2} AB \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{3} \cdot 5 = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2 \text{ και } (\angle ANB) = \frac{\pi R^2 \mu}{360^\circ} = \frac{\pi 10^2 \cdot 240^\circ}{360^\circ} = \frac{200\pi}{3} \text{ cm}^2$$

Επομένως το εμβαδόν που περικλείεται από την χορδή και το τόξο ANB είναι

$$E = (\angle AOB) + (\angle ANB) = \left(25\sqrt{3} + \frac{200\pi}{3} \right) \text{ cm}^2$$

$$\text{ii. } \ell_{ANB} = \frac{\pi \cdot 10 \cdot 240^\circ}{180^\circ} = \frac{40\pi}{3} \text{ cm}$$

21138. Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος C_1 έχει κέντρο K και ακτίνα R και ο κύκλος C_2 έχει κέντρο Λ και ακτίνα $\rho = 2$.

Οι αποστάσεις των K και Λ από την κοινή χορδή AB των δύο κύκλων είναι $KO = \sqrt{3}$ και $\Lambda O = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $OA = \sqrt{3}$.

(Μονάδες 6)

ii. $R = \sqrt{6}$.

(Μονάδες 6)

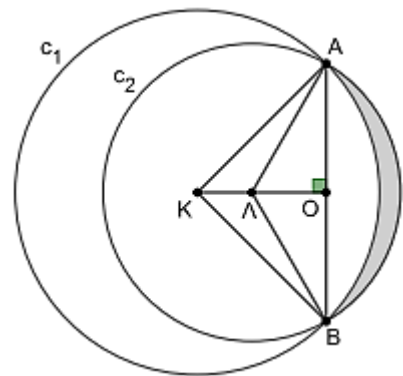
β) Να βρείτε τα εμβαδά:

i. των κυκλικών τομέων KAB και ΛAB .

(Μονάδες 8)

ii. του σκιασμένου μηνίσκου του σχήματος.

(Μονάδες 5)



Λύση

α) i) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΛOA η υποτείνουσα $AA = \rho = 2$ και η $\Lambda O = 1$, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι $OA^2 = AA^2 - \Lambda O^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 \Leftrightarrow OA = \sqrt{3}$

ii. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ είναι:

$$AK^2 = KO^2 + OA^2 \Leftrightarrow R^2 = 2(\sqrt{3})^2 = 6 \Leftrightarrow R = \sqrt{6}$$

β) Η ευθεία ΚΛ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής, άρα το Ο είναι το μέσο της ΑΒ, οπότε $AB = 2OA = 2\sqrt{3}$.

i) Είναι $AB = 2\sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = R\sqrt{2} = \lambda_4$, άρα η ΑΒ είναι πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο C_1 , άρα η κεντρική του γωνία είναι $AKB = 90^\circ$.

$$(\text{KAB}) = \frac{\pi R^2 \mu}{360^\circ} = \frac{\pi (\sqrt{6})^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{3\pi}{2}.$$

Είναι $AB = 2\sqrt{3} = \rho\sqrt{3} = \lambda_3$, δηλαδή η ΑΒ είναι πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο C_2 , άρα η κεντρική του γωνία είναι $\angle AOB = 120^\circ$.

$$(\angle AB) = \frac{\pi R^2 \mu}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\text{ii) } E = (\angle AB) - (\text{KAB}) + (\text{KAB}) - (\angle AB) = \frac{4\pi}{3} - \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} - \frac{1}{2}2 \cdot \sqrt{3} = -\frac{\pi}{6} + 3 - \sqrt{3}$$

21659. Για τα σημεία Α, Β και Γ του κύκλου (Ο, R) στο παρακάτω σχήμα ισχύει ότι $AB = R$ και $B\Gamma = R\sqrt{2}$.

Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R:

α) τα μήκη των τόξων ΑΒ, ΒΓ.

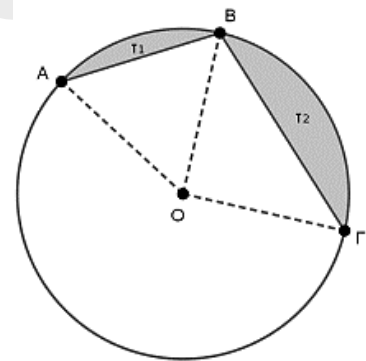
(Μονάδες 8)

β) το μήκος του μη κυρτογώνιου τόξου ΑΓ και το εμβαδό του κυκλικού τομέα (ΟΑΓ) που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία ΑΟΓ.

(Μονάδες 8)

γ) το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων (τ_1) και (τ_2), όπως αυτά σημειώνονται στο σχήμα.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Από τα δεδομένα έχουμε: $AB = R = \lambda_6$, οπότε το τόξο ΑΒ αντιστοιχεί στην κεντρική γωνία κανονικού 6-γώνου, άρα $\angle AOB = 60^\circ$, επομένως το μέτρο του τόξου ΑΒ ισούται με $\mu = 60^\circ$ (1).

Είναι $B\Gamma = R\sqrt{2} = \lambda_4$ οπότε το τόξο ΒΓ αντιστοιχεί στην κεντρική γωνία κανονικού 4-γώνου, άρα $\angle BO\Gamma = 90^\circ$ επομένως το μέτρο του τόξου ΒΓ ισούται με $\mu = 90^\circ$ (2).

$$\text{Είναι } \ell_{AB} = \frac{\pi R \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R}{3} \text{ και } \ell_{B\Gamma} = \frac{\pi R \cdot 90^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R}{2}$$

β) Λόγω των (1), (2) για την κυρτή γωνία ΑΟΓ έχουμε: $\angle AOG = \angle AOB + \angle BO\Gamma = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$

Το μήκος ℓ_3 , του μη κυρτογώνιου τόξου ΑΓ, θα βρεθεί αν από το μήκος του κύκλου αφαιρέσουμε τα μήκη των τόξων ΑΒ, ΒΓ, που υπολογίσαμε στο ερώτημα (α). Δηλαδή:

$$\ell_2 = 2\pi R - \ell_{AB} - \ell_{B\Gamma} = 2\pi R - \frac{\pi R}{3} - \frac{\pi R}{2} = \frac{7\pi R}{6}. \text{ Ακόμη } (\angle AOG) = \frac{\pi R^2 \cdot 150^\circ}{360^\circ} = \frac{5\pi R^2}{12}$$

γ) Για το εμβαδό τ_1 , του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από την χορδή ΑΒ έχουμε:

$$(\tau_1) = (\angle OAB) - (\angle OAB) = \frac{\pi R^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}$$

Για το εμβαδό τ_2 , του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από την χορδή ΒΓ έχουμε:

$$(\tau_2) = (\text{ΟΒΓ}) - (\text{ΟΒΓ}) = \frac{\pi R^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} R \cdot R = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{(\pi - 2)R^2}{4}.$$

$$\text{Οπότε } (\tau_1) + (\tau_2) = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12} + \frac{(\pi - 2)R^2}{4} = \frac{(5\pi - 6 - 3\sqrt{3})R^2}{12}$$

18355. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Στην διαγώνιο του ΑΓ

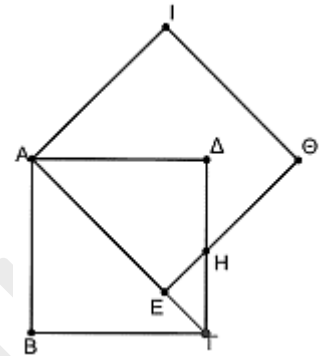
θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $ΕΓ = \frac{1}{4} ΑΓ$. Με πλευρά την ΑΕ

κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΙΘΕ όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω Η το σημείο τομής της ΔΓ με την ΕΘ.

