

**Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ) Γ' Λυκείου
Μαθηματικά προσανατολισμού**

Λύσεις



128 Ασκήσεις

9-3-2023

Ασκησόπολις

Στέλιος Μιχαήλογλου

Συναρτήσεις

Θέμα 2ο

26603. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

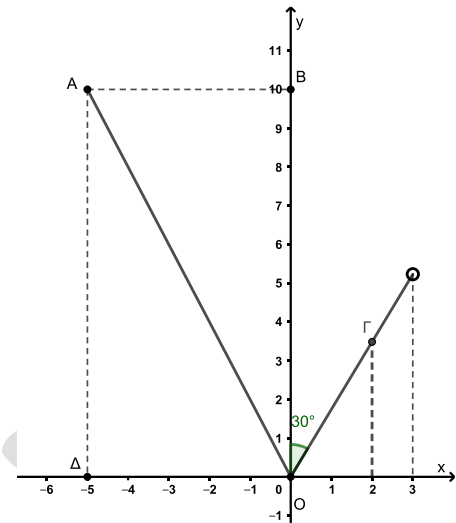
(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 10)

γ) Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Γ;

(Μονάδες 5)



Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της f αποτελείται από τις τετμημένες των σημείων της γραφικής της παράστασης, οπότε $D_f = [-5, 3]$.

Το σύνολο τιμών της f αποτελείται από τις τεταγμένες των σημείων της γραφικής της παράστασης, οπότε $f(A) = [0, 10]$.

β) Το τμήμα OA έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{10-0}{-5-0} = -2$ και εξίσωση $y = -2x$.

Το ΟΓ σχηματίζει γωνία 60° με τον x' , οπότε έχει κλίση $\lambda = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ και εξίσωση $y = \sqrt{3}x$,

επομένως $f(x) = \begin{cases} -2x, & -5 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{3}x, & 0 < x < 3 \end{cases}$.

26637. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \ln x$.

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \cdot g$.

(Μονάδες 9)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$, που ορίσατε στα ερωτήματα (α) και (β).

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Είναι $D_f = [0, +\infty)$ και $D_g = (0, +\infty)$. Είναι $D_f \cap D_g = (0, +\infty) = D_{fg}$ και

$(fg)(x) = \ln x \cdot \sqrt{x}$.

β) Είναι $D_{f/g} = \{x \in D_f \cap D_g / g(x) \neq 0\} = \{x \in (0, +\infty) / \ln x \neq 0\} = \{x \in (0, +\infty) / x \neq 1\} = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$

γ) Για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ είναι $(fg)(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) \Leftrightarrow \ln x \cdot \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{\ln x} \quad x \in (0,1) \cup (1,+\infty) \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{\ln x} \Leftrightarrow \ln^2 x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \pm 1 \Leftrightarrow x = e^{\pm 1}$.

29830. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 10)

β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

i. $f \cdot g$ (Μονάδες 7) ii. $\frac{f}{g}$ (Μονάδες 8)

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $9-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow |x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$, άρα $D_f = [-3,3]$.

Η g ορίζεται όταν $\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$, άρα $D_g = [-2,0) \cup (0,2]$.

β) i. Είναι $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = [-2,0) \cup (0,2]$ και $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{9-x^2} \cdot \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$.

ii. $D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g / g(x) \neq 0\}$

Είναι $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} \neq 0 \Leftrightarrow 4-x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$, άρα

$D_{\frac{f}{g}} = (-2,0) \cup (0,2)$ και $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}} = x \sqrt{\frac{9-x^2}{4-x^2}}$.

Θέμα 4ο

26604. Δυο εταιρείες E1 και E2 δραστηριοποιούνται στο χώρο της γεώτρησης νερού. Η πολιτική των χρεώσεων προς τους πελάτες τους είναι διαφορετική. Η εταιρεία E1 χρεώνει 1500 ευρώ για την εκπόνηση της αρχικής μελέτης και 200 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους μέχρι τα 15 πρώτα μέτρα. Αν δεν βρεθεί νερό μέχρι τα 15 μέτρα, τότε αλλάζει τη χρέωση από 200 σε 250 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους μετά τα 15 πρώτα. Η E2 χρεώνει 300 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους.

α) Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία E1 για γεώτρηση x μέτρων βάθους, να βρείτε:

- Τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)
- Το ποσό που θα χρεώσει η εταιρεία E1 σε πελάτη που χρειάστηκε να φτάσει σε βάθος 12 μέτρων μέχρι να βρει νερό. (Μονάδες 2)
- Αν κάποιος πελάτης ξόδεψε για τη γεώτρησή του 5050 ευρώ, σε ποιο βάθος έφτασε; (Μονάδες 2)

β) Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία E2 για γεώτρηση x μέτρων βάθους, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g . (Μονάδες 3)

γ) Σε ποιο βάθος σταμάτησαν τη γεώτρησή τους δυο γείτονες που συνεργάστηκαν με διαφορετική εταιρεία ο καθένας τους, βρήκαν νερό στο ίδιο βάθος και πλήρωσαν ακριβώς το ίδιο ποσό; (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές της μεταβλητής x (μέτρα βάθους) συμφέρει η επιλογή της εταιρείας E1; (Μονάδες 6)

Λύση

α) i. Αν x m το βάθος τότε για $x \in (0,15]$ είναι $f(x) = 200x + 1500$, ενώ αν $x \in (15,+\infty)$ τότε

αρχικά θα χρεώσει τα 15 μέτρα με κόστος $200 \cdot 15 + 1500 = 4500$ ευρώ και για τα επιπλέον $x - 15$ μέτρα το κόστος θα είναι $(x - 15) \cdot 250 = 250x - 3750$, οπότε το συνολικό κόστος στη περίπτωση αυτή θα είναι

$$f(x) = 4500 + 250x - 3750 = 250x + 750, \text{ άρα } f(x) = \begin{cases} 200x + 1500, & x \in (0, 15] \\ 250x + 750, & x \in (15, +\infty) \end{cases}.$$

ii. $f(12) = 200 \cdot 12 + 1500 = 3900$ ευρώ.

iii. Μέχρι τα 15 μέτρα η χρέωση της εταιρείας είναι 4500 ευρώ, οπότε το βάθος είναι μεγαλύτερο από 15 μέτρα.

Για $x > 15$ είναι $f(x) = 5050 \Leftrightarrow 250x + 750 = 5050 \Leftrightarrow 250x = 4300 \Leftrightarrow x = \frac{4300}{250} = 17,2$ μέτρα.

β) $g(x) = 300x, x > 0$.

γ) Αν $x \in (0, 15]$ τότε $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 200x + 1500 = 300x \Leftrightarrow 100x = 1500 \Leftrightarrow x = 15$ μέτρα, δεκτό.

Αν $x > 15$ τότε $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 250x + 750 = 300x \Leftrightarrow 50x = 750 \Leftrightarrow x = 15$ απορρίπτεται.

δ) Συμφέρει η επιλογή της εταιρείας E1, όταν $f(x) < g(x)$.

Αν $x \in (0, 15]$ τότε $f(x) < g(x) \Leftrightarrow 200x + 1500 < 300x \Leftrightarrow 100x > 1500 \Leftrightarrow x > 15$ απορρίπτεται

Αν $x > 15$ τότε $f(x) < g(x) \Leftrightarrow 250x + 750 < 300x \Leftrightarrow 50x > 750 \Leftrightarrow x > 15$.

Επομένως συμφέρει η E1 όταν τα μέτρα βάθους είναι περισσότερα από 15.

Σύνθεση – Μονοτονία και ακρότατα συνάρτησης

Θέμα 2ο

28300. Έστω μια συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας τη γραφική παράσταση της f να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f ,

(Μονάδες 6)

β) τις τιμές $f(-1)$, $f(2)$ και $f(5)$,

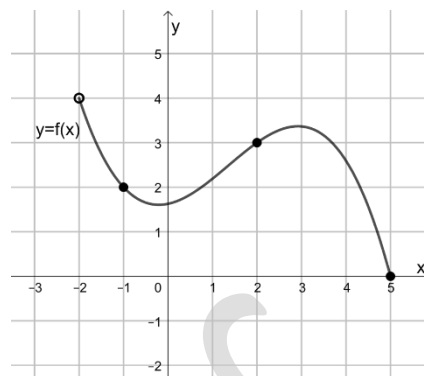
(Μονάδες 6)

γ) το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της f , εφόσον υπάρχουν,

(Μονάδες 7)

δ) την τιμή της σύνθεσης $f \circ f$ στο -1 .

(Μονάδες 6)



Λύση

α) Το πεδίο ορισμού αποτελείται από τις τετμημένες των σημείων της C_f , οπότε $D_f = (-2, 5]$.

β) $f(-1) = 2$, $f(2) = 3$ και $f(5) = 0$.

γ) Η f έχει ολικό ελάχιστο το 0 για $x = 5$ και δεν έχει ολικό μέγιστο.

δ) $(f \circ f)(-1) = f(f(-1)) = f(2) = 3$

28314. Η γραφική παράσταση μιας πολωνυμικής συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, διέρχεται από τα σημεία $A(2, 2)$, $B(-2, 2)$ και $\Gamma(0, -2)$.

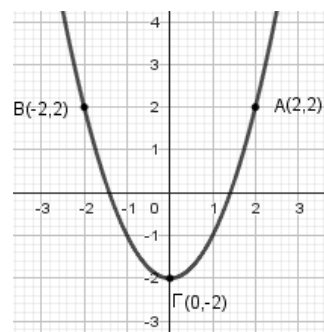
Έστω επίσης η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = |x|$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$, $f(-2)$ και $f(0)$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές $(g \circ f)(2)$, $(g \circ f)(-2)$ και $(g \circ f)(0)$.

(Μονάδες 8)

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται παρακάτω. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g \circ f$. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία A , B , Γ ισχύει ότι $f(2) = 2$, $f(-2) = 2$ και $f(0) = -2$.

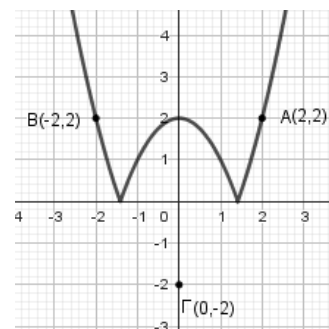
β) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(2) = |2| = 2$, $(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(2) = |2| = 2$,

$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-2) = |-2| = 2$.

γ) Είναι $D_{g \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ και

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = |f(x)|$.

Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα σημεία της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ ή πάνω σε αυτόν και από τα συμμετρικά των σημείων της που βρίσκονται κάτω από τον $x'x$ ως προς αυτόν και φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



29832. Δίνεται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ και $g(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}^*$ και της g το διάστημα $(-1, 1)$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $(f \circ g)(x)$.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$, άρα $D_f = \mathbb{R}^*$.

Η g ορίζεται όταν $\frac{1-x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, άρα $D_g = (-1, 1)$.

β) $D_{f \circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\} = \left\{x \in (-1, 1) / \ln \frac{1-x}{1+x} \neq 0\right\} = (-1, 0) \cup (0, 1)$ γιατί

$$\ln \frac{1-x}{1+x} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} \neq 1 \Leftrightarrow 1-x \neq 1+x \Leftrightarrow 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0.$$

$$\gamma) \text{ Είναι } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{e^{\ln \frac{1-x}{1+x}} + 1}{e^{\ln \frac{1-x}{1+x}} - 1} = \frac{\frac{1-x}{1+x} + 1}{\frac{1-x}{1+x} - 1} = \frac{\frac{1-x+1+x}{1+x}}{\frac{1-x-1-x}{1+x}} = \frac{2}{-2x} = -\frac{1}{x}.$$

Αντίστροφη συνάρτηση

Θέμα 2ο

23196. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την f^{-1} .

(Μονάδες 9)

Έστω $f^{-1}(x) = \ln(x+1), x > -1$.

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, f^{-1} .

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} - 1 < e^{x_2} - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow f$ 1-1, άρα η f αντιστρέφεται.

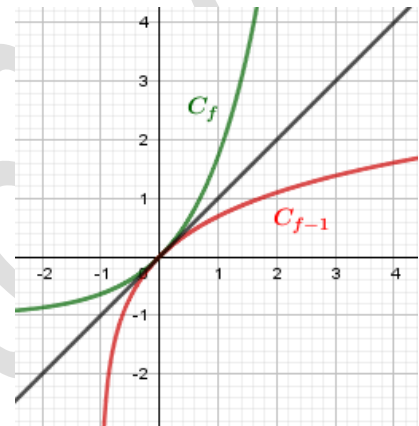
β) Θέτουμε $f(x) = y, y \in \mathbb{R}$ και έχουμε: $e^x - 1 = y \Leftrightarrow e^x = y + 1$ (1).

