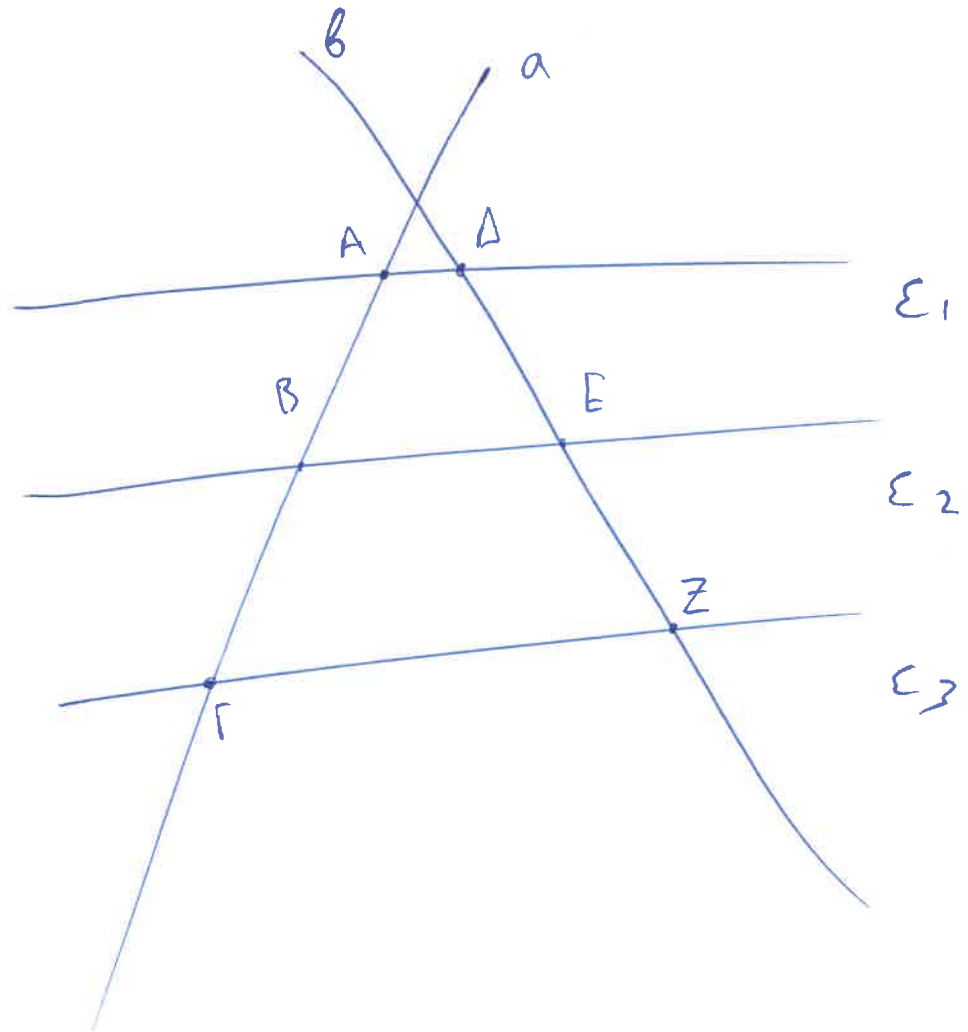


Θεώρημα Θαλή

18/09/23

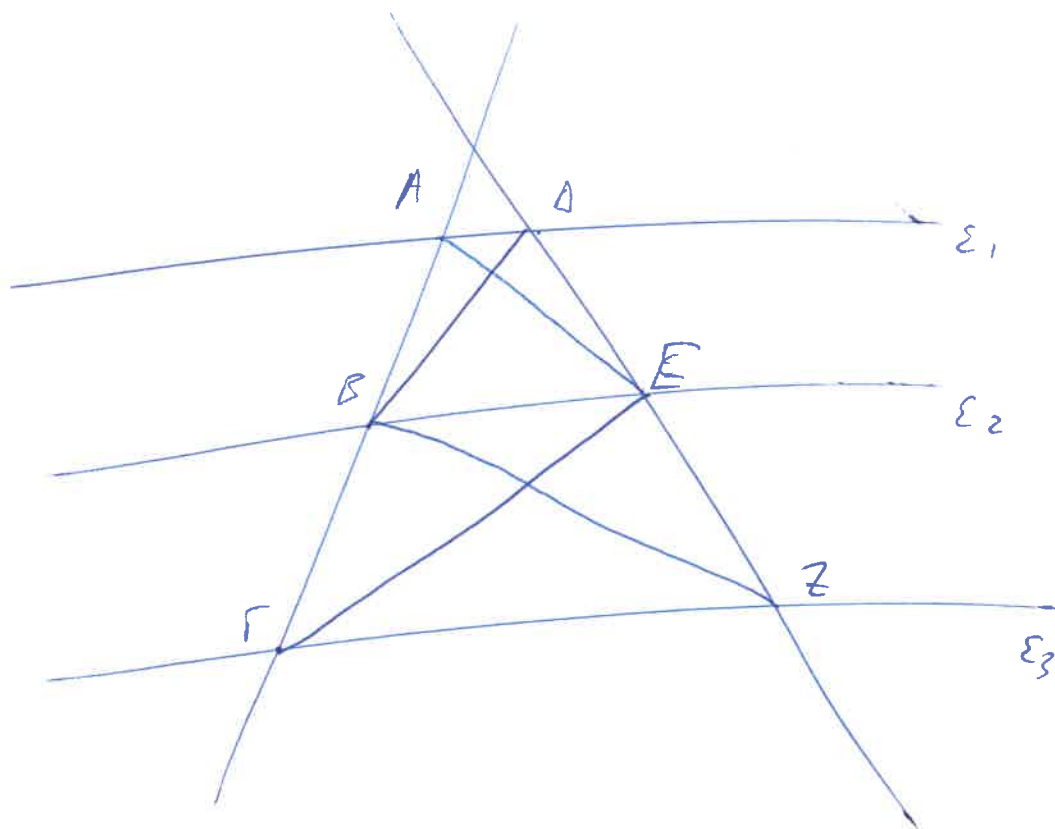
Έστω παράλληλες ευθείες $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ και δύο
ευθείες που τις τέτνουν, όπως στο παρακάτω
σχήμα