α) i. Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(ΑΙΘΕ)}{(ΑΒΓΔ)}$. (Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(ΕΓΗ)}{(ΑΓΔ)}$. (Μονάδες 10)

β) Κατασκευάζουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του ΑΙΘΕ. Να εξετάσετε αν ο λόγος του εμβαδού του κύκλου αυτού προς το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ εξαρτάται από το μήκος α της πλευράς του ΑΒΓΔ. (Μονάδες 07)



Λύση

α) i. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow ΑΓ = \alpha\sqrt{2}.$$

Τα τετράγωνα ΑΙΘΕ και ΑΒΓΔ είναι όμοια, άρα ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του

$$\text{λόγου ομοιότητάς τους, οπότε } \frac{(ΑΙΘΕ)}{(ΑΒΓΔ)} = \left(\frac{ΑΕ}{ΑΒ}\right)^2 = \left(\frac{\frac{3}{4}\alpha\sqrt{2}}{\alpha}\right)^2 = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}.$$

ii. Τα τρίγωνα ΕΗΓ και ΑΓΔ έχουν $\angle ΓΕΗ = 90^\circ$ και τη γωνία ΕΓΗ κοινή. Επομένως είναι όμοια γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία. Οι ανάλογες πλευρές τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{Ε} = \hat{Δ}$	$\hat{ΕΓΗ} = \hat{ΕΓΗ}$	$\hat{ΕΗΓ} = \hat{ΓΔΔ}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΕΗΓ	ΗΓ	ΕΗ	ΕΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΓΔ	ΑΓ	ΑΔ	ΔΓ

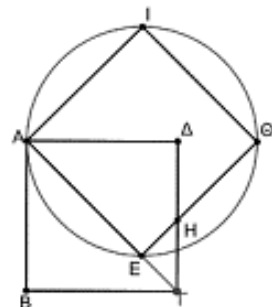
$$\text{Είναι } \frac{(ΕΓΗ)}{(ΑΓΔ)} = \left(\frac{ΕΓ}{ΔΓ}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{4}ΑΓ}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{4}\alpha\sqrt{2}}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

β) Σχεδιάζουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του ΑΙΘΕ και έστω ρ η ακτίνα

$$\text{του. Από το α) ερώτημα έχουμε ότι } ΑΕ = \frac{3}{4}ΑΓ = \frac{3\alpha\sqrt{2}}{4}.$$

Το τετράγωνο ΑΙΘΕ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο οπότε η πλευρά του ΑΕ είναι πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας ρ, δηλαδή

$$ΑΕ = \rho\sqrt{2} \Leftrightarrow \rho = \frac{ΑΕ}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{3}{4}\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4}\alpha. \text{ Αν Ε το εμβαδόν του κύκλου, τότε}$$



$$\frac{E}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{\pi \left(\frac{3}{4}\alpha\right)^2}{\alpha^2} = \frac{\pi \cdot \frac{9}{16}\alpha^2}{\alpha^2} = \frac{9\pi}{16} \text{ που είναι ανεξάρτητος του μήκους της πλευράς } \alpha \text{ του τετραγώνου } AB\Gamma\Delta.$$

21181. Δίνεται ισοπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και περιγεγραμμένο στον κύκλο (O, ρ) όπου ρ το απόστημα του ισοπλεύρου τριγώνου. Αν το απόστημα του ισοπλεύρου τριγώνου είναι 5 να υπολογίσετε:

α) Την ακτίνα R του κύκλου.

(Μονάδες 4)

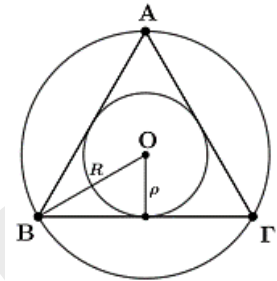
β) Αν $R = 10$ τότε να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδό του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

(Μονάδες 9)

ii. Το εμβαδό του κυκλικού δακτυλίου που σχηματίζουν ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος στο τρίγωνο $AB\Gamma$ κύκλος.

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Το απόστημα a_3 του ισοπλεύρου τριγώνου σε κύκλο ακτίνας R είναι: $a_3 = \frac{R}{2} \Leftrightarrow 5 = \frac{R}{2} \Leftrightarrow R = 10$.

β) i. Το εμβαδό E_1 του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου είναι: $E_1 = \pi R^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$.

ii. Το εμβαδό E_2 εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $E_2 = \pi \rho^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$

Άρα το εμβαδό του κυκλικού δακτυλίου E είναι: $E = E_1 - E_2 = 100\pi - 25\pi = 75\pi$

21979. Στο παρακάτω σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοπλευρο, πλευράς $2a$. Με διάμετρο τη $B\Gamma$ γράφουμε ημικύκλιο, που τέμνει τις πλευρές $AB, A\Gamma$ στα σημεία Δ, E αντίστοιχα. Αν O είναι το κέντρο του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\Gamma = a\sqrt{3}$.

(Μονάδες 8)

β) το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων που βρίσκονται στο εξωτερικό του τριγώνου ισούται με

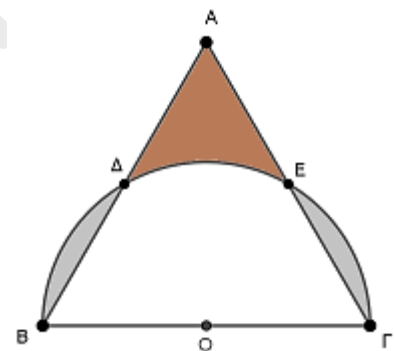
$$E = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})\alpha^2}{6}.$$

(Μονάδες 9)

γ) το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου που ορίζεται από τα

ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta, AE$ και το τόξο ΔE είναι: $E' = \frac{(3\sqrt{3} - \pi)\alpha^2}{6}$.