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^x > 0 \Leftrightarrow y + 1 > 0 \Leftrightarrow y > -1$.

Τότε η (1) γίνεται: $x = \ln(y+1)$, άρα $f^{-1}(y) = \ln(y+1), y > -1$,

οπότε $f^{-1}(x) = \ln(x+1), x > -1$.

γ) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y = e^x$ κατά 1 μονάδα προς τα κάτω. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y = \ln x$ κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά.



23198. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - 1, x \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την f^{-1} .

(Μονάδες 9)

Έστω $f^{-1}(x) = (x+1)^2, x \geq -1$

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} .

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι

$\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow \sqrt{x_1} - 1 < \sqrt{x_2} - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow [0, +\infty) \Rightarrow f$ 1-1, άρα η f αντιστρέφεται.

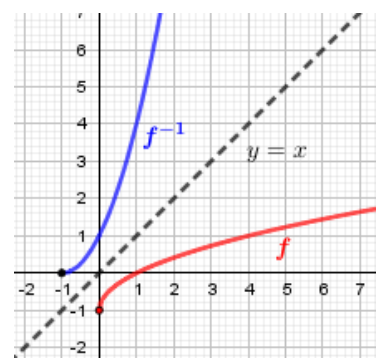
β) Για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = y + 1$ (1).

Είναι $\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -1$, τότε η (1) γίνεται: $x = (y+1)^2 \geq 0$,

άρα $f^{-1}(y) = (y+1)^2, y \geq -1$

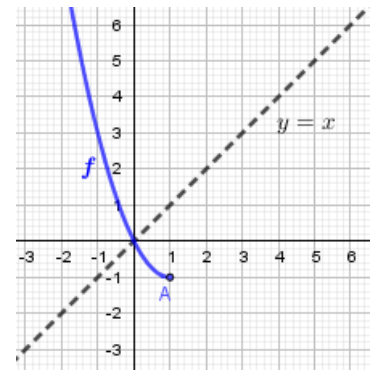
οπότε $f^{-1}(x) = (x+1)^2, x \geq -1$.

γ) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y = \sqrt{x}$ κατά 1 μονάδα προς τα κάτω. Η γραφική παράσταση της f^{-1} προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y = x^2$ κατά 1 μονάδα αριστερά.



23209. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2 - 1$, $x \leq 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$. (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (Μονάδες 8)
- γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να μεταφέρετε στην κόλλα σας ή στο φύλλο απαντήσεων το παρακάτω σχήμα με την γραφική παράσταση της f και το οποίο να συμπληρώσετε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} . (Μονάδες 8)

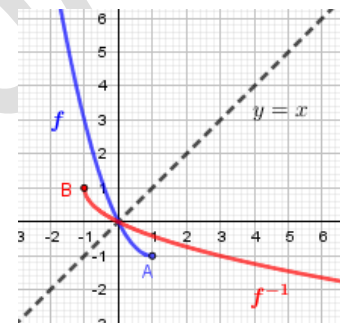


Λύση

α) Για κάθε $x_1 < x_2 \leq 1$ είναι $x_1 - 1 < x_2 - 1 \leq 0 \Rightarrow (x_1 - 1)^2 > (x_2 - 1)^2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 - 1 > (x_2 - 1)^2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f \searrow (-\infty, 1]$

β) Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τα σημεία της παραβολής $y = (x-1)^2 - 1$ με $x \leq 1$. Η παραβολή έχει κορυφή το σημείο $K(1, -1)$ στο οποίο παρουσιάζει ελάχιστο, αφού $y = (x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x + 1 - 1 = x^2 - 2x$, άρα η f έχει σύνολο τιμών το $[-1, +\infty)$.

γ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι η συμμετρική της C_f ως προς την ευθεία $y = x$.



23216. Έστω συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3, 0)$ και $B(0, 8)$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ και για ποιες είναι πάνω από τον $x'x$. (Μονάδες 8)
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) > 0$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Επειδή η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3, 0)$ και $B(0, 8)$, ισχύει ότι $f(3) = 0$ και $f(0) = 8$.

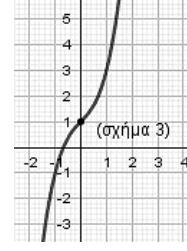
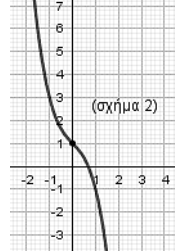
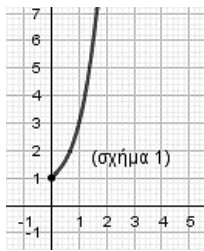
Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Είναι $0 < 3 \Leftrightarrow f(0) < f(3) \Leftrightarrow 8 < 0$ άτοπο. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Η C_f βρίσκεται κάτω από τον $x'x$, όταν $f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(3) \xrightarrow{f \searrow} x > 3$ και πάνω από τον $x'x$, όταν $f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(3) \xrightarrow{f \searrow} x < 3$.

γ) $f(\ln x) > 0 \Leftrightarrow f(\ln x) > f(3) \xrightarrow{f \searrow} \ln x < 3 \Leftrightarrow 0 < x < e^3$

23642. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + x + 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 07)
 β) Ένα από τα παρακάτω σχήματα παριστάνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να βρείτε ποιο είναι και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



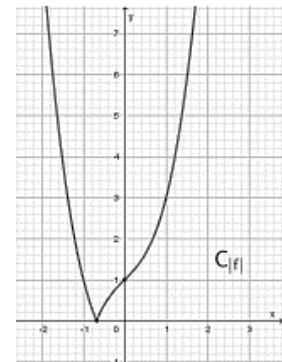
- γ) i. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $|f|$. (Μονάδες 07)
 ii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $|f|$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $|x^3 + x + 1| = 2023$. (Μονάδες 05)

Λύση

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $x_1 + 1 < x_2 + 1$ (1) και $x_1^3 < x_2^3$ (2).
 Από (1) + (2) $\Rightarrow x_1^3 + x_1 + 1 < x_2^3 + x_2 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow \mathbb{R}$.

β) Στο σχήμα 1 η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ οπότε δεν είναι η γραφική παράσταση της f .
 Η συνάρτηση του σχήματος 2 είναι γνησίως φθίνουσα οπότε δεν είναι η γραφική παράσταση της f .
 Επομένως στο σχήμα 3 είναι η C_f .

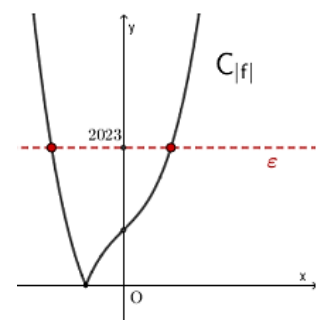
γ) i. Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα σημεία της C_f που δεν είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.



ii. $|x^3 + x + 1| = 2023 \Leftrightarrow |f(x)| = 2023$.

Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης είναι το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της $|f|$ με την ευθεία $y = 2023$.

Κατασκευάζοντας την ευθεία $y = 2023$ στο ίδιο σχήμα με την $|f|$ βλέπουμε ότι έχουν δύο κοινά σημεία, επομένως η εξίσωση $|f(x)| = 2023$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.



24130. Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \sqrt{x-1} + 3$, $x \geq 1$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$.

(Μονάδες 07)

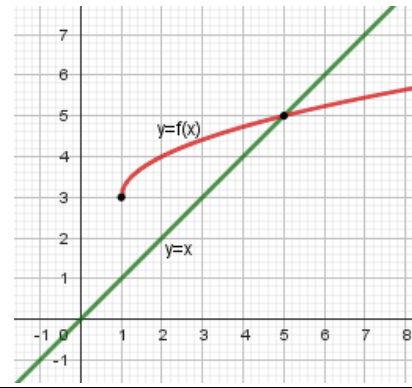
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών καθώς και την αντιστροφή της f .

(Μονάδες 10)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f καθώς και η διχοτόμος $y=x$ της γωνίας xOy .

Αφού μεταφέρετε το σχέδιο στην κόλλα σας, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f^{-1} και με βάση το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f , f^{-1} .

(Μονάδες 08)



Λύση

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, είναι $x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1 - 1} < \sqrt{x_2 - 1} \Leftrightarrow$

$\sqrt{x_1 - 1} + 3 < \sqrt{x_2 - 1} + 3 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, άρα είναι και $1-1$.

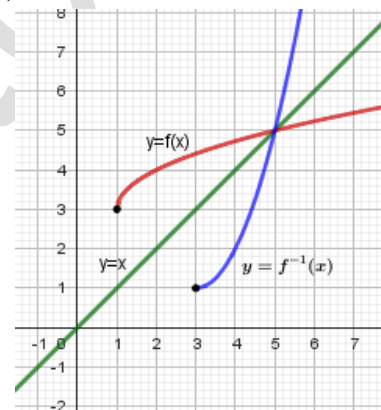
β) Για κάθε $x \geq 1$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 3 = y \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = y-3$ (1).

Είναι $y-3 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 3$, τότε η (1) γίνεται: $x-1 = (y-3)^2 \Leftrightarrow x = (y-3)^2 + 1$

Είναι $x \geq 1 \Leftrightarrow (y-3)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow (y-3)^2 \geq 0$ ισχύει. Άρα η f έχει σύνολο τιμών το $f(A) = [3, +\infty)$.

Είναι $f^{-1}(y) = (y-3)^2 + 1$, $y \geq 3$ άρα $f^{-1}(x) = (x-3)^2 + 1$, $x \geq 3$.

γ) Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι η συμμετρική της f ως προς την ευθεία $y=x$. Στο σχήμα βλέπουμε ότι κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f , f^{-1} είναι το $(5, 5)$.



24569. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x}}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $D_f = [0, 1]$.

(Μονάδες 05)

β) i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι " $1-1$ ".

(Μονάδες 10)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x)) = 0$, $x \in [0, 1]$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ και $1-\sqrt{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} \leq 1 \Leftrightarrow 1-x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$, άρα $D_f = [0, 1]$.

β) i. Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, 1]$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι $\sqrt{1-\sqrt{1-x_1}} = \sqrt{1-\sqrt{1-x_2}} \Leftrightarrow$

$1-\sqrt{1-x_1} = 1-\sqrt{1-x_2} \Leftrightarrow \sqrt{1-x_1} = \sqrt{1-x_2} \Leftrightarrow 1-x_1 = 1-x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ $1-1$.

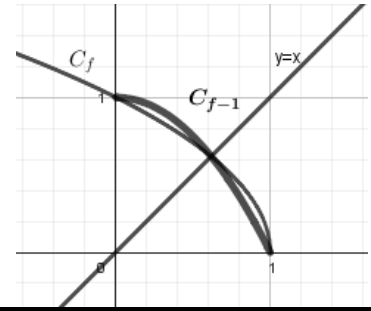
ii. $f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(f(x)) = f(0) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(0) \Leftrightarrow x = 0$

24703. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $x \in (-\infty, 1]$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} . (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} . (Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και ένα τμήμα της γραφικής παράστασης της f^{-1} . Να μεταφέρετε στο φύλλο απαντήσεων το παραπάνω σχήμα και το οποίο να συμπληρώσετε με την υπόλοιπη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} . (Μονάδες 7)



Λύση

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι $\sqrt{1-x_1} = \sqrt{1-x_2} \Leftrightarrow 1-x_1 = 1-x_2 \Leftrightarrow -x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα η f είναι 1-1 και υπάρχει η αντίστροφη της f^{-1} .

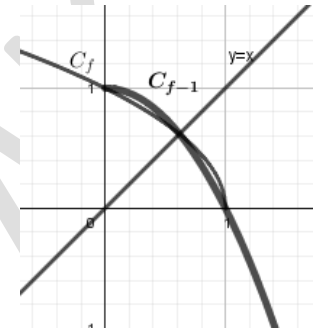
β) Για κάθε $x \in (-\infty, 1]$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{1-x} = y$.

Για $y \geq 0$ είναι $1-x = y^2 \Leftrightarrow 1-y^2 = x$.