Τότε ισχύει: $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$

(A)

Απόδειξη:



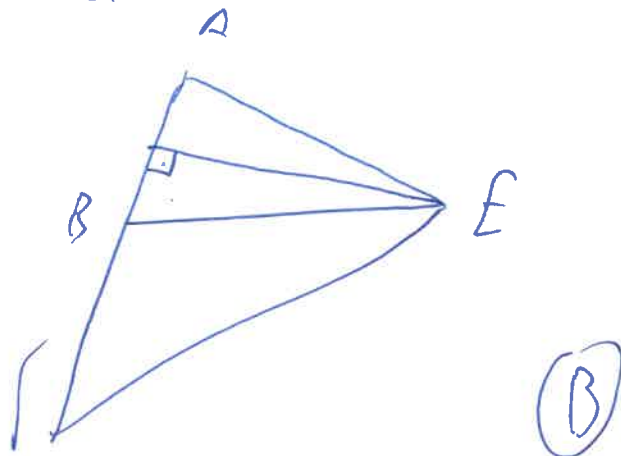
Το εμβαδόν του τριγώνου $B\Gamma E$ είναι:

$$\varepsilon(B\Gamma E) = \frac{\text{βάση} \times \text{ύψος}}{2} = \frac{B\Gamma \times \text{ύψος από το } E}{2}$$

Ομοίως

$$\varepsilon(ABE) = \frac{AB \times \text{ύψος από το } E \text{ στην } AB}{2}$$

Όπως, το ύψος από το E στην AB ταυτίζεται με
αυτό από το E
στην $B\Gamma$.



(B)

Επομένως,
$$\frac{\varepsilon(B\Gamma\epsilon)}{\varepsilon(AB\epsilon)} = \frac{\frac{B\Gamma \times \text{ύψος}}{2}}{\frac{AB \times \text{ύψος}}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon(B\Gamma\epsilon)}{\varepsilon(AB\epsilon)} = \frac{B\Gamma}{AB}$$

Όμοια, ισχύει
$$\frac{\varepsilon(\epsilon B\epsilon)}{\varepsilon(\epsilon B\Delta)} = \frac{\epsilon\epsilon}{\epsilon\Delta}$$

• Ισχυρισμός: Τα τριγώνια $B\epsilon\Gamma$ και $B\epsilon\epsilon$ είναι ίσα.

Απόδειξη:

Α φάνεσαι στον αναγνώστη.

Όπως, $\varepsilon(B\Gamma\epsilon) = \varepsilon(B\epsilon\zeta)$, αφού:

$$\varepsilon(B\Gamma\epsilon) = \frac{B\epsilon \times \text{ύψος ορθ. } B\epsilon \text{ από το } \Gamma}{2}$$

$$= \frac{B\epsilon \times \text{απόσταση της } \epsilon\zeta \text{ από την } \epsilon_3}{2}$$

$$\varepsilon(B\epsilon\zeta) = \frac{B\epsilon \times \text{ύψος ορθ. } B\epsilon \text{ από το } \zeta}{2}$$

$$= \frac{B\epsilon \times \text{απόσταση της } \epsilon\zeta \text{ από την } \epsilon_3}{2}$$

Όπως ~~$\varepsilon(\zeta B\epsilon)$~~ $\varepsilon(A\beta\epsilon) = \varepsilon(B\epsilon\Delta)$
 ~~$\varepsilon(B\epsilon A)$~~

Άρα

$$\frac{\varepsilon(B\Gamma\epsilon)}{\varepsilon(A\beta\epsilon)} = \frac{\varepsilon(B\epsilon\zeta)}{\varepsilon(B\epsilon\Delta)} \Rightarrow \frac{B\Gamma}{AB} = \frac{\epsilon\zeta}{\epsilon\Delta}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon\zeta}$$

Απόσταση δύο εθόνων είναι για εθόνια
που τις ενώνει να είναι καθεμία να μας δώ.



Ισχύει και το αντίστροφο του
Θεωρήματος αυτού, δηλαδή:

Αν οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ τέμνουν τις
 a, b έτσι ώστε $\frac{AB}{BS} = \frac{AE}{EZ}$, τότε

$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$ (είναι ανά δύο παράλληλες).