(Μονάδες 8)



Λύση

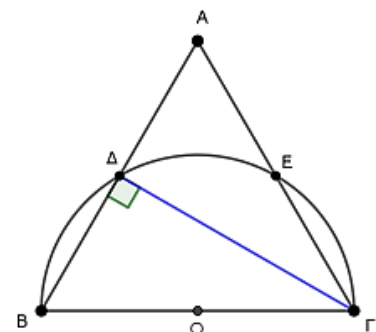
α) Είναι $AB = B\Gamma = \Gamma A = 2a, OB = O\Gamma = O\Delta = OE = a$ και

$\angle A = \angle B = \angle \Gamma = 60^\circ$. Επίσης η $B\Gamma$ είναι διάμετρος του ημικυκλίου, άρα

$\angle B\Delta\Gamma = 90^\circ$. Δηλαδή στο ισοπλευρο τρίγωνο ΓAB , το $\Gamma\Delta$ είναι ύψος, οπότε θα είναι και διάμεσος.

Άρα το Δ είναι μέσο της AB και όμοια το E , είναι μέσο της $A\Gamma$, οπότε $\Delta B = \Delta A = EA = E\Gamma = a$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$, από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\Delta\Gamma^2 = B\Gamma^2 - B\Delta^2 = (2a)^2 - a^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 \Leftrightarrow \Delta\Gamma = a\sqrt{3}$$

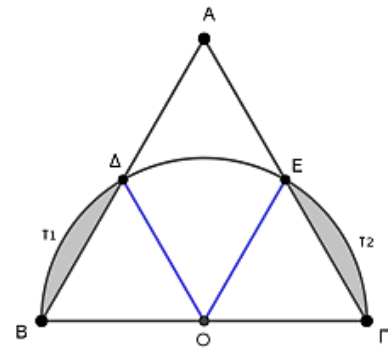


β) Λόγω του ερωτήματος (α), τα τρίγωνα ΟΒΔ, ΟΓΕ είναι ισόπλευρα πλευράς α, οπότε θα είναι ίσα. Επομένως τα εμβαδά τ_1 , τ_2 των δύο κυκλικών τμημάτων θα είναι ίσα.
Άρα $E = \tau_1 + \tau_2 = 2\tau_1$ (1).

$$\text{Όμως } \tau_1 = (\text{ΟΒΔ}) - (\text{ΟΒΔ}) = \frac{\pi \alpha^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} - \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\tau_1 = \frac{2\pi \alpha^2 - 3\alpha^2 \sqrt{3}}{12} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})\alpha^2}{12}, \text{ άρα}$$

$$E = 2 \cdot \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})\alpha^2}{12} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})\alpha^2}{6}.$$



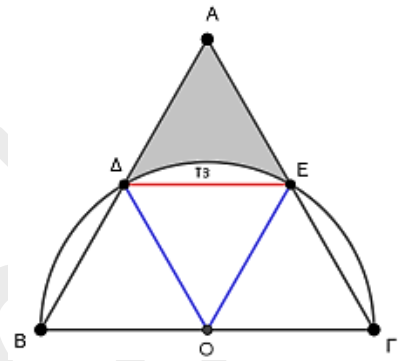
γ) Λόγω του ερωτήματος (α), τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΟΔΕ είναι ισόπλευρα πλευράς α. Οπότε το εμβαδό τ_3 , του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από τη χορδή ΔΕ θα ισούται με τα εμβαδά

$$\tau_1 \text{ και } \tau_2. \text{ Δηλαδή } \tau_3 = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})\alpha^2}{12}.$$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = (\text{ΑΔΕ}) - \tau_3 = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})\alpha^2}{12} \Leftrightarrow$$

$$E = (\text{ΑΔΕ}) - \tau_3 = \frac{3\alpha^2 \sqrt{3} - 2\pi \alpha^2 + 3\alpha^2 \sqrt{3}}{12} = \frac{6\alpha^2 \sqrt{3} - 2\pi \alpha^2}{12} = \frac{2(3\sqrt{3} - \pi)\alpha^2}{12} = \frac{(3\sqrt{3} - \pi)\alpha^2}{6}$$



22021. Δίνεται ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$ και

$B\Gamma = 2\rho$. Με διάμετρο ΒΓ γράφουμε ημικύκλιο εξωτερικά του τριγώνου. Επίσης, γράφουμε τον κυκλικό τομέα ΑΒΓ με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $AB = \rho\sqrt{2}$.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου μ ως συνάρτηση του ρ. (Μονάδες 10)

γ) Να συγκρίνετε το εμβαδόν του μηνίσκου μ με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Τι συμπέρασμα προκύπτει;

(Μονάδες 05)

Λύση

α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο είναι $AB = AG$. Έχουμε διαδοχικά: $B\Gamma^2 = AB^2 + AG^2 \Leftrightarrow$

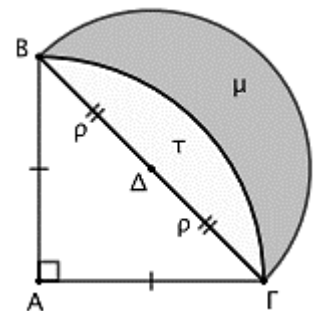
$$(2\rho)^2 = AB^2 + AB^2 \Leftrightarrow 2AB^2 = 4\rho^2 \Leftrightarrow AB^2 = 2\rho^2 \Leftrightarrow AB = \rho\sqrt{2}$$

β) Το εμβαδόν (μ) του σχηματιζόμενου μηνίσκου προκύπτει αν από το εμβαδόν του ημικυκλίου διαμέτρου ΒΓ αφαιρέσουμε το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος με χορδή ΒΓ, δηλαδή: $(\mu) = (\Delta B\Gamma) - (\tau)$.

$$\text{Είναι } (\Delta B\Gamma) = \frac{\pi \Delta^2 \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \rho^2}{2} \text{ και}$$

$$(\tau) = (\text{ΑΒΓ}) - (\text{ΑΒΓ}) = \frac{\pi AB^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AG = \frac{\pi \cdot 2\rho^2}{4} - \frac{1}{2} \cdot 2\rho^2 = \frac{\pi \rho^2}{2} - \rho^2, \text{ οπότε}$$

$$(\mu) = \frac{\pi \rho^2}{2} - \left(\frac{\pi \rho^2}{2} - \rho^2 \right) = \rho^2$$



γ) Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 2\rho^2 = \rho^2$, οπότε $(\mu) = (AB\Gamma)$, δηλαδή ο σχηματιζόμενος μηνίσκος είναι ισοδύναμος με το τρίγωνο $AB\Gamma$.