Είναι $x \leq 1 \Leftrightarrow 1-y^2 \leq 1 \Leftrightarrow y^2 \geq 0$ ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Άρα $f^{-1}(y) = 1-y^2$, $y \geq 0$, οπότε $f^{-1}(x) = 1-x^2$, $x \geq 0$

γ) Επειδή οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, προκύπτει το διπλανό σχήμα.



24991. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -2\ln x + 1$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} . (Μονάδες 09)

γ) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = 1 - \ln x^2$. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες και στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f = g$.

(Μονάδες 08)

Λύση

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι

$-2\ln x_1 + 1 = -2\ln x_2 + 1 \Leftrightarrow -2\ln x_1 = -2\ln x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 = \ln x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

β) Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow -2\ln x + 1 = y \Leftrightarrow -2\ln x = y - 1 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1-y}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1-y}{2}}$.

Άρα $f^{-1}(y) = e^{\frac{1-y}{2}}$, $y \in \mathbb{R}$, οπότε $f^{-1}(x) = e^{\frac{1-x}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Η συνάρτηση g ορίζεται όταν $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ άρα $A_g = \mathbb{R}^*$.

Επειδή $A_f \neq A_g$ οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες.

όταν όμως $x \in (0, +\infty)$ τότε $g(x) = 1 - \ln x^2 = 1 - 2\ln x = f(x)$.

25124. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = -x^3$, $x \in (-\infty, 0]$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} . (Μονάδες 7)

Λύση

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 < x_2$ είναι $x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow -x_1^3 > -x_2^3 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f \searrow (-\infty, 0]$.

β) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Για κάθε $x \leq 0$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow -x^3 = y \Leftrightarrow x^3 = -y$ (1).

Είναι $x \leq 0 \Leftrightarrow x^3 \leq 0 \Leftrightarrow -y \leq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$, άρα $f(A) = [0, +\infty) = D_{f^{-1}}$.

γ) Η (1) γίνεται $x = -\sqrt[3]{y}$, άρα $f^{-1}(y) = -\sqrt[3]{y}$, $y \geq 0$, οπότε $f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x}$, $x \geq 0$.

26602. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ και $g(x) = x - 2$.

α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h , με $h(x) = |g(x)|$. (Μονάδες 7)

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις f και h . (Μονάδες 10)

Λύση

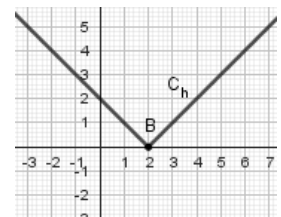
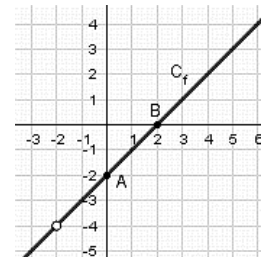
α) Η f ορίζεται όταν $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$, άρα $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$. Επειδή $D_g = \mathbb{R} \neq D_f$ οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες.

β) Για $x \neq -2$ είναι $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = x - 2 = g(x)$.

Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τα σημεία της ευθείας $y = x - 2$ εκτός του σημείου $(-2, -4)$.

Για $x = 0$ είναι $y = -2$ και για $y = 0$ είναι $0 = x - 2 \Leftrightarrow x = 2$, άρα η C_f τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(0, -2)$ και $B(2, 0)$.

Η γραφική παράσταση της h αποτελείται από τα σημεία της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ ή πάνω σε αυτόν και από τα συμμετρικά ως προς τον $x'x$, των σημείων της που βρίσκονται κάτω από αυτόν.



γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -2)$ και $(-2, +\infty)$.

Η h είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -2)$, $(-2, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$. Η f δεν έχει ακρότατα, ενώ η h έχει ελάχιστο το 0 για $x = 2$.

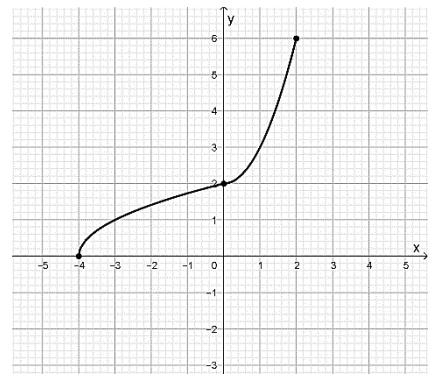
27277. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης μιας συνάρτησης f . Με τη βοήθεια του σχήματος να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f^{-1}(f(6))$. (Μονάδες 8)

γ) Στο σύστημα αξόνων που ακολουθεί να χαράξετε την γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 7)



Λύση

α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $[-4, 2]$ και σύνολο τιμών το $[0, 6]$.

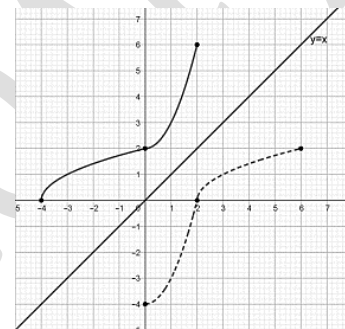
Όμως $D_{f^{-1}} = f(A)$, οπότε η f έχει σύνολο τιμών το $[-4, 2]$ και $f^{-1}(A) = D_f$, άρα $D_f = [0, 6]$.

β) Έστω $f(2) = \alpha$ τότε $f^{-1}(\alpha) = 2 \Leftrightarrow f^{-1}(\alpha) = f^{-1}(0) \Leftrightarrow \alpha = 0$, δηλαδή

$$f(2) = 0 \text{ και}$$

$$f^{-1}(f(6)) = 6$$

γ) Σχεδιάζουμε τη συμμετρική της $C_{f^{-1}}$ ως προς την ευθεία $y = x$.



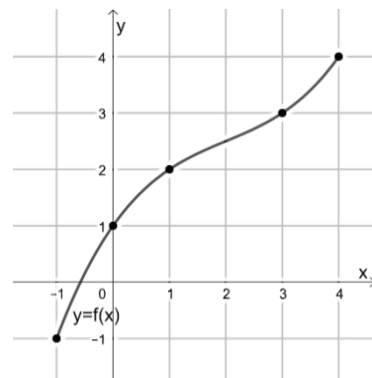
28299. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A = [-1, 4]$ και με γραφική παράσταση C_f που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Μελετώντας τη C_f :

α) να δικαιολογήσετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f , (Μονάδες 8)

β) να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = x$, (Μονάδες 8)

γ) να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f^{-1} . (Μονάδες 9)

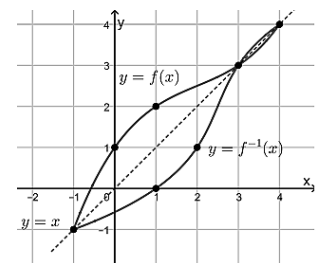


Λύση

α) Επειδή κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη C_f το πολύ μία φορά, η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

β) Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων την ευθεία $y=x$ και βλέπουμε ότι τα κοινά τους σημεία είναι τα $(-1, -1)$, $(3, 3)$ και $(4, 4)$.

γ) Σχεδιάζουμε τη συμμετρική της C_f ως προς την ευθεία $y = x$.



31528. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - e^{-x})$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

(Μονάδες 14)

β) Να βρείτε την f^{-1} .

(Μονάδες 11)

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $1 - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$, άρα $D_f = (0, +\infty)$.

β) Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow \ln(1 - e^{-x}) = y \Leftrightarrow 1 - e^{-x} = e^y \Leftrightarrow 1 - e^y = e^{-x} \quad (1)$

Πρέπει $1 - e^y > 0 \Leftrightarrow e^y < 1 \Leftrightarrow y < 0$, τότε η (1) γίνεται: $-x = \ln(1 - e^y) \Leftrightarrow x = -\ln(1 - e^y)$.

Είναι $x > 0 \Leftrightarrow -\ln(1 - e^y) > 0 \Leftrightarrow \ln(1 - e^y) < 0 \Leftrightarrow 1 - e^y < 1 \Leftrightarrow e^y > 0$ ισχύει.

Άρα $f^{-1}(y) = -\ln(1 - e^y)$, $y < 0$, οπότε $f^{-1}(x) = -\ln(1 - e^x)$, $x < 0$.

32695. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$, σύνολο τιμών το $[-\frac{1}{2}, 1)$ και τύπο

$$f(x) = 1 - \frac{3}{\sqrt{x} + 2}.$$

Δίνεται επίσης η συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $[-\frac{1}{2}, 1)$, σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ και τύπο

$$g(x) = \left(\frac{1+2x}{1-x}\right)^2. \text{ Με δεδομένο ότι η συνάρτηση } f \text{ είναι 1-1,}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε x που ανήκει στο $[0, 1)$. (Μονάδες 07)

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f , C_g των συναρτήσεων f , g αντίστοιχα δεν έχουν κοινά σημεία. (Μονάδες 08)

Λύση

α) Για κάθε $x \in [0, +\infty)$, $y \in [-\frac{1}{2}, 1)$, είναι $f(x) = y \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{\sqrt{x} + 2} = y \Leftrightarrow 1 - y = \frac{3}{\sqrt{x} + 2} \Leftrightarrow$

$$\sqrt{x} + 2 = \frac{3}{1-y} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{1-y} - 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3-2+2y}{1-y} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1+2y}{1-y} \Leftrightarrow x = \left(\frac{1+2y}{1-y}\right)^2, \text{ άρα}$$

$$f^{-1}(y) = \left(\frac{1+2y}{1-y}\right)^2, y \in [-\frac{1}{2}, 1), \text{ οπότε } f^{-1}(x) = \left(\frac{1+2x}{1-x}\right)^2, x \in [-\frac{1}{2}, 1). \text{ Επομένως } f^{-1} = g.$$

$$\beta) 0 \leq x < 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{x} + 2 < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{x} + 2} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$1 < \frac{3}{\sqrt{x} + 2} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -1 > -\frac{3}{\sqrt{x} + 2} \geq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 - 1 > 1 - \frac{3}{\sqrt{x} + 2} \geq 1 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq f(x) < 0.$$

Για κάθε $x \in [0, 1)$ είναι $g(x) > 0$.

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ είναι αδύνατη για $x \in D_f \cap D_g = [0, 1)$.

Επειδή για κάθε $x \in [0, 1)$ είναι $f(x) < 0$ και $g(x) > 0$, η εξίσωση $f(x) = g(x)$ είναι αδύνατη.

Θέμα 4ο

23200. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $A(1, \ln 2)$.

α) Να βρείτε τη μονοτονία της. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό αριθμό α ισχύει $f(\alpha \ln \alpha) \leq f(\ln \alpha)$. (Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x-1} + \ln x) = \ln 2$. (Μονάδες 6)

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + (3 - \ln 2)x - 3, x \in \mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση g δεν αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Επειδή η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $A(1, \ln 2)$ είναι $f(0) = 3$ και $f(1) = \ln 2$.

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη και $0 < 1$ με $f(0) > f(1)$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) $f(\alpha \ln \alpha) \leq f(\ln \alpha) \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} \alpha \ln \alpha \geq \ln \alpha \Leftrightarrow \alpha \ln \alpha - \ln \alpha \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1) \ln \alpha \geq 0$

Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\alpha - 1 < 0, \ln \alpha < 0$, οπότε $(\alpha - 1) \ln \alpha > 0$.

Αν $\alpha \geq 1$ τότε $\alpha - 1 \geq 0, \ln \alpha \geq 0$, οπότε $(\alpha - 1) \ln \alpha \geq 0$, οπότε για κάθε $\alpha > 0$ είναι $(\alpha - 1) \ln \alpha \geq 0$.

γ) $f(e^{x-1} + \ln x) = \ln 2 \Leftrightarrow f(e^{x-1} + \ln x) = f(1) \stackrel{f \searrow \Rightarrow 1-1}{\Leftrightarrow} e^{x-1} + \ln x = 1 \quad (1)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^{x-1} + \ln x, x > 0$.

Για κάθε $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$ είναι $x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow e^{x_1-1} < e^{x_2-1}$ και $\ln x_1 < \ln x_2$, οπότε και $e^{x_1-1} + \ln x_1 < e^{x_2-1} + \ln x_2 \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2) \Leftrightarrow h \nearrow (0, +\infty) \Rightarrow h \text{ 1-1.}$

Η (1) γίνεται: $h(x) = h(1) \stackrel{h \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} x = 1$.

