

Μαθηματικές Ταυτότητες

Άσκηση 1

1. Να αποδείξετε ότι ισχύει $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ για κάθε a, b .
2. Να αποδείξετε ότι ισχύει $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ για κάθε a, b .

Λύση

Αλγεβρικά:

1. Εξ ορισμού, $x^2 = x \cdot x$. Άρα

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$

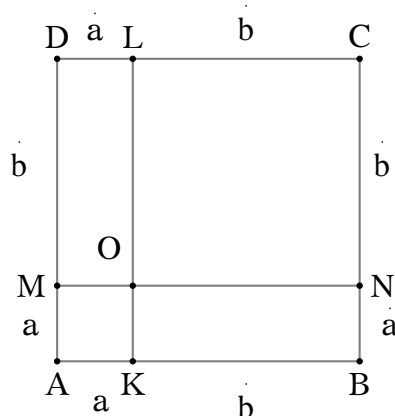
2. Παρομοίως,

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b = a^2 - 2ab + b^2$$

Γεωμετρικά:

1. Ο αριθμός x^2 συμβολίζει το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς x . Επίσης η έκφραση $x \cdot y$ συμβολίζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμου με πλευρές x, y αντίστοιχα.

Έστω λοιπόν τετράγωνο ABCD με πλευρά $a + b$. Χωρίζουμε την κάθε πλευρά στα τμήματα a και b όπως στο παρακάτω σχήμα.



Δημιουργούνται έτσι 4 σχήματα. Τα ορθογώνια LCNO, NBKO και τα τετράγωνα AKOM, DLOM.

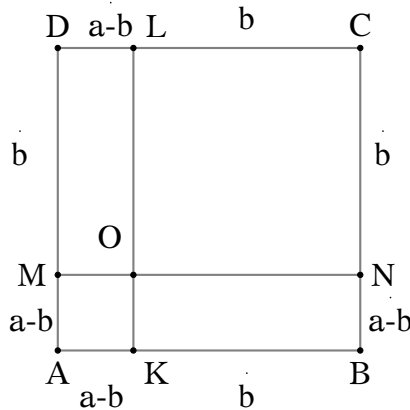
Είναι εύκολο να δει κανείς για τα εμβαδά ότι:

$$(AKOM) = a^2, (LCNO) = b^2, (DLOM) = ab, (NBKO) = ab$$

Από την προφανή σχέση $(ABCD) = (AKOM) + (DLOM) + (LCNO) + (NBKO)$ προκύπτει ότι $(a+b)^2 = a^2 + ab + b^2 + ab$, δηλαδή $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2. Θεωρούμε ότι $a > b$ (η απόδειξη για $a < b$ είναι παρόμοια).

Έστω τετράγωνο ABCD με πλευρά a . Χωρίζουμε κάθε του πλευρά σε τμήματα b και $a-b$ (γίνεται αφού $a > b$).



Δημιουργούνται πάλι 4 σχήματα. Τα ορθογώνια LCNO, NBKO και τα τετράγωνα AKOM, DLOM.

Για τα εμβαδά βλέπουμε ότι:

$$(AKOM) = (a-b)^2, (LCNO) = b^2, (DLOM) = b(a-b), (NBKO) = b(a-b)$$

Από την σχέση $(ABCD) = (AKOM) + (DLOM) + (LCNO) + (NBKO)$ προκύπτει ότι $a^2 = (a-b)^2 + b(a-b) + b^2 + b(a-b)$. Κάνοντας πράξεις, έχουμε:

$$\begin{aligned} a^2 &= (a-b)^2 + ba - b^2 + b^2 + ba - b^2 \\ -(a-b)^2 &= -a^2 + ba - b^2 + b^2 + ba - b^2 \\ -(a-b)^2 &= -a^2 + 2ba - b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

Άσκηση 2 Να αποδείξετε ότι ισχύει $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ για κάθε a, b .

Λύση

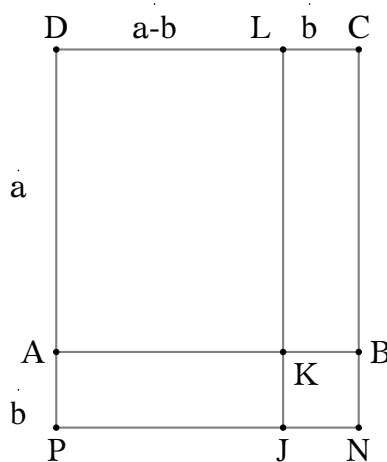
Αλγεβρικά:

Με απλή εφαρμογή της επιμεριστικής, έχουμε:

$$(a + b)(a - b) = aa - ab + ba - bb = a^2 - b^2$$

Γεωμετρικά:

Στο παρακάτω σχήμα, μας ενδιαφέρει το εμβαδόν του ορθογωνίου DLJP.



Από την μία ισούται με $(a + b)(a - b)$, καθώς $DL = a - b$, $DP = a + b$.

Από την άλλη, ισούται με το εμβαδόν των επιμέρους ορθογωνίων DLKA, AKJP. Είναι εύκολο να δούμε ότι αυτά έχουν εμβαδόν $a(a - b)$ και $b(a - b)$ αντίστοιχα.

Επομένως,

$$\begin{aligned} (DLJP) &= (DLKA) + (AKJP) \\ (a + b)(a - b) &= a(a - b) + b(a - b) \\ (a + b)(a - b) &= aa - ab + ba - bb \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Άσκηση 3

1. Να αποδείξετε ότι ισχύει $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ για κάθε a, b .
2. Να αποδείξετε ότι ισχύει $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ για κάθε a, b .

Λύση Στην περίπτωση αυτή, για την γεωμετρική απόδειξη χρειάζεται να δουλέψουμε στον τρισδιάστατο χώρο, οπότε θα γίνει μόνο η αλγεβρική.

Η τελευταία είναι απλή εφαρμογή της επιμεριστικής:

1.

$$\begin{aligned}
 (a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) = (aa+ab+ba+bb)(a+b) \\
 (a+b)^3 &= (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+a^2b+2aab+2abb+b^2a+b^3 \\
 (a+b)^3 &= a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3 \\
 (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 (a-b)^3 &= (a-b)(a-b)(a-b) = (aa-ab-ba+bb)(a-b) \\
 (a-b)^3 &= (a^2-2ab+b^2)(a-b) = a^3-a^2b-2aab+2abb+b^2a-b^3 \\
 (a-b)^3 &= a^3-a^2b-2a^2b+2ab^2+b^2a-b^3 \\
 (a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3
 \end{aligned}$$

Οι παρακάτω ταυτότητες μπορούν να αποδειχθούν με απλή χρήση επιμεριστικής όμοια με παραπάνω, οπότε αφήνονται στον αναγνώστη.

Άσκηση 4 Να αποδειχθούν οι παρακάτω ταυτότητες:

1. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
2. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
3. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
4. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$ (Ταυτότητα Lagrange)¹

¹Πληροφορίες περί του φυσικομαθηματικού Joseph-Louis Lagrange: https://el.wikipedia.org/wiki/Ζοζέφ_Λουί_Λαγκράνζ