22024. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και τυχαίο σημείο του M , τέτοιο ώστε $AM = 2\alpha$ και $MB = 2\beta$. Με διαμέτρους AM , MB και AB γράφουμε ημικύκλια προς το ίδιο μέρος του AB , όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω Γ το σημείο τομής του ημικυκλίου AB και της κάθετης από το M στο AB .

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καθενός από τα τρία ημικύκλια ZAM , EMB και ΔAB όπου Z , E , Δ είναι τα μέσα των AM , MB και AB αντίστοιχα. (Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καμπυλόγραμμου σχήματος τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το καμπυλόγραμμο σχήμα τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων έχει το ίδιο εμβαδόν με τον κύκλο διαμέτρου $M\Gamma$. (Μονάδες 05)

δ) Για ποια θέση του M μεγιστοποιείται το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ ; (Μονάδες 05)

Λύση

$$\alpha) (ZAM) = \frac{\pi \cdot ZM^2 \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \alpha^2}{2}, (EMB) = \frac{\pi \cdot EB^2 \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \beta^2}{2}$$

$$\text{και } (\Delta AB) = \frac{\pi \cdot \Delta B^2 \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi(\alpha + \beta)^2}{2}.$$

β) Για το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ , ισχύει:

$$(\tau) = (\Delta AB) - (ZAM) - (EMB) = \frac{\pi(\alpha + \beta)^2}{2} - \frac{\pi \alpha^2}{2} - \frac{\pi \beta^2}{2} \Leftrightarrow$$

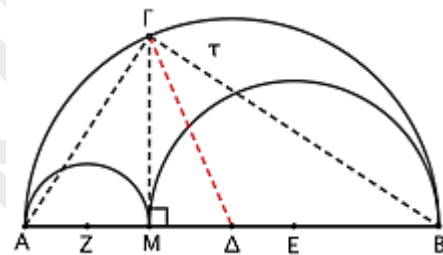
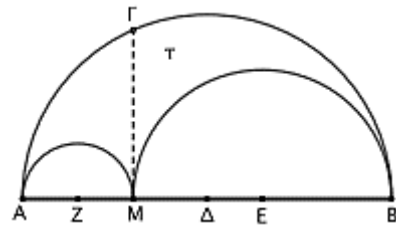
$$(\tau) = \frac{\pi(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 - \beta^2)}{2} = \frac{\pi \cdot 2\alpha\beta}{2} = \pi\alpha\beta$$

$$\gamma) \text{ Ο κύκλος με διάμετρο } M\Gamma \text{ έχει εμβαδό } E = \pi \left(\frac{M\Gamma}{2} \right)^2 = \frac{\pi \cdot M\Gamma^2}{4}.$$

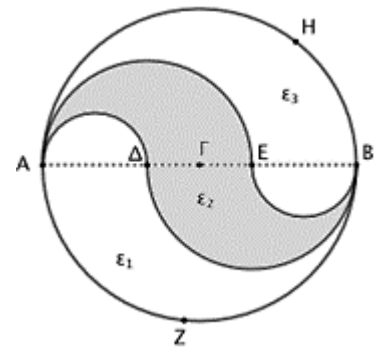
Όμως, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο Γ , αφού η γωνία $\angle A\Gamma B$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο ημικύκλιο AB . Οπότε: $M\Gamma^2 = AM \cdot MB = 2\alpha \cdot 2\beta = 4\alpha\beta$ οπότε $E = (\tau)$, δηλαδή ο κύκλος με διάμετρο $M\Gamma$ είναι ισοδύναμος με το καμπυλόγραμμο σχήμα τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων.

δ) Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ θα γίνει μέγιστο όταν το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο $M\Gamma$ γίνει μέγιστο, δηλαδή όταν μεγιστοποιηθεί το κλάσμα $\frac{\pi \cdot M\Gamma^2}{4}$.

Το κλάσμα αυτό παίρνει τη μέγιστη τιμή του όταν το κάθετο τμήμα $M\Gamma$ γίνει μέγιστο, δηλαδή όταν $M\Gamma = R$, αφού $M\Gamma \leq \Delta\Gamma = R$. Άρα, το σημείο M θα είναι το μέσο του AB , δηλαδή θα είναι $\alpha = \beta$.



22058. Θεωρούμε κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα R . Έστω AB διάμετρος του κύκλου και Δ, E σημεία της τέτοια ώστε $A\Delta = \Delta E = EB$. Σχεδιάζουμε τα ημικύκλια $A\Delta$ και AE πάνω από τη διάμετρο AB και τα ημικύκλια BE και BA κάτω από τη διάμετρο AB , όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να υπολογίσετε τα εμβαδά ε_1 και ε_3 των καμπυλόγραμμων σχημάτων $A\Delta BZ$ και $BEAH$ αντίστοιχα. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ε_2 του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου σχήματος $A\Delta BE$. (Μονάδες 08)

γ) Να εξετάσετε αν ο κύκλος χωρίζεται σε τρία ισοδύναμα καμπυλόγραμμο σχήματα. (Μονάδες 05)

Λύση

α) Είναι $A\Delta = \Delta E = EB = \frac{2R}{3}$.

Τα ημικύκλια $A\Delta$ και BE έχουν ακτίνα $\rho_1 = \frac{A\Delta}{2} = \frac{R}{3}$ και εμβαδόν $\varepsilon = \frac{\pi \cdot \rho_1^2 \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \left(\frac{R}{3}\right)^2}{2} = \frac{\pi R^2}{18}$.

Τα ημικύκλια AE και BA έχουν ακτίνα $\rho_2 = \frac{AE}{2} = A\Delta = \frac{2R}{3}$ και εμβαδόν

$$\tau = \frac{\pi \cdot \rho_2^2 \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \left(\frac{2R}{3}\right)^2}{2} = \frac{2\pi R^2}{9}.$$

Τα ημικύκλια AHB και AZB έχουν ακτίνα R και εμβαδόν $\sigma = \frac{\pi R^2}{2}$.

Οπότε, τα καμπυλόγραμμο σχήματα $A\Delta BZ$ και $BEAH$ έχουν εμβαδόν

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \sigma + \varepsilon - \tau = \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{18} - \frac{2\pi R^2}{9} = \frac{9\pi R^2}{18} + \frac{\pi R^2}{18} - \frac{4\pi R^2}{18} = \frac{6\pi R^2}{18} = \frac{\pi R^2}{3}.$$

β) Το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο AB είναι $E = \pi R^2$. Επομένως, το καμπυλόγραμμο σχήμα $A\Delta BE$ έχει εμβαδόν $\varepsilon_2 = E - \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \pi R^2 - \frac{\pi R^2}{3} - \frac{\pi R^2}{3} = \frac{\pi R^2}{3}$.