δ) Είναι $g(0) = f(0) + (3 - \ln 2) \cdot 0 - 3 = 3 - 3 = 0$ και $g(1) = f(1) + 3 - \ln 2 - 3 = \ln 2 - \ln 2 = 0$.

Επειδή $g(0) = g(1)$ η g δεν είναι 1-1, οπότε δεν αντιστρέφεται.

Όριο συνάρτησης στο x_0

Θέμα 2ο

24768. Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπους $f(x) = x^2 - x + 1$ και $g(x) = \sqrt{4x - 3}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq \frac{3}{4}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $h = g \circ f$. (Μονάδες 9)

γ) Αν $h(x) = |2x - 1|$ είναι η σύνθεση του ερωτήματος β), να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 1}{\sqrt{x + 1} - 1}$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 4 \geq 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 \geq 0$ ισχύει.

β) Η g ορίζεται όταν $4x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{4}$, άρα $A_g = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

Είναι $A_h = \{x \in A_f / f(x) \in A_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} / f(x) \geq \frac{3}{4}\right\} = \mathbb{R}$ και

$$h(x) = g(f(x)) = \sqrt{4(x^2 - x + 1) - 3} = \sqrt{4x^2 - 4x + 4 - 3} = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} \Leftrightarrow h(x) = \sqrt{(2x - 1)^2} = |2x - 1|$$

γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} (2x - 1) = -1$ άρα $2x - 1 < 0$ για τιμές του x πολύ κοντά στο μηδέν, άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 1}{\sqrt{x + 1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x + 1 - 1}{\sqrt{x + 1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x(\sqrt{x + 1} + 1)}{(\sqrt{x + 1} - 1)(\sqrt{x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x(\sqrt{x + 1} + 1)}{(\sqrt{x + 1})^2 - 1^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x(\sqrt{x + 1} + 1)}{x + 1 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x(\sqrt{x + 1} + 1)}{x} = -4$$

28477. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = e^{3x+2}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x^2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g . (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε την συνάρτηση $g \circ f$. (Μονάδες 08)

γ) Αν $g(f(x)) = 6x + 4$, $x \in \mathbb{R}$ τότε να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x) - \eta\mu^2 x - 4}{x}$. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Η g ορίζεται όταν $x^2 > 0 \neq x \neq 0$, άρα $D_g = \mathbb{R}^*$.

β) Είναι $D_{g \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} / e^{3x+2} \neq 0\} = \mathbb{R}$ και

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln(e^{3x+2})^2 = \ln e^{6x+4} = 6x + 4, x \in \mathbb{R}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x) - \eta\mu^2 x - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + 4 - \eta\mu^2 x - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(6 + \eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 6.$$

Μη πεπερασμένο όριο στο x_0

Θέμα 2ο

23217. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x-1)$ και $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

(Μονάδες 7)

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε

i. το πεδίο ορισμού της $f \cdot g$ (Μονάδες 4)

ii. το $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$. (Μονάδες 6)

Λύση

α) i. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) \stackrel{x-1=u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 1^+ \Rightarrow u \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow 0^+}} \ln u = -\infty$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \stackrel{x-1=u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 1^+ \Rightarrow u \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow 0^-}} \frac{1}{u} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} \stackrel{x-1=u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 1^+ \Rightarrow u \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow 0^+}} \frac{1}{u} = +\infty.$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

β) i. $A_{f \cdot g} = A_f \cap A_g = (1, +\infty) \cap \mathbb{R} - \{1\} = (1, +\infty)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\ln(x-1) \cdot \frac{1}{x-1} \right] = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$

Όριο στο άπειρο

Θέμα 2ο

23314. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τεταγμένη -2 .

και τον άξονα $y'y$ σε ένα μόνο σημείο με τεταγμένη 2 .

α) Από την γραφική παράσταση ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να προσδιορίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

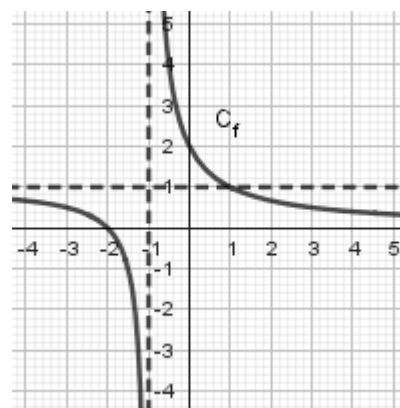
(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 6)

ii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \ln(f(x))$ (Μονάδες 7)

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) i) Στο σχήμα βλέπουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$, άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

ii) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$

iii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 0$

β) Θετούμε $f(x) = u$.

i. Είναι $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-2, -1)$, άρα $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{f(x)} = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{1}{u} = -\infty$

ii. Είναι $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x < -2$, άρα $\lim_{x \rightarrow -2^-} \ln(f(x)) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$

23641. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2) < f(x)$. (Μονάδες 08)

β) Αν $\alpha^2 < \alpha$, τότε να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left([f(\alpha^2 - \alpha) - f(0)] x \right) = -\infty$. (Μονάδες 09)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x - 1) = f(0)$. (Μονάδες 08)

Λύση

α) $f(x^2) < f(x) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x(x-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

β) Είναι $\alpha^2 < \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha < 0 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha^2 - \alpha) < f(0) \Leftrightarrow f(\alpha^2 - \alpha) - f(0) < 0$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left([f(\alpha^2 - \alpha) - f(0)] x \right) = -\infty$$

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ είναι και 1-1, οπότε:

$$f(e^x - 1) = f(0) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Συνέχεια Συνάρτησης

Θέμα 2ο

24767. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 13)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} . (Μονάδες 12)

Λύση

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} + 1 < e^{x_2} + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e^{x_1} + 1} > \frac{1}{e^{x_2} + 1} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f \searrow \mathbb{R}$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x + 1} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + 1} = 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = (0, 1)$.

β) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\frac{1}{e^x + 1} = y \Leftrightarrow e^x + 1 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{y} - 1 \Leftrightarrow x = \ln \frac{1-y}{y}$.

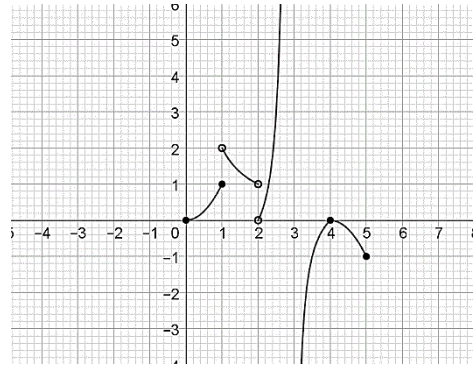
Άρα $f^{-1}(y) = \ln \frac{1-y}{y}$, $y \in (0, 1)$, οπότε $f^{-1}(x) = \ln \frac{1-x}{x}$, $x \in (0, 1)$.

25749. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $D_f = [0, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 5]$, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο μόνο σημεία, με συντεταγμένες $(0, 0)$ και $(4, 0)$. Επίσης, δίνεται ότι $f(1) = 1$. Με βάση το παρακάτω σχήμα:

α) να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

β) να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) να βρείτε τα παρακάτω όρια



i. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 10)

Λύση

α) Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = f(1) \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, η f δεν είναι συνεχής στο $x = 1$.

β) Η f είναι συνεχής στο $(0, 1)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = f(1)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$.

γ) i. Είναι $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$.

ii. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για τιμές του x κοντά στο 4, είναι $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

31548. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(x) - 2x| \leq (x-1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι :

α) $f(1) = 2$. (Μονάδες 10)

β) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. (Μονάδες 10)

γ) η f είναι συνεχής στο 1. (Μονάδες 5)

Λύση

α) Για $x = 1$ είναι $|f(1) - 2| \leq (1-1)^2 \Leftrightarrow |f(1) - 2| \leq 0 \Leftrightarrow f(1) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 2$.

β) $|f(x) - 2x| \leq (x-1)^2 \Leftrightarrow -(x-1)^2 \leq f(x) - 2x \leq (x-1)^2 \Leftrightarrow 2x - (x-1)^2 \leq f(x) \leq (x-1)^2 + 2x$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - (x-1)^2) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + (x-1)^2) = 2$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

γ) Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, η f είναι συνεχής στο 1.

Θέμα 3ο

24761. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2023 - \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2022$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2022$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι και στο $x = 0$, άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(2023 - \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \alpha \Leftrightarrow 2023 - 1 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 2022$$

β) Για κάθε $x > 0$ είναι $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \geq -\eta\mu x \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq -\frac{\eta\mu x}{x} \leq -\frac{1}{x} \Leftrightarrow$

$$2023 + \frac{1}{x} \leq 2023 - \frac{\eta\mu x}{x} \leq 2023 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow 2023 + \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 2023 - \frac{1}{x}.$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2023 + \frac{1}{x} \right) = 2023$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2023 - \frac{1}{x} \right) = 2023$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2023.$$

γ) Επειδή $f(0) = 2022$, η $x = 0$ είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = 2022$.

Για $x \neq 0$ είναι $f(x) = 2022 \Leftrightarrow 2023 - \frac{\eta\mu x}{x} = 2022 \Leftrightarrow 1 = \frac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow \eta\mu x = x$ που είναι αδύνατη αφού για κάθε $x \neq 0$ είναι $|\eta\mu x| < |x| \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x$.

28684. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \kappa$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.

Αν επιπλέον ισχύει ότι $xf(x) \leq \eta\mu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε

α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x} = 2$.

(Μονάδες 04)

β) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$.

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε το $f(0)$.

(Μονάδες 04)

δ) Να ελέγξετε την αλήθεια του παρακάτω ισχυρισμού:

$$\left| f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \right| = -f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \text{ κοντά στο } 0$$

Να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

(Μονάδες 08)

Λύση

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\eta\mu 2x}{2x} \stackrel{2x=u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} 2 \frac{\eta\mu u}{u} = 2$$

β, γ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι και στο $x=0$, άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$.

$$\text{Για κάθε } x > 0 \text{ είναι } f(x) \leq \frac{\eta\mu 2x}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 2x}{x} \Leftrightarrow f(0) \leq 2 \quad (1)$$

Για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) \geq \frac{\eta\mu 2x}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu 2x}{x} \Leftrightarrow f(0) \geq 2$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $f(0) = 2$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 2$.

δ) Επειδή $f(0) = 2 > 0$, κοντά στο 0 είναι $f(x) > 0$. Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ είναι $\varepsilon\varphi x < 0$, και $\frac{\varepsilon\varphi x}{x} > 0$,

οπότε $f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x} > 0$. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\varepsilon\varphi x > 0$, και $\frac{\varepsilon\varphi x}{x} > 0$, οπότε $f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x} > 0$.

Επομένως για κάθε x κοντά στο 0 είναι $f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x} > 0$, οπότε $\left|f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x}\right| = f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x}$ και ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

Θεωρήματα Συνέχειας

Θέμα 2ο

29834. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{9x^2 + 16} - \frac{5}{2} \ln(8x + 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $f(0) > 0$ και $f(1) < 0$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $\begin{cases} 9x^2 + 16 \geq 0 \\ 8x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ x > -\frac{1}{8} \end{cases}$, άρα $D_f = \left(-\frac{1}{8}, +\infty\right)$.

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

β) $f(0) = \sqrt{16} - \frac{5}{2} \ln 1 = 4 > 0$,

$f(1) = \sqrt{9 + 16} - \frac{5}{2} \ln(8 + 1) = 5 - \frac{5}{2} \ln 9 = \frac{5(1 - \ln 9)}{2} < 0$ γιατί

$1 - \ln 9 < 0 \Leftrightarrow 1 < \ln 9 \Leftrightarrow \ln e < \ln 9 \Leftrightarrow e < 9$ ισχύει.

γ) Είναι $f(0)f(1) < 0$ και f συνεχής στο $[0, 1]$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Θέμα 4ο

23106. Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$ και η συνεχής συνάρτηση f , ορισμένη στο $[0, \pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, τέτοιες ώστε:

$(g \circ f)(x) = |\sin x|$, για κάθε $x \in [0, \pi]$.

α) i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| = |\eta\mu x|$.

(Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(Μονάδες 03)

β) Να βρείτε την συνάρτηση f .

(Μονάδες 09)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h : (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{1}{f(x) - x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του

προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.

(Μονάδες 07)

Λύση

$$\alpha) \text{ i. } (\text{gof})(x) = |\sin x| \Leftrightarrow \sqrt{1 - f^2(x)} = |\sin x| \Leftrightarrow 1 - f^2(x) = \sin^2 x \Leftrightarrow f^2(x) = 1 - \sin^2 x \Leftrightarrow f^2(x) = \eta\mu^2 x \Leftrightarrow |f(x)| = |\eta\mu x| \quad (1)$$

$$\text{ii. } f(x) = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \Leftrightarrow |\eta\mu x| = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \pi$$

β) Για κάθε $x \in (0, \pi)$ είναι $f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Επειδή $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$ είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$ και επειδή $\eta\mu x > 0$ στο $(0, \pi)$

η σχέση (1) γίνεται $f(x) = \eta\mu x$, $x \in (0, \pi)$. Επομένως $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0 \text{ ή } \pi \end{cases} = \eta\mu x, x \in [0, \pi]$.

γ) Γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα για κάθε $x \in [0, \pi]$ είναι $\eta\mu x \leq x \Leftrightarrow \eta\mu x - x \leq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta\mu x - x} \stackrel{\eta\mu x - x = u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \Rightarrow u \rightarrow 0^- \\ u \rightarrow 0^- \Rightarrow}} \frac{1}{u} = -\infty$$

26640. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^3 + 2x$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 5)

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι: $2x_1 < 2x_2$ (1) $\Leftrightarrow e^{2x_1} < e^{2x_2}$ (2) και $x_1^3 < x_2^3$ (3).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι $f(x_1) < f(x_2)$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} + x^3 + 2x) = 0 - \infty - \infty = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} + x^3 + 2x) = +\infty + \infty + \infty = +\infty.$$

Επειδή η f είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(f^{-1}(x_1)) < f(f^{-1}(x_2)) \Leftrightarrow f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2) \Leftrightarrow f^{-1} \nearrow \mathbb{R}$.

$$\delta) f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow x = f(0) = 1.$$

Ορισμός παραγώγου

Θέμα 2ο

24756. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 2$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu x}$. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, άρα $f'(0) = 2$.

β) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ είναι και συνεχής σε αυτό άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$.

γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{\eta \mu x}{x}} = \frac{2}{1} = 2$.

24757. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ σχηματίζει με τον xx' γωνία 45° .

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$. (Μονάδες 8)

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,1)$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Επειδή η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ σχηματίζει με τον xx' γωνία 45° είναι $f'(0) = \tan 45^\circ = 1$.

β) ε: $y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y - 1 = x \Leftrightarrow y = x + 1$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1$.

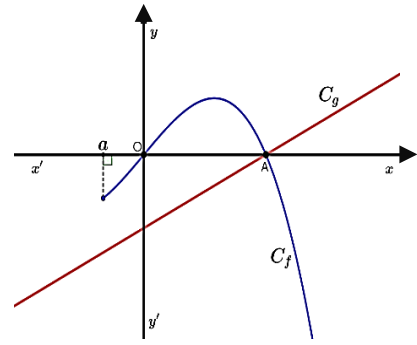
25234. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση

$f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και την συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Οι

γραφικές παραστάσεις C_f , C_g των συναρτήσεων f, g

αντίστοιχα, φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Γνωρίζουμε ότι:

- οι C_f , C_g τέμνονται στο σημείο $A(1, 0)$.
- η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η C_f δεν έχει άλλα κοινά σημεία με τον άξονα x εκτός από τα σημεία O και A .



α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{g(x)}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, να υπολογίσετε το $f'(0)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)}{f(x)}$.

(Μονάδες 9)

Λύση

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{x-1} \stackrel{x-1=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{2}{u} = -\infty$$

$$\beta) \text{ Είναι } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

Επειδή οι C_f , C_g τέμνονται στο σημείο $A(1, 0)$, είναι $f(1) = g(1) = 0$

$$\gamma) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[g(x) \frac{1}{f(x)} \right] = -\frac{1}{2}(-\infty) = +\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \text{ και } f(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (a, 0).$$

25762. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x, & x \leq 0 \\ \eta \mu x, & x > 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $f'(0) = 1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0, 0)$.

(Μονάδες 7)

Λύση

$$\alpha) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 + x) = 0 = f(0), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta \mu x = 0.$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

$$\beta) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(-x + 1)}{x} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x}{x} = 1.$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 1$.

γ) $\varepsilon: y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = x$.

26712. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού, η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0, 4]$, και της παραγώγου της, f' .
α) Να βρείτε την κλίση της συνάρτησης f στο $x_0 = 2$.

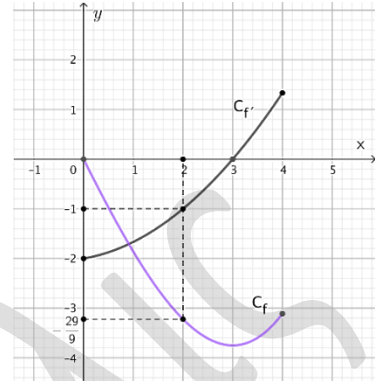
(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 2$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 09)



Λύση

α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι το σημείο $(2, -1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f' , επομένως η κλίση της συνάρτησης f στο $x_0 = 2$ είναι το $f'(2) = -1$.

β) (ε): $y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y + \frac{29}{9} = -x + 2 \Leftrightarrow y = -x - \frac{11}{9}$

γ) Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$, ισχύει ότι $\varepsilon\varphi\omega = f'(2) = -1 \Leftrightarrow \omega = 135^\circ$.

Κανόνες παραγώγισης

Θέμα 2ο

26630. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x & , \text{αν } x < 0 \\ 1 & , \text{αν } x = 0 \\ \sin x & , \text{αν } x > 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

(Μονάδες 9)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης, της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x = \frac{\pi}{2}$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 1$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $\varphi'(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \varphi'(0) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 1}{x} = 0. \text{ Επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}, \text{ η } f \text{ δεν είναι}$$

παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

γ) Είναι $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 0$. Για $x > 0$ είναι $f'(x) = -\eta\mu x$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y = -x + \frac{\pi}{2}$

27315. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{αν } x < 2 \\ \alpha x^2 - 4, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα πλευρικά όρια της f στο $x_0 = 2$, δηλαδή τα $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$. (Μονάδες 07)

γ) Αν $\alpha = 2$, να βρείτε όπου ορίζεται την παράγωγο της συνάρτησης f . (Μονάδες 06)

Λύση

α) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\alpha x^2 - 4) = 4\alpha - 4.$

β) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ όταν $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 4\alpha - 4 = 4 \Leftrightarrow 4\alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = 2$

γ) Για $\alpha = 2$ είναι $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2, & \text{αν } x < 2 \\ 2x^2 - 4, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$.

Για $x < 2$ είναι $f'(x) = 1$ και για $x > 2$ είναι $f'(x) = 4x$. Στο $x = 2$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2}{x - 2} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 4 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)(x+2)}{x-2} = 8.$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 2$.

28302. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = -2$ και $f'(0) = 0$. Έστω επίσης οι συναρτήσεις $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = -x$ και $gof: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή $(gof)(0)$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την παράγωγο $g'(-2)$. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την παράγωγο της gof στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $g \circ f$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-2) = -(-2) = 2.$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g'(x) = -1$, οπότε $g'(-2) = -1.$

γ) Είναι $(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)$ και $(g \circ f)'(0) = g'(f(0))f'(0) = g'(-2) \cdot 0 = 0$

Θέμα 4ο

23375. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. (Μονάδες 06)

β) Αφού πρώτα δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 13)

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x + f(x)) > x$, $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 06)

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)'}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \frac{\frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \frac{-\frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1}}}{(\sqrt{x^2 + 1} - x)\sqrt{x^2 + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) < 0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right) \right] = +\infty$$

$$\text{άρα θέτοντας } \sqrt{x^2 + 1} - x = u, \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = 0 \text{ άρα θέτοντας } \sqrt{x^2 + 1} - x = u, \text{ είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty. \text{ Επειδή η } f \text{ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα έχει σύνολο τιμών το}$$

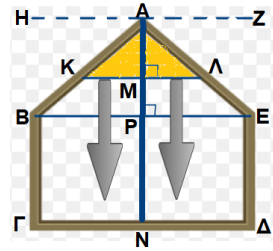
$$f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}, \text{ οπότε η } f^{-1} \text{ έχει πεδίο ορισμού το } \mathbb{R}.$$

$$\gamma) f^{-1}(x + f(x)) > x \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(x + f(x))) < f(x) \Leftrightarrow x + f(x) < f(x) \Leftrightarrow x < 0.$$

Ρυθμός μεταβολής

Θέμα 4ο

25257. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα παράθυρο το οποίο αποτελείται από το ορθογώνιο ΒΓΔΕ και το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΕ. Είναι $AP = 0,8 \text{ m}$, $BE = 1,6 \text{ m}$, $AM = x \text{ m}$, $BΓ = 1 \text{ m}$. Το ορατό κάτω μέρος ΚΛ μιας ηλεκτροκίνητης σίτας, κατεβαίνει παράλληλα προς την αρχική της θέση ΗΖ, με σταθερό ρυθμό, ώστε το Μ να διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΝ (με $AM \neq 0$). Αν $E = E(x)$ είναι το εμβαδό του παραθύρου που καλύπτει η σίτα, τότε:



α) Να αποδείξετε ότι για το εμβαδό E , ισχύει

$$E(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \in \left(0, \frac{4}{5}\right) \\ \frac{8}{5}x - \frac{16}{25}, & \text{αν } x \in \left[\frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right] \end{cases}, \text{ σε } \text{m}^2. \quad (\text{Μονάδες } 08)$$

β) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E ως προς x , όταν $x = \frac{4}{5} \text{ m}$, είναι ίσος με

$$E'\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{5} \text{ m}^2 / \text{m}. \quad (\text{Μονάδες } 09)$$

γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ως προς τον χρόνο t , τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει $x = \frac{4}{5} \text{ m}$, αν δίνεται επιπλέον ότι $x'(t) = 0,08 \text{ m/s}$ για κάθε $t \geq 0$. (Μονάδες 08)

Λύση

α) Επειδή $KL \parallel BE$, το τρίγωνο AKL είναι ισοσκελές και αυτό, οπότε το AM εκτός από ύψος είναι και διάμεσος του τριγώνου.

Τα τρίγωνα AML και APE είναι όμοια, οπότε $\frac{AM}{AP} = \frac{ML}{PE} \Leftrightarrow \frac{x}{0,8} = \frac{ML}{0,8} \Leftrightarrow ML = x$

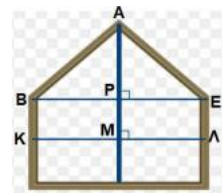
Όταν το M κινείται εσωτερικά του τμήματος AP , δηλαδή όταν $0 < x < 0,8 = \frac{4}{5}$, τότε

$$E(x) = (AKL) = \frac{1}{2}(KL)(AM) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (ML)x = x^2.$$

Όταν το M κινείται στο τμήμα PN , δηλαδή όταν $\frac{4}{5} \leq x \leq 1,6 = \frac{8}{5}$, τότε

$$E(x) = (ABE) + (BKLE) = \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 0,8 + (BE)(PM) \Leftrightarrow$$

$$E(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{4}{5} + 1,6 \cdot \left(x - 0,8\right) = \frac{16}{25} + \frac{8}{5} \cdot \left(x - \frac{4}{5}\right) = \frac{16}{25} + \frac{8x}{5} - \frac{32}{25} = \frac{8x}{5} - \frac{16}{25}.$$



$$\text{Επομένως } E(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \in \left(0, \frac{4}{5}\right) \\ \frac{8}{5}x - \frac{16}{25}, & \text{αν } x \in \left[\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right] \end{cases}.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}^-} \frac{E(x) - E\left(\frac{4}{5}\right)}{x - \frac{4}{5}} = \lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}^-} \frac{x^2 - \left(\frac{8}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{16}{25}\right)}{x - \frac{4}{5}} = \lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}^-} \frac{x^2 - \frac{16}{25}}{x - \frac{4}{5}} = \lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}^-} \frac{\left(x - \frac{4}{5}\right)\left(x + \frac{4}{5}\right)}{x - \frac{4}{5}} = \frac{8}{5},$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}^+} \frac{E(x) - E\left(\frac{4}{5}\right)}{x - \frac{4}{5}} = \lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}^+} \frac{\frac{8x}{5} - \frac{16}{25} - \frac{16}{25}}{x - \frac{4}{5}} = \lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}^+} \frac{\frac{8x}{5} - \frac{32}{25}}{x - \frac{4}{5}} = \lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}^+} \frac{\frac{8}{5} \left(x - \frac{4}{5} \right)}{x - \frac{4}{5}} = \frac{8}{5}.$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}^+} \frac{E(x) - E\left(\frac{4}{5}\right)}{x - \frac{4}{5}} = \lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}^+} \frac{E(x) - E\left(\frac{4}{5}\right)}{x - \frac{4}{5}} = \frac{8}{5}, \text{ είναι } E'\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{5} \text{ m}^2 / \text{m}$$

γ) Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία $x = \frac{4}{5} \text{ m}$, δηλαδή $x(t_0) = \frac{4}{5} \text{ m}$, τότε $E'(x(t_0)) = \frac{8}{5} \text{ m}^2 / \text{m}$

Είναι $(E(x(t)))' = E'(x(t))x'(t) \Leftrightarrow (E \circ x)'(t) = E'(x(t)) \cdot 0,08$ και τη χρονική στιγμή t_0 :

$$(E \circ x)'(t_0) = E'(x(t_0)) \cdot 0,08 = E'(x(t_0)) \cdot \frac{8}{100} = \frac{8}{5} \cdot \frac{2}{25} = \frac{16}{125} \text{ m}^2 / \text{m}.$$

28685.α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + xe^x = 3e^2$, $x \in (0, +\infty)$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 2$.