Είναι $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{\pi R^2}{3} = \frac{E}{3}$, άρα ο κύκλος χωρίζεται σε τρία ισοδύναμα καμπυλόγραμμο σχήματα.

22098. Στο παρακάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $AB = 4a$ και $A\Delta = \pi a$. Στο εσωτερικό του ορθογωνίου σχεδιάστηκε ημικύκλιο διαμέτρου AB .

α) Να αποδείξετε ότι το ημικύκλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία. (Μονάδες 8)

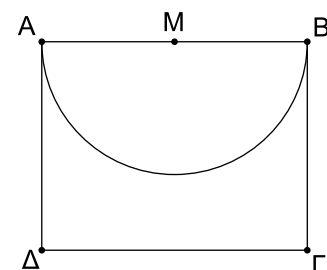
β) Αν η διαγώνιος $B\Delta$ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο E και M είναι το μέσο της AB ,

i. να αποδείξετε ότι $AB^2 = B\Delta \cdot BE$ και $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta E$. (Μονάδες 6)

ii. να αποδείξετε ότι $BE = \frac{16a}{\sqrt{16 + \pi^2}}$ και $\Delta E = \frac{\pi^2 a}{\sqrt{16 + \pi^2}}$. (Μονάδες 6)

iii. να υπολογίσετε το $\text{syn} \angle BME$.

(Μονάδες 5)



Λύση

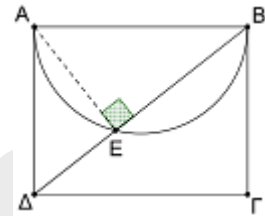
α) Είναι $(AB\Gamma\Delta) = AB \cdot A\Delta = 4a \cdot \pi a = 4\pi a^2$.

Το εμβαδόν του ημικυκλίου ακτίνας $R = \frac{AB}{2} = \frac{4\alpha}{2} = 2\alpha$ είναι $E_1 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi(2\alpha)^2}{2} = 2\pi\alpha^2$ (1).

Το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ορθογώνιου ΑΒΓΔ και εξωτερικά του ημικυκλίου γίνεται από τον τύπο $E_2 = (AB\Gamma\Delta) - E_1 = 4\pi\alpha^2 - 2\pi\alpha^2 = 2\pi\alpha^2$ (2).

Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι $E_1 = E_2$, επομένως το ημικύκλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

β) Η διαγώνιος ΒΔ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Ε.
Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ.



i. Είναι $\angle AEB = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΒΕ είναι η προβολή της κάθετης πλευράς ΑΒ πάνω στην υποτείνουσα ΒΔ, επομένως $AB^2 = BD \cdot BE$ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΔΕ είναι η προβολή της κάθετης πλευράς ΑΔ πάνω στην υποτείνουσα ΒΔ, επομένως $AD^2 = BD \cdot DE$ (2)

ii. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι $BD^2 = AB^2 + AD^2 = (4\alpha)^2 + (\pi\alpha)^2 = 16\alpha^2 + \pi^2\alpha^2 = (16 + \pi^2)\alpha^2 \Leftrightarrow BD = \alpha\sqrt{16 + \pi^2}$.

Η σχέση (1) γίνεται: $(4\alpha)^2 = \alpha\sqrt{16 + \pi^2} \cdot BE \Leftrightarrow BE = \frac{16\alpha}{\sqrt{16 + \pi^2}}$.

Η σχέση (2) γίνεται: $(\pi\alpha)^2 = \alpha\sqrt{16 + \pi^2} \cdot DE \Leftrightarrow DE = \frac{\pi^2\alpha}{\sqrt{16 + \pi^2}}$

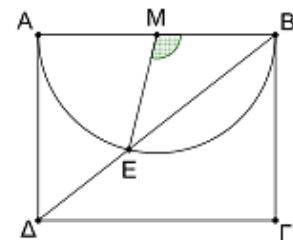
iii. Έστω Μ το μέσο της ΑΒ.

Τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΕ και ΜΒ είναι ακτίνες του ημικυκλίου διαμέτρου ΑΒ, επομένως $ME = MB = \frac{AB}{2} = 2\alpha$.

Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΒΕΜ ισχύει

$$BE^2 = MB^2 + ME^2 - 2MB \cdot ME \cdot \cos \angle BME \Leftrightarrow$$

$$\cos \angle BME = \frac{MB^2 + ME^2 - BE^2}{2MB \cdot ME} = \frac{(2\alpha)^2 + (2\alpha)^2 - \frac{256\alpha^2}{16 + \pi^2}}{22\alpha \cdot 2\alpha} = \frac{\pi^2 - 16}{\pi^2 + 16}$$



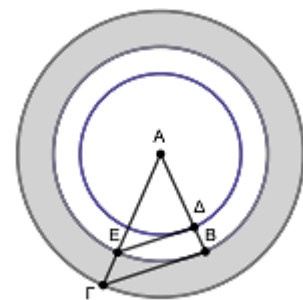
22151. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε σημείο Δ και στην πλευρά ΑΓ σημείο Ε ώστε $AE = AB$. Με κέντρο το σημείο Α και ακτίνες $\rho = AD$, $r = AB = AE$ και $R = AG$ γράφουμε τρεις ομόκεντρους κύκλους (Α, ρ), (Α, r) και (Α, R) όπως στο σχήμα.

Έστω $E_{\Gamma\Gamma}$ το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (Α, r) και (Α, R), $E_{\Delta\Delta}$ το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (Α, ρ) και (Α, r), $E_{\Delta\Delta}$ το εμβαδόν του κύκλου (Α, ρ) και $E_{\Delta\Delta}$ το εμβαδόν του κύκλου (Α, ρ).

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{E_{\Gamma\Gamma}}{E_{\Delta\Delta}} = \frac{R^2 - r^2}{r^2}$.

ii. $\frac{E_{\Delta\Delta}}{E_{\Delta\Delta}} = \frac{r^2 - \rho^2}{\rho^2}$.