(Μονάδες 08)

β) Ένα κινητό M ξεκινά από το σημείο $N(0,1)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^x$, $x \geq 0$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec .

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του τριγώνου OAM , όπου

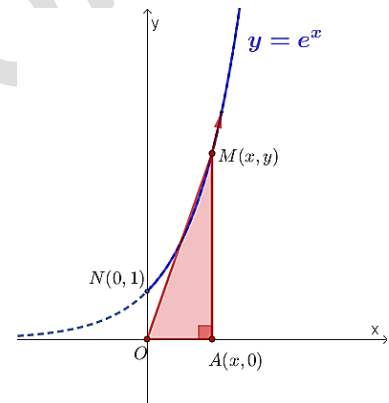
$$O(0,0), A(x,0) \text{ και } M(x,y) \text{ είναι } E(x) = \frac{1}{2}xe^x, x \geq 0.$$

(Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε τη θέση του κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E είναι

$$3e^2 \text{ cm}^2 / \text{sec}.$$

(Μονάδες 10)



Λύση

α) Έστω $f(x) = e^x + xe^x - 3e^2$, $x > 0$. Παρατηρούμε ότι $f(2) = e^2 + 2e^2 - 3e^2 = 0$.

Για κάθε $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$ (1) είναι $e^{x_1} < e^{x_2}$ (2). Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (1), (2)

$$\text{προκύπτει: } x_1 e^{x_1} < x_2 e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 e^{x_1} - 3e^2 < x_2 e^{x_2} - 3e^2 \text{ (3).}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (2), (3) προκύπτει: $e^{x_1} + x_1 e^{x_1} - 3e^2 < e^{x_2} + x_2 e^{x_2} - 3e^2 \Leftrightarrow$

$f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα είναι και 1-1.

$$\text{Είναι } e^x + xe^x = 3e^2 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(2) \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\text{β) i. } (OAM) = E(x) = \frac{1}{2}(AO)(AM) = \frac{1}{2}xe^x, x \geq 0$$

ii. Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $x'(t_0) = 2 \text{ cm/sec}$, $E'(t_0) = 3e^2 \text{ cm}^2 / \text{sec}$.

Είναι $E(t) = \frac{1}{2}x(t)e^{x(t)}$, $t \geq 0$. Είναι $E'(t) = \frac{1}{2}x'(t)e^{x(t)} + \frac{1}{2}x(t)e^{x(t)}x'(t)$ και τη χρονική στιγμή t_0 :

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}x'(t_0)e^{x(t_0)} + \frac{1}{2}x(t_0)e^{x(t_0)}x'(t_0) \Leftrightarrow 3e^2 = \frac{1}{2} \cdot 2e^{x(t_0)} + \frac{1}{2}x(t_0)e^{x(t_0)} \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$e^{x(t_0)} + x(t_0)e^{x(t_0)} = 3e^2 \stackrel{\alpha) \text{ σκέλος}}{\Leftrightarrow} x(t_0) = 2. \text{ Επομένως τη χρονική στιγμή } t_0 \text{ το κινητό βρίσκεται στο σημείο } M(2, e^2).$$

Θεώρημα Rolle**Θέμα 2ο**

31643. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 9x$, $x \in [1, 2]$.

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1, 2]$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 9x^2 - 2x + 9 = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 2x + 9$. Είναι $f(1) = 1 - 3 - 1 + 9 = 6$, $f(2) = 16 - 24 - 4 + 18 = 6$, δηλαδή $f(1) = f(2)$, οπότε εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[1, 2]$.

β) Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, η εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 9x^2 - 2x + 9 = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Θεώρημα Μέσης Τιμής**Θέμα 2ο**

24283. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{αν } x \in [-1, 2] \\ x - 1, & \text{αν } x \in (2, 5] \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 2$. (Μονάδες 09)

γ) Να εξετάσετε ποιες από τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, ικανοποιεί η συνάρτηση f στο διάστημα $[-1, 5]$. (Μονάδες 06)

Λύση

α) Σε καθένα από τα διαστήματα $[-1, 2]$, $(2, 5]$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Στο $x_0 = 2$ είναι $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3) = 1 = f(2)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 1) = 1$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, οπότε η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$ και $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 1 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} = 1$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 2$.

γ) Επειδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 2$, δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 5)$.

Η f είναι συνεχής στο $[-1, 5]$.

Θέμα 4ο

29150. Η συνάρτηση $x(t) = (t-2)(t-1)^2$ (σε m), για κάθε χρονική στιγμή t (σε sec), καθορίζει τη θέση ενός κινητού Α, που κινήθηκε πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 3 sec.

- α) i. Να βρείτε πότε το κινητό Α είχε ταχύτητα μηδέν. (Μονάδες 05)
 ii. Να βρείτε τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το κινητό Α κινήθηκε προς τα δεξιά και αυτά που κινήθηκε προς τα αριστερά. (Μονάδες 04)
 β) Να βρείτε το συνολικό διάστημα S που διένυσε το κινητό Α. (Μονάδες 10)
 γ) Να αποδείξετε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του κινητού Α, από τη χρονική στιγμή 1 sec έως τη χρονική στιγμή $\frac{5}{3}$ sec, υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα του Α ήταν ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το Α στο διάστημα αυτό. (Μονάδες 06)

Λύση

α) i. Η ταχύτητα του κινητού είναι $v(t) = x'(t) = (t-1)^2 + 2(t-2)(t-1) = (t-1)(t-1+2t-4)$
 $v(t) = (t-1)(3t-5) = 0 \Leftrightarrow (t-1)(3t-5) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ ή
 $\left(3t-5=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{3}\right)$.

t	0	1	5/3	3	
x'(t)	+	0	-	0	+

ii. Το κινητό κινήθηκε δεξιά τα χρονικά διαστήματα $[0,1)$, $\left(\frac{5}{3}, 3\right]$ και

αριστερά στο χρονικό διάστημα $\left(1, \frac{5}{3}\right)$.

β) Στο χρονικό διάστημα από $t=0$ έως $t=1$ sec το κινητό διανύει διάστημα

$$S_1 = |x(1) - x(0)| = |0 - (0-2)(0-1)^2| = 2 \text{ m.}$$

Στο χρονικό διάστημα από $t=1$ έως $t=5/3$ sec το κινητό διανύει διάστημα

$$S_2 = \left| x\left(\frac{5}{3}\right) - x(1) \right| = \left| \left(\frac{5}{3}-2\right)\left(\frac{5}{3}-1\right)^2 - 0 \right| = \left| \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{4}{9} \right| = \frac{4}{27} \text{ m.}$$

Στο χρονικό διάστημα από $t=5/3$ έως $t=3$ sec το κινητό διανύει διάστημα

$$S_3 = \left| x(3) - x\left(\frac{5}{3}\right) \right| = \left| (3-2)(3-1)^2 - \left(\frac{5}{3}-2\right)\left(\frac{5}{3}-1\right)^2 \right| = \left| 4 + \frac{4}{27} \right| = \frac{112}{27} \text{ m.}$$

Το συνολικό διάστημα που διανύει το κινητό είναι $S = S_1 + S_2 + S_3 = 2 + \frac{4}{27} + \frac{112}{27} = \frac{170}{27} \text{ m.}$

γ) Η μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα $\left[1, \frac{5}{3}\right]$ είναι $\bar{v} = \frac{S_2}{\frac{5}{3}-1} = \frac{\frac{4}{27}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{9}$.

Για τη συνάρτηση x εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $\left[1, \frac{5}{3}\right]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον μία

χρονική στιγμή $t_1 \in \left(1, \frac{5}{3}\right)$ τέτοια, ώστε $x'(t_1) = \frac{x\left(\frac{5}{3}\right) - x(1)}{\frac{5}{3}-1} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow x'(t_1) = \bar{v}$.

Σταθερή συνάρτηση

Θέμα 4ο

23199. Έστω $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε $x > 1$ να ισχύει

$$xf'(x) = \frac{1}{2} \text{ και } f(e) = 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - \ln x$, $x > 1$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f . (Μονάδες 9)

$$\text{Έστω } f(x) = \sqrt{\ln x}, x > 1.$$

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-e, 0)$ και $B(e, 1)$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο B . (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει $\frac{1}{x+1} < f^2(x+1) - f^2(x) < \frac{1}{x}$. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = 2f(x)f'(x) - \frac{1}{x}. \text{ Όμως για κάθε } x > 1 \text{ είναι } xf'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x)f'(x) = \frac{1}{2x}, \text{ άρα}$$

$$g'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow g(x) = c, c \in \mathbb{R}, x > 1$$

$$\text{Είναι } g(e) = f^2(e) - \ln e = 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow c = 0, \text{ άρα για κάθε } x > 1 \text{ είναι } g(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - \ln x = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = \ln x \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{\ln x}.$$

Για κάθε $x > 1$ είναι $xf'(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $f(e) = 1 > 0$, οπότε για κάθε $x > 1$ είναι $f(x) > 0$, άρα $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

β) Η ευθεία AB έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB} = \frac{1-0}{e+e} = \frac{1}{2e}$.

Η ευθεία AB εφάπτεται της C_f στο B αν και μόνο αν $f'(e) = \lambda_{AB} = \frac{1}{2e}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} (\ln x)' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.

Είναι $f'(e) = \frac{1}{2e\sqrt{\ln e}} = \frac{1}{2e}$, άρα η ευθεία AB εφάπτεται της C_f στο B .

γ) Για κάθε $x > 1$ είναι $\frac{1}{x+1} < f^2(x+1) - f^2(x) < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$.

Για τη συνάρτηση $\varphi(x) = \ln x$, $x > 1$, ισχύει το θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[x, x+1]$, οπότε

$$\text{υπάρχει } \xi \in (x, x+1) \text{ τέτοιο, ώστε } \varphi'(\xi) = \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \ln(x+1) - \ln x.$$

$$\text{Είναι } x < \xi < x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$$

Μονοτονία συνάρτησης

Θέμα 2ο

23937. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο σημείο της $A(1, f(1))$.

(Μονάδες 09)

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$. Επειδή η f είναι συνεχής έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο A έχει εξίσωση: $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = 4x - 4 \Leftrightarrow y = 4x - 3$.

25764. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}$.

α) Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+1) = 0 = f(0)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 = 0$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β) Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) = 3x^2 > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = \frac{1}{x+1} > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

27082. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^3 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

(Μονάδες 09)

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[2, +\infty)$ είναι το διάστημα $[-5, +\infty)$.

(Μονάδες 09)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

(Μονάδες 07)

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = 3(x-1)^2 - 3 = 3(x^2 - 2x + 1 - 1) = 3x(x-2).$$

Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ ή $x \geq 2$.

Για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ και η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[2, +\infty)$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από αυτά. Για κάθε $x \in (0, 2)$ είναι $f'(x) < 0$ και η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

β) Είναι $f(2) = (2-1)^3 - 6 = -5$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1)^3 - 3x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$$f([2, +\infty)) = [f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [-5, +\infty).$$

γ) Επειδή το 0 περιέχεται στο $f([2, +\infty)) = [-5, +\infty)$, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

29211. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $x < 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (Μονάδες 08)

γ) i. Να αποδείξετε ότι η f είναι “1-1”. (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f , την f^{-1} . (Μονάδες 07)

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με $f'(x) = \frac{2}{x^3}$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = (-\infty, 0)$ έχει σύνολο τιμών το

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)\right) = (-\infty, 1).$$

γ) i. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι και 1-1.

ii. Για κάθε $x < 0$ και $y < 1$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = y \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = 1 - y \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{1-y} \Leftrightarrow$

$$|x| = \sqrt{\frac{1}{1-y}} \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} -x = \sqrt{\frac{1}{1-y}} \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{1}{1-y}}, \text{ άρα } f^{-1}(y) = -\sqrt{\frac{1}{1-y}}, y < 1, \text{ οπότε } f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1}{1-x}}, x < 1.$$

Θέμα 4ο

23376. Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $x \in \mathbb{R}$ και
- $g(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

Αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = g \circ f$. (Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι:

- i. η συνάρτηση h είναι περιττή. (Μονάδες 04)
- ii. η συνάρτηση h είναι “1-1”. (Μονάδες 06)

γ) Να λυθεί η εξίσωση $h(x-1) + h\left(\ln \frac{1}{x}\right) = 0, x > 0$. (Μονάδες 08)

Λύση

α) Επειδή η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $f(x) > 0, x \in \mathbb{R}$. Είναι $A_h = \{x \in A_f / f(x) \in A_g\} = \{x \in \mathbb{R} / f(x) > 0\} = \mathbb{R}$ και

$$h(x) = g(f(x)) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x).$$

β) i. Για κάθε $x \in A_h = \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$ και $h(-x) = -h(x) \Leftrightarrow \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) = -\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) \Leftrightarrow$

$$\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) + \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0 \Leftrightarrow \ln[(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln[(\sqrt{x^2 + 1})^2 - x^2] = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \ln 1 = 0 \text{ ισχύει. Άρα η } h \text{ είναι περιττή.}$$

ii. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)'}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \frac{\frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \frac{-\cancel{(\sqrt{x^2 + 1} - x)}}{\sqrt{x^2 + 1}(\sqrt{x^2 + 1} - x)} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h'(x) < 0$, άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1.

$$h(x-1) + h\left(\ln \frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow h(x-1) = -h\left(\ln \frac{1}{x}\right) \stackrel{h \text{ περιττή}}{\Leftrightarrow} h(x-1) = h\left(-\ln \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow h(x-1) = h(-\ln 1 + \ln x) \Leftrightarrow$$

$h(x-1) = h(\ln x) \stackrel{h \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} x-1 = \ln x \Leftrightarrow x=1$ αφού για κάθε $x > 0$ είναι $\ln x \leq x-1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$.

26605. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $f^2(x) - 5 = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(2) = 3$

α) Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 4)

ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

β) Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = x^2 - \sin x$, με $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. (Μονάδες 7)

ii. Η εξίσωση $f^2(x) = 5 + \sin x$ έχει ακριβώς δυο ρίζες, αντίθετες μεταξύ τους, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $(-\pi, \pi)$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f^2(x) - 5 = x^2 \Leftrightarrow f^2(x) = x^2 + 5 > 0 \Leftrightarrow f^2(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0$.

ii. Επειδή η f είναι συνεχής και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $f(2) = 3 > 0$ είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $f^2(x) = x^2 + 5 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$.

β) i. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με $g'(x) = 2x + \eta\mu x$ και $g''(x) = 2 + \sigma\upsilon\nu x$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$, άρα $g''(x) > 0$

και g' γνησίως αύξουσα.

Για κάθε $x < 0$ είναι $g'(x) < g'(0) = 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) > g'(0) = 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g''	+		
g'	-	0	+
g	↘		↗

ii. $f^2(x) = 5 + \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow x^2 + 5 = 5 + \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow x^2 - \sigma\upsilon\nu x = 0$.

Είναι $g(-\pi) = \pi^2 + 1 > 0$, $g(0) = -1 < 0$ και $g(\pi) = \pi^2 - 1 > 0$.

Επειδή η g είναι συνεχής στα διαστήματα $[-\pi, 0]$, $[0, \pi]$ και $g(-\pi)g(0) < 0$, $g(\pi)g(0) < 0$, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_1 \in (-\pi, 0)$ και $x_2 \in (0, \pi)$ τέτοια, ώστε $g(x_1) = 0$, $g(x_2) = 0$.

Επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$, τα x_1, x_2 είναι οι μοναδικές της ρίζες.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-x \in \mathbb{R}$ και $g(-x) = (-x)^2 - \sigma\upsilon\nu(-x) = x^2 - \sigma\upsilon\nu x = g(x)$, δηλαδή η g είναι άρτια. Είναι $g(-x_1) = g(x_1) = 0$, οπότε ρίζα της g είναι και η $-x_1 \in (0, \pi)$. Όμως το x_2 είναι η μοναδική ρίζα της g στο διάστημα αυτό, άρα $x_2 = -x_1$.

27319. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x-2)e^x + (x-1)\ln x$, $x \in (0, +\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 στο διάστημα $(1, 2)$. (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση f' (Μον. 3) και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι οριζόντια (Μον. 8).

(Μονάδες 11)

γ) Ένας μαθητής σχεδίασε σε ένα λογισμικό τη γραφική παράσταση της f και διαπίστωσε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον $x'x$ στο σημείο x_0 του α) ερωτήματος αλλά και σε ένα ακόμη σημείο. Βοηθήστε το μαθητή να αποδείξει ότι πράγματι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακριβώς σημεία. (Μονάδες 09)

Λύση

α) Είναι $f(1) = -e < 0$, $f(2) = \ln 2 > 0$.

Επειδή $f(1)f(2) < 0$ και η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = e^x + (x-2)e^x + \ln x + \frac{x-1}{x} = e^x(x-1) + \ln x + \frac{x-1}{x}$.

Για κάθε $x > 1$ είναι $e^x(x-1) > 0$, $\ln x > 0$, $\frac{x-1}{x} > 0$, οπότε $f'(x) > 0$.

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $e^x(x-1) < 0$, $\ln x < 0$, $\frac{x-1}{x} < 0$, οπότε $f'(x) < 0$.

Επειδή $f'(1) = 0$ η $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το $x = 1$ και στο σημείο αυτό η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Επειδή για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) < 0$ και η f είναι συνεχής στο $(0, 1]$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x-2)e^x + (x-1)\ln x] = +\infty$ γιατί $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-2)e^x = -2$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)\ln x = +\infty$.

Στο διάστημα $\Delta = (0, 1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta) = [-e, +\infty)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $f(\Delta)$, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ .

Επειδή $x_0 \in (1, +\infty)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της f στο $(1, +\infty)$. Τελικά η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες.

27455. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 2 \\ e^{x-2} - 2, & x \geq 2 \end{cases}$ και

$g: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία:

i. τη συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. τη συνάρτηση g και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 14)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g για κάθε $x \neq 2$.

(Μονάδες 04)

γ) Δίνεται ο ισχυρισμός:

«Αν $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.»

Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)

Λύση

α) i. Είναι $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (e^{x-2} - 2) = -1 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ επομένως η f είναι συνεχής στο $x = 2$.

Για κάθε $x < 2$ είναι $f(x) = -1$ και είναι σταθερή.

Για κάθε $x > 2$ είναι $f'(x) = e^{x-2} > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \geq 2$ είναι $f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow f(x) \geq -1$. Επειδή για κάθε $x < 2$ είναι $f(x) = -1$, είναι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = -x + 2$.

Για κάθε $x < 2$ είναι $g'(x) > 0$ και για κάθε $x > 2$ είναι $g'(x) < 0$, επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -\infty$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -\infty$

Στο διάστημα $(-\infty, 2]$ η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$g((-\infty, 2]) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), g(2)\right] = (-\infty, -1]$. Στο διάστημα $[2, +\infty)$ η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα

οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g([2, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(2)\right] = (-\infty, -1]$.

Η g έχει σύνολο τιμών το $g(\mathbb{R}) = (-\infty, -1]$.

β) Από το σύνολο τιμών της g προκύπτει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) \leq -1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq -1$, ισχύει ότι $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \neq 2$.

γ) Ο ισχυρισμός είναι ψευδής γιατί ενώ κοντά στο 2 είναι $f(x) > g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -1$.

32524. Έστω η συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{e}{x} - \ln x$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e(1-x) = x \ln x$ έχει ακριβώς μία λύση την $x=1$. (Μονάδες 06)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x}{e - x \ln x - ex}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 06)

ii. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$. (Μονάδες 07)

Λύση

α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = -\frac{e}{x^2} - \frac{1}{x}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) < 0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Για κάθε $x > 0$ είναι

$$e(1-x) = x \ln x \Leftrightarrow e - ex = x \ln x \Leftrightarrow \frac{e}{x} - e = \ln x \Leftrightarrow \frac{e}{x} - \ln x = e \Leftrightarrow g(x) = g(1) \Leftrightarrow x = 1$$

γ) i. Η f ορίζεται όταν $x > 0$ και $e - x \ln x - ex \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, άρα $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

ii. Για κάθε $x > 1 \Leftrightarrow g(x) < g(1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x}{e - x \ln x - ex} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x+1)}{x \left(\frac{e}{x} - \ln x - e \right)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x+1) \frac{1}{g(x) - g(1)} \right] = 2(-\infty) = -\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (g(x) - g(1)) = 0 \text{ και για κάθε } x > 1 \Leftrightarrow g(x) < g(1).$$

Τοπικά ακρότατα συνάρτησης

Θέμα 2ο

23197. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε δυο διαφορετικούς αριθμούς α , β ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$. Κατόπιν να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται. (Μονάδες 9)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση, με τη βοήθεια της παραγώγου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση C_f της f . (Μονάδες 8)

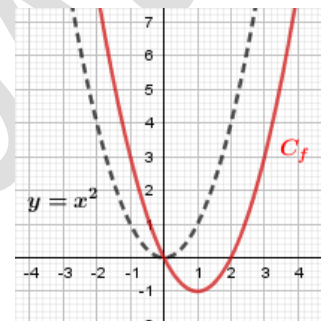
Λύση

α) Είναι $f(0) = 0$ και $f(2) = 0$ άρα $f(0) = f(2)$.

Επειδή $f(0) = f(2)$ η f δεν είναι 1-1 οπότε δεν αντιστρέφεται.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x - 2$. Για κάθε $x < 1$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1) = -1$.

γ) Είναι $f(x) = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$. Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y = x^2$ κατά 1 μονάδα δεξιά και 1 μονάδα προς τα κάτω.



25761. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(\ln x - 1) + 1$, $x > 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $x \ln x + 1 = x$. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \ln x - 1 + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = \ln x$.

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1) = 1 \cdot (-1) + 1 = 0$.

β) $x \ln x + 1 = x \Leftrightarrow x \ln x - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x(\ln x - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \Leftrightarrow x = 1$ γιατί για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f(x) > f(1) = 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $f(x) > f(1) = 0$.

32390. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + 2$, $x \in [0, 2]$.

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα εσωτερικά σημεία του $[0, 2]$ στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη και οι ρίζες της f' .

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με $f'(x) = 4x^3 - 4$.

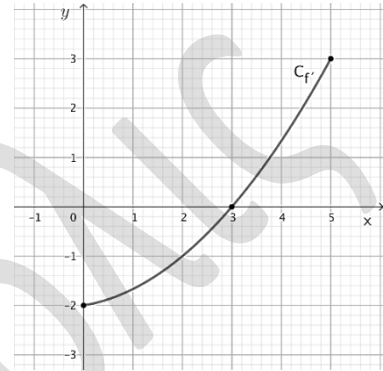
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4 = 0 \Leftrightarrow 4x^3 = 4 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$. Το 1 είναι κρίσιμο σημείο της f .

β) Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $f'(x) < 0$ και η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (1,2)$ είναι $f'(x) > 0$ και η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Στο διάστημα $\Delta_1 = [0,1]$ η f έχει σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = [f(1), f(0)] = [-1, 2]$ και στο διάστημα $\Delta_2 = [1, 2]$ η f έχει σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = [f(1), f(2)] = [-1, 10]$.