(Μονάδες 10)

(Μονάδες 07)

β) Αν επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι: $\frac{E_{\Gamma\Gamma}}{E_{\Delta\Delta}} = \frac{E_{\Delta\Delta}}{E_{\Delta\Delta}}$. (Μονάδες 08)

Λύση

α) i. Το εμβαδόν E_{AE} του κύκλου (A, r) είναι ίσο με $E_{AE} = \pi r^2$ και το εμβαδόν E_{EF} του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, r) και (A, R) είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των δύο κύκλων, δηλαδή

$$E_{EF} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2), \text{ άρα } \frac{E_{EF}}{E_{AE}} = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{\pi r^2} = \frac{R^2 - r^2}{r^2}.$$

ii. Είναι $E_{AA} = \pi \rho^2$ και $E_{AB} = \pi(r^2 - \rho^2)$, οπότε $\frac{E_{AB}}{E_{AA}} = \frac{\pi(r^2 - \rho^2)}{\pi \rho^2} = \frac{r^2 - \rho^2}{\rho^2}.$

β) Αρκεί $\frac{E_{EF}}{E_{AE}} = \frac{E_{AB}}{E_{AA}} \Leftrightarrow \frac{R^2 - r^2}{r^2} = \frac{r^2 - \rho^2}{\rho^2} \Leftrightarrow \frac{R^2}{r^2} - 1 = \frac{r^2}{\rho^2} - 1 \Leftrightarrow \frac{R^2}{r^2} = \frac{r^2}{\rho^2} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{r}{\rho}$

Η τελευταία ισότητα είναι αληθής, γιατί: Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΔE που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών AB και AG του τριγώνου ABG και την παράλληλη ΔE στην πλευρά του BG έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ABG . Άρα $\frac{AE}{AB} = \frac{AG}{BG} \Leftrightarrow \frac{\rho}{r} = \frac{r}{R} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{r}{\rho}.$

22154. Δίνονται τα τρίγωνα ABG και ΔE , που η κοινή κορυφή τους A βρίσκεται στο κέντρο τριών ομόκεντρων κύκλων (A, ρ_1) , (A, ρ_2) και (A, ρ_3) , η κορυφή G βρίσκεται στον κύκλο (A, ρ_3) , οι κορυφές B και E στον κύκλο (A, ρ_2) και η κορυφή Δ στον κύκλο (A, ρ_1) , όπως στο σχήμα, με

$\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Ονομάζουμε E_{EF} το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, ρ_2) και (A, ρ_3) , E_1 το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ_1) , E_2 το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ_2) και E_3 το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ_3) .

α) Αν $\frac{E_{EF}}{E_2} = \frac{7}{9}$, να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{3}{4}.$

(Μονάδες 07)

ii. $\frac{E_2}{E_3} = \frac{9}{16}.$

(Μονάδες 05)

iii. Αν επιπλέον οι ΔE και BG είναι παράλληλες να αποδείξετε ότι $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{4}.$

(Μονάδες 08)

β) Αν $E_{EF} = E_2$ και επιπλέον οι ΔE και BG είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι $E_{AB} = E_1$ όπου E_{AB} είναι το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, ρ_1) και (A, ρ_2) . (Μονάδες 05)

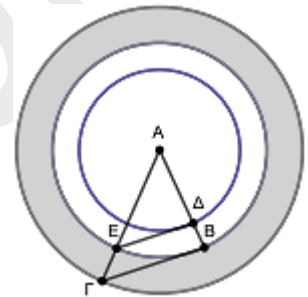
Λύση

α) i. Για το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου ισχύει ότι $E_{EF} = E_3 - E_2.$

$$\text{Είναι } \frac{E_{EF}}{E_2} = \frac{E_3 - E_2}{E_2} \Leftrightarrow \frac{7}{9} = \frac{\pi \rho_3^2 - \pi \rho_2^2}{\pi \rho_2^2} \Leftrightarrow \frac{7}{9} = \frac{\pi(\rho_3^2 - \rho_2^2)}{\pi \rho_2^2} \Leftrightarrow \frac{7}{9} = \frac{\rho_3^2 - \rho_2^2}{\rho_2^2} \Leftrightarrow$$

$$7\rho_2^2 = 9\rho_3^2 - 9\rho_2^2 \Leftrightarrow 16\rho_2^2 = 9\rho_3^2 \Leftrightarrow \frac{\rho_2^2}{\rho_3^2} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{3}{4}.$$

ii. $\frac{E_2}{E_3} = \frac{\pi \rho_2^2}{\pi \rho_3^2} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_3}\right)^2 = \frac{9}{16}.$



iii. Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την παράλληλη ΔΕ στην πλευρά του ΒΓ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΒΓ. Άρα: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AG} = \frac{DE}{BG} \Leftrightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{DE}{BG} \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \rho_2 = \rho_1\sqrt{2}$.

$$\text{Είναι } E_2 = \pi\rho_2^2 = \pi(\rho_1\sqrt{2})^2 = 2\pi\rho_1^2 = 2E_1.$$

Επίσης, για το εμβαδόν $E_{\Delta B}$ του δακτυλίου που είναι χρωματισμένος στο παρακάτω σχήμα έχουμε

$$E_{\Delta B} = E_2 - E_1 = 2E_1 - E_1 = E_1$$

22157. Δίνονται οι ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ) και (O, R) με $R > \rho$.

Οι κορυφές του ισοπλεύρου τριγώνου ΒΓΔ είναι σημεία του κύκλου (O, R) , ενώ οι πλευρές του εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Επίσης η ΒΔ εφάπτεται του κύκλου (O, ρ) στο Α.

α) Αν το εμβαδόν E του κύκλου (O, ρ) είναι ίσο με 36π , να αποδείξετε ότι:

i. $\rho = 6$.

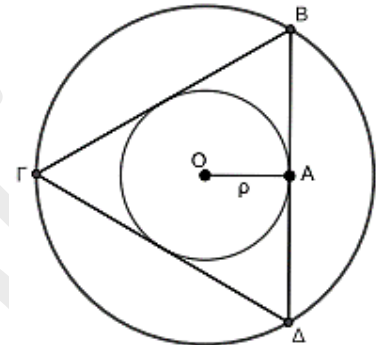
(Μονάδες 08)

ii. $R = 12$.

(Μονάδες 06)

iii. Το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου ΒΓΔ είναι ίσο με $108\sqrt{3}$.

(Μονάδες 07)



β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $(B\Gamma\Delta)$ του ισοπλεύρου τριγώνου ΒΓΔ είναι ίσο με $\frac{3\sqrt{3}}{\pi} \cdot E$, όπου E είναι το εμβαδόν του κύκλου (O, ρ) .

(Μονάδες 04)

Λύση

α) i. Η ΟΑ είναι ακτίνα του κύκλου (O, ρ) , εφόσον η ΒΔ εφάπτεται του κύκλου στο Α. Υπολογίζουμε το μήκος της ακτίνας του κύκλου (O, ρ) : Το εμβαδόν του κύκλου (O, ρ) είναι

$$E = \pi\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2 = \frac{E}{\pi} = \frac{36\pi}{\pi} = 36 \Leftrightarrow \rho = 6.$$

ii. Ισχύει $\alpha_3 = \rho$ και $\alpha_3 = \frac{R}{2}$, άρα $\rho = \frac{R}{2} \Leftrightarrow R = 2\rho = 2 \cdot 6 = 12$

iii. Έστω λ_3 η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου που είναι

εγγεγραμμένο στον κύκλο (O, R) . Τότε $\lambda_3 = R\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

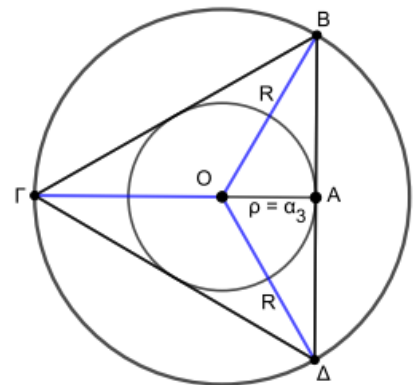
Φέρνουμε τις $OG = OB = OD = R$. Τότε τα τρίγωνα ΟΒΔ, ΟΒΓ, ΟΓΔ είναι ίσα.

Αν $(BO\Delta)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΒΟΔ και $(B\Gamma\Delta)$ το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου ΒΓΔ, τότε ισχύει:

$$(B\Gamma\Delta) = 3(BO\Delta)$$

$$\text{Είναι } (BO\Delta) = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot \lambda_3 \cdot \rho = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 6 = 36\sqrt{3}, \text{ άρα}$$

$$(B\Gamma\Delta) = 108\sqrt{3}$$



β) Είναι $R = 2\rho$, οπότε $\lambda_3 = R\sqrt{3} = 2\rho\sqrt{3}$

$$(B\Gamma\Delta) = 3(BO\Delta) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lambda_3 \cdot \rho = \frac{3}{2} \cdot 2\rho\sqrt{3} \cdot \rho = 3\sqrt{3} \cdot \rho^2 = 3\sqrt{3} \cdot \frac{E}{\pi} = \frac{3\sqrt{3}E}{\pi}$$

22244. Ένας κηπουρός θέλει να ποτίσει το γκαζόν που έχει φυτέψει σε έναν τετράγωνο κήπο πλευράς 10 m. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιεί μηχανισμούς ποτίσματος τους οποίους μπορεί να ρυθμίσει, ώστε να ποτίζουν έναν κυκλικό τομέα με συγκεκριμένη γωνία και ακτίνα.

α) Ο κηπουρός τοποθετεί στις απέναντι κορυφές Α, Γ του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 10m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Να αποδείξετε ότι:

i. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζει κάθε μηχανισμός είναι $25\pi \text{ m}^2$.

(Μονάδες 4)

ii. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζουν ταυτόχρονα και οι δύο μηχανισμοί είναι $50(\pi - 2) \text{ m}^2$.

(Μονάδες 5)

β) Ο κηπουρός τοποθετεί στις τέσσερις κορυφές του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 5m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.

i. Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται. (Μονάδες 8)

ii. Για να μην μείνει απότιστη κάποια περιοχή του κήπου ο κηπουρός τοποθετεί έναν πέμπτο μηχανισμό ποτίσματος στο κέντρο του κήπου ο οποίος ποτίζει την περιοχή ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας 5m. Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που ποτίζεται από δύο μηχανισμούς ταυτόχρονα και να το συγκρίνετε με την απάντηση που βρήκατε στο ερώτημα α).

(Μονάδες 8)

Λύση

Το εμβαδόν του τετράγωνου κήπου είναι $E = 10^2 = 100 \text{ m}^2$.

α) i. Ο κάθε ένας από τους δύο μηχανισμούς ποτίσματος ποτίζει έναν κυκλικό τομέα γωνίας 90° και

ακτίνας 10m. Το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα είναι $E_1 = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = 25\pi \text{ m}^2$.

ii. Οι δύο μηχανισμοί ποτίσματος ποτίζουν ολόκληρο τον κήπο, ενώ μια περιοχή του κήπου ποτίζεται και από τους δύο μηχανισμούς. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τομέων ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου αυξημένο κατά το εμβαδόν της περιοχής του κήπου που ποτίζεται από τους δύο μηχανισμούς. Άρα το εμβαδόν αυτής της περιοχής είναι $2E_1 - E = 50\pi - 100 = 50(\pi - 2) \text{ m}^2$.

β) i. Ο κάθε ένας από τους τέσσερις μηχανισμούς ποτίσματος ποτίζει έναν κυκλικό τομέα γωνίας 90° και

ακτίνας 5m. Το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα είναι $E_2 = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{25\pi}{4} \text{ m}^2$

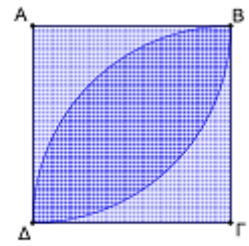
Το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται είναι $E - 4E_2 = 100 - 25\pi = 25(4 - \pi) \text{ m}^2$.

ii. Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου που ποτίζει ο πέμπτος μηχανισμός είναι $E_3 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \text{ m}^2$

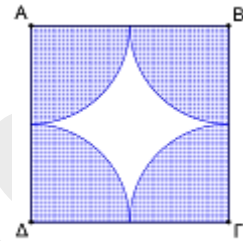
Οι πέντε μηχανισμοί ποτίσματος ποτίζουν ολόκληρο τον κήπο, ενώ τέσσερις περιοχές του κήπου ποτίζονται από δύο μηχανισμούς ταυτόχρονα. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων κυκλικών τομέων αυξημένο κατά το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου αυξημένο κατά το εμβαδόν του κήπου που ποτίζεται από δύο μηχανισμούς. Άρα το εμβαδόν αυτό είναι

$$4E_2 + E_3 - E = 25\pi + 25\pi - 100 = 50(\pi - 2) \text{ m}^2$$

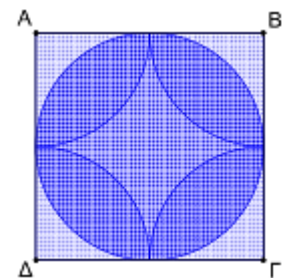
Παρατηρούμε ότι η τιμή του εμβαδού είναι ίση με αυτή του ερωτήματος α).



Σχήμα 1



Σχήμα 2



22261. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) με $AB = \gamma$, $AG = \beta$ και

$B\Gamma = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο με $A > 90^\circ$.

(Μονάδες 8)

β) η γωνία A του τριγώνου $AB\Gamma$ ισούται με 120° . Δίνεται $\sin 120^\circ = -\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 5)

γ) η γωνία $BO\Gamma$ ισούται με 120° .

(Μονάδες 5)

δ) το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος, που ορίζεται από τη χορδή $B\Gamma$ και το κυρτογώνιο τόξο $B\Gamma$,

είναι $E = \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}$. Δίνεται $\eta\mu 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Είναι $B\Gamma = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma} \Leftrightarrow B\Gamma^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow B\Gamma^2 > AG^2 + AB^2 \Leftrightarrow A > 90^\circ$.

β) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AG^2 + AB^2 - 2AG \cdot AB \cdot \sin A \Leftrightarrow$$

$$\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sin A \Leftrightarrow$$

$$2\beta\gamma \sin A = -\beta\gamma \Leftrightarrow \sin A = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow A = 120^\circ$$

γ) Η γωνία BAG είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, οπότε το τόξο στο οποίο βαίνει θα έχει μέτρο διπλάσιο από αυτήν.

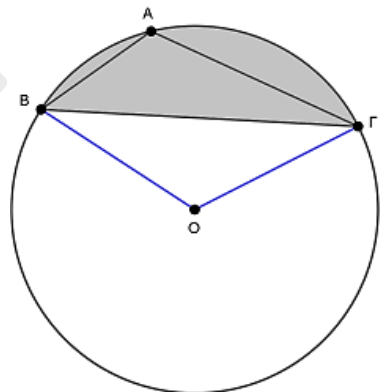
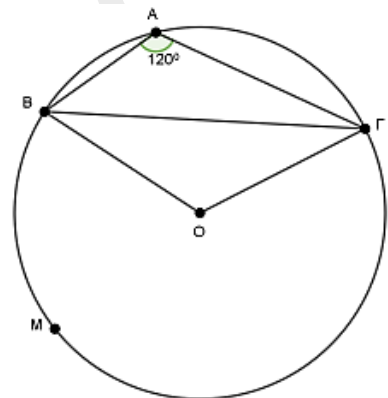
$$\text{Άρα } BM\Gamma = 2 \cdot 120^\circ = 240^\circ.$$

Έτσι για το κυρτογώνιο τόξο BAG ισχύει:

$BAG = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$, οπότε η επίκεντρη γωνία $BO\Gamma$ ισούται με 120° .

$$\delta) E = (OBA\Gamma) - (OB\Gamma) = \frac{\pi R^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \eta\mu 120^\circ \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi R^2 - 3R^2 \sqrt{3}}{12} = \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}$$



22389. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$. Με κέντρο το σημείο B και ακτίνα $R = BA$ γράφουμε τον κύκλο (B, R) ο οποίος τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ . Με κέντρο το σημείο Γ και ακτίνα $\rho = \Gamma\Delta$ γράφουμε τον κύκλο (Γ, ρ) ο οποίος τέμνει την πλευρά AG στο σημείο E . Έστω ότι το E είναι το μέσο της AG .

α) Να αποδείξετε ότι $\rho = \frac{2}{3}R$.

(Μονάδες 8)

β) Έστω E_1 το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ και E_2 το εμβαδόν του

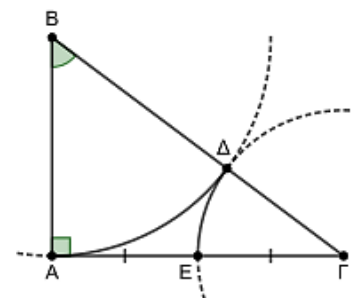
κύκλου (B, R) . Να αποδείξετε ότι $\frac{E_2}{E_1} = \frac{3\pi}{2}$.

(Μονάδες 8)

γ) Έστω $B = \mu^\circ$ και E_3 και E_4 είναι το εμβαδά των κυκλικών τομέων $B\Delta\Delta$ και $\Gamma\Delta E$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι $\frac{E_4}{E_3} = \frac{4(90 - \mu)}{9\mu}$.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Επειδή το E είναι το μέσο της ΑΓ, είναι $ΑΓ = 2ΓΕ = 2ρ$. Ακόμη $ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ = R + ρ$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 \Leftrightarrow (R + \rho)^2 = R^2 + (2\rho)^2 \Leftrightarrow R^2 + 2R\rho + \rho^2 = R^2 + 4\rho^2 \Leftrightarrow 2R\rho = 3\rho^2 \Leftrightarrow \rho = \frac{2}{3}R.$$

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι $E_1 = \frac{1}{2} \cdot ΑΓ \cdot ΑΒ = \frac{1}{2} \cdot 2\rho \cdot R = \frac{2}{3}R \cdot R = \frac{2}{3}R^2$ και του

κύκλου (Β, R), είναι $E_2 = \pi R^2$, άρα $\frac{E_2}{E_1} = \frac{\pi R^2}{\frac{2}{3}R^2} = \frac{3\pi}{2}$.

γ) Ο κυκλικός τομέας ΒΑΔ έχει εμβαδό $E_3 = \frac{\pi R^2 \cdot \mu^\circ}{360^\circ}$ και ο κυκλικός τομέας ΓΔΕ έχει εμβαδό

$$E_4 = \frac{\pi \rho^2 \cdot (90 - \mu)^\circ}{360^\circ} = \frac{4\pi R^2 \cdot (90 - \mu)^\circ}{9 \cdot 360^\circ}, \text{ άρα } \frac{E_4}{E_3} = \frac{4\pi R^2 (90 - \mu)^\circ}{9 \cdot 360^\circ} \cdot \frac{360^\circ}{\pi R^2 \cdot \mu^\circ} = \frac{4(90 - \mu)}{9\mu}$$

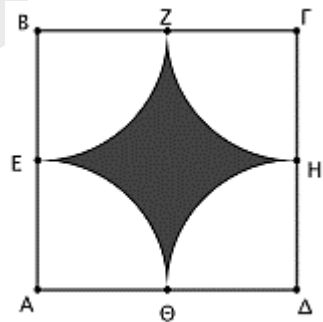
3^ο Θέμα

22054. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2α. Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα α σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα ως συνάρτηση του α. (Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι: $E = \alpha^2(4 - \pi)$. (Μονάδες 12)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου. (Μονάδες 05)



Λύση

α) Τα τόξα ΘΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ είναι τόξα ίσων κύκλων ακτίνας α και αντιστοιχούν σε ίσες επίκεντρες γωνίες 90° . Επομένως, $(\widehat{ΑΘΕ}) = (\widehat{ΒΕΖ}) = (\widehat{ΓΖΗ}) = (\widehat{ΔΗΘ}) = \frac{\pi \alpha^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \alpha^2}{4}$.

β) Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E_\tau = (2\alpha)^2 = 4\alpha^2$.

Οπότε, το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι:

$$E = E_\tau - 4(\widehat{ΑΘΕ}) = 4\alpha^2 - 4 \frac{\pi \alpha^2}{4} = 4\alpha^2 - \pi \alpha^2 = \alpha^2(4 - \pi).$$

γ) Το μήκος καθενός από τα ίσα τόξα ΘΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ είναι $\ell = \frac{\pi \alpha 90^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi \alpha}{2}$

Οπότε, η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι: $L = 4\ell = 4 \frac{\pi \alpha}{2} = 2\pi \alpha$