Η f έχει σύνολο τιμών το $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [-1, 10]$, οπότε έχει ελάχιστο το -1 για $x = 1$ και μέγιστο το 10 για $x = 2$.

26707. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0, 5]$.



α) Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$;

(Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3, 5]$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το είδος ακροτάτου που παρουσιάζει η f στο $x_0 = 3$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 09)

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της f' τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(3, 0)$, άρα για κάθε $x \in [0, 5]$ είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

β) Για κάθε $x \in (0, 3)$ είναι $f'(x) < 0$ και η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (3, 5)$ είναι $f'(x) > 0$ και η f είναι συνεχής στο $[3, 5]$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

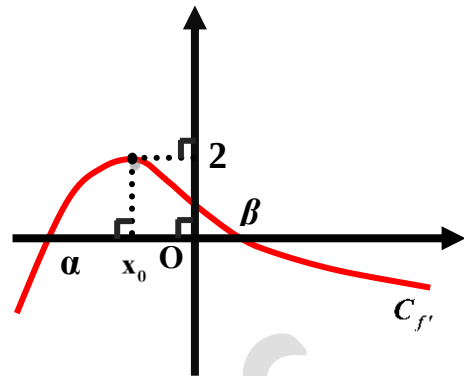
γ) Η f έχει ελάχιστο στο $x_0 = 3$, αφού είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3, 5]$.

Θέμα 4ο

23210. Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.

Γνωρίζουμε ότι:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$
- τα α, β είναι οι τετμημένες των μοναδικών δύο σημείων στα οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.
- $f(\alpha) < 0, f(\beta) > 0.$
- η γραφική παράσταση της $f'(x)$ παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση x_0 .



α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η $f(x)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f(x+1) - f(x) \leq 2$. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Για κάθε $x < \alpha$ ή $x > \beta$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στα $(-\infty, \alpha], [\beta, +\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα αυτά. Για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ είναι $f'(x) > 0$ και η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει τοπικό ελάχιστο για $x = \alpha$ το $f(\alpha)$ και τοπικό μέγιστο για $x = \beta$ το $f(\beta)$.

β) Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, \alpha]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = [f(\alpha), +\infty)$. Επειδή $f(\alpha) < 0, f(\beta) > 0$, το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f(\Delta_2)$, οπότε υπάρχει μοναδικό, λόγω μονοτονίας, x_2 στο εσωτερικό του Δ_2 τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$.

Στο διάστημα $\Delta_3 = [\beta, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_3) = (-\infty, f(\beta)]$. Επειδή $f(\beta) > 0$, το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f(\Delta_3)$, οπότε υπάρχει μοναδικό, λόγω μονοτονίας, x_3 στο εσωτερικό του Δ_3 τέτοιο, ώστε $f(x_3) = 0$.

Τελικά η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες.

γ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[x, x+1]$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x).$$

Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f' έχει μέγιστο το 2 για $x = x_0$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) \leq 2$.

Επομένως και $f'(\xi) \leq 2 \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) \leq 2$.

23311. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο με άθροισμα καθέτων πλευρών ίσο με 1. Αν η μία κάθετη πλευρά του έχει μήκος x , τότε:

α) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει την υποτείνουσα του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 07)

γ) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή του ύψους $υ$ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου

είναι ίση με $\frac{\sqrt{2}}{4}$, όταν $x = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 07)

δ) Αν θ η οξεία γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά x , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x(t_0) = \frac{1}{2}$, δεδομένου ότι η πλευρά x αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $0,1 \text{ m/sec}$. (Μονάδες 05)

Λύση

α) Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ στο οποίο $AB = x$, $A\Gamma = y$ με $x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$.

$$\text{Είναι } E(x) = (AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} x(1-x) = \frac{1}{2} (x - x^2).$$

$$\text{Είναι } x > 0, y > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1, \text{ άρα } x \in (0, 1).$$

$$\text{Η } E \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (0, 1) \text{ με } E'(x) = \frac{1}{2} (1 - 2x).$$

$$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} (1 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 2x \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}.$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ είναι $E'(x) > 0$ και για κάθε $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ είναι $E'(x) < 0$. Επειδή η E είναι συνεχής

στο $(0, 1)$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

$$\text{Η } E \text{ έχει μέγιστο για } x = \frac{1}{2} \text{ το } E\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}.$$

β) Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = x^2 + (1-x)^2 = x^2 + 1 - 2x + x^2 \Leftrightarrow$

$$B\Gamma^2 = 2x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow B\Gamma = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}. \text{ Έστω } B\Gamma(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}, x \in (0, 1).$$

Η συνάρτηση $B\Gamma$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$B\Gamma'(x) = \frac{(2x^2 - 2x + 1)'}{2\sqrt{2x^2 - 2x + 1}} = \frac{4x - 2}{2\sqrt{2x^2 - 2x + 1}} = \frac{2(2x - 1)}{2\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}.$$

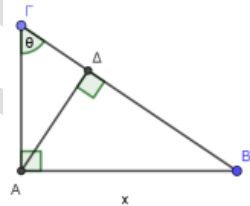
$$\text{Είναι } B\Gamma'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(2x - 1)}{2\sqrt{2x^2 - 2x + 1}} \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ είναι $B\Gamma'(x) < 0$ και για κάθε $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ είναι $B\Gamma'(x) > 0$. Επειδή η $B\Gamma$ είναι

συνεχής στο $(0, 1)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

$$\text{Η υποτείνουσα } B\Gamma \text{ γίνεται ελάχιστη για } x = \frac{1}{2} \text{ με τιμή } B\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

γ) Έστω $AD = υ$ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου. Τότε



$$E = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot v \Leftrightarrow v = \frac{2E}{B\Gamma}.$$

Επειδή η E έχει μέγιστο το $E\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$ ισχύει ότι $2E(x) \leq \frac{1}{4}$ (1) και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \frac{1}{2}$.

Επειδή η $B\Gamma$ έχει ελάχιστο το $B\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ισχύει ότι $B\Gamma(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{B\Gamma(x)} \leq \frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{B\Gamma(x)} \leq \sqrt{2}$ (2)

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \frac{1}{2}$. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (1), (2) προκύπτει ότι

$$\frac{2E(x)}{B\Gamma(x)} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow v \leq \frac{\sqrt{2}}{4}. \text{ Οπότε η μέγιστη τιμή του ύψους } v \text{ είναι } \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ για } x = \frac{1}{2}.$$

δ) Είναι $\Gamma = \theta$ και $\varepsilon\theta = \frac{A\Gamma}{AB}$, άρα $\varepsilon\theta(t) = \frac{x(t)}{1-x(t)}$.

Είναι $(\varepsilon\theta(t))' = \left(\frac{x(t)}{1-x(t)}\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2\theta(t)} \theta'(t) = \frac{x'(t)(1-x(t)) - x(t)(-x'(t))}{(1-x(t))^2}$ και τη χρονική στιγμή

$$t = t_0 \text{ είναι } \theta'(t_0) = \frac{x'(t_0)(1-x(t_0)) - x(t_0)(-x'(t_0))}{(1-x(t_0))^2} \sin^2\theta(t_0) \Leftrightarrow$$

$$\theta'(t_0) = \frac{0,1\left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}(-0,1)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{A\Gamma(t_0)}{B\Gamma(t_0)}\right)^2 = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{A\Gamma(t_0)}{B\Gamma(t_0)}\right)^2 = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} \cdot \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{5} \text{ rad/sec}$$

24579. Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2\ln x - x$.

- α) i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία της. (Μονάδες 07)
 ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 07)
 iii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης. (Μονάδες 04)
 β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 07)

Λύση

α) i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Για κάθε $x \in (0, 2)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x > 2$ είναι $f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$.

ii. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2\ln x - x) = -\infty$, $f(2) = 2\ln 2 - 2$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2\ln x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(2 \frac{\ln x}{x} - 1 \right) \right] = -\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} 0.$$

Στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 2]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = (-\infty, 2\ln 2 - 2]$. Στο διάστημα $\Delta_2 = [2, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = (-\infty, 2\ln 2 - 2]$.

Η f έχει σύνολο τιμών το $f((0, +\infty)) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = (-\infty, 2\ln 2 - 2]$

iii. Από το σύνολο τιμών της f , προκύπτει ότι παρουσιάζει μέγιστο το $2\ln 2 - 2$ για $x = 2$.

β) Αν $\kappa < 2\ln 2 - 2$ τότε υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0, 2)$ και μοναδικό $x_2 \in (2, +\infty)$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2) = \kappa$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στη περίπτωση αυτή.

Αν $\kappa = 2\ln 2 - 2$ τότε επειδή για κάθε $x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$ είναι $f(x) < 2\ln 2 - 2$, η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει ακριβώς μία λύση τη $x = 2$.

Τέλος αν $\kappa > 2\ln 2 - 2$, τότε το κ δεν περιέχεται στο σύνολο τιμών της f και η εξίσωση $f(x) = \kappa$ είναι αδύνατη.

24587. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2\ln x - x$ και η ευθεία $\varepsilon : y = x$.

Γνωρίζουμε ότι η απόσταση ενός σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία ε , είναι $d(M, \varepsilon) = \sqrt{2} |x_0 - \ln x_0|$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία $\varepsilon : y = x$, είναι $d(M, \varepsilon) = \sqrt{2} (x_0 - \ln x_0)$. (Μονάδες 05)

β) i. Να βρείτε το σημείο της C_f , το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε .

(Μονάδες 12)

ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση.

(Μονάδες 03)

γ) Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης. (Μονάδες 05)

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x > 0$ είναι $\ln x < x \Leftrightarrow \ln x - x < 0$, άρα

$$d(M, \varepsilon) = \sqrt{2} |x_0 - \ln x_0| = \sqrt{2} (\ln x_0 - x_0).$$

β) i. Έστω $d(x) = \sqrt{2} (x - \ln x)$, $x > 0$.

$$Η d \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (0, +\infty) \text{ με } d'(x) = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{x-1}{x}.$$

$$\text{Είναι } d'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \frac{x-1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $d'(x) < 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $d'(x) > 0$, επειδή η d είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Η απόσταση d γίνεται ελάχιστη για $x = 1$. Τότε $M(1, -1)$.

ii. Η ελάχιστη απόσταση είναι $d(1) = \sqrt{2} (1 - \ln 1) = \sqrt{2}$.

$$\gamma) \text{ Αρκεί να βρούμε } x_1 > 0 \text{ για το οποίο ισχύει ότι } f'(x_1) = \lambda_\varepsilon = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x_1} - 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x_1} = 2 \Leftrightarrow x_1 = 1.$$

$$\text{Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση: } y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y + 1 = x - 1 \Leftrightarrow y = x - 2.$$

27650. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και τα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,3)$.

α) i. Να βρείτε σημείο M_0 της C_f τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη να είναι παράλληλη προς την ευθεία AB .

(Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο M_0 .

(Μονάδες 02)

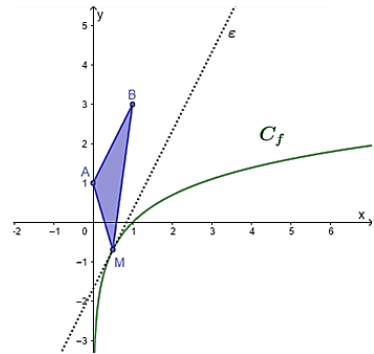
β) Έστω $E(x) = \frac{1}{2}(2x+1-\ln x)$, $x > 0$ η συνάρτηση που

εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου ABM , όπου M ένα τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f . Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν το σημείο M ταυτίζεται με το M_0 του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο M_1 της C_f με τετμημένη $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ABM_1 να είναι ορθογώνιο στην κορυφή A .

(Μονάδες 07)



Λύση

α) Έστω $M_0(x_0, \ln x_0)$, $x_0 > 0$. Η εφαπτομένη της C_f στο M_0 είναι παράλληλη στην ευθεία AB όταν

$$f'(x_0) = \lambda_{AB} \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} = \frac{3-1}{1-0} \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} = 2 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}. \text{ Τότε } f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2, \text{ οπότε η ζητούμενη}$$

$$\text{εφαπτομένη είναι η ευθεία } \varepsilon: y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y + \ln 2 = 2x - 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1 - \ln 2.$$

β) Έστω $M(x, y)$ με $y = \ln x$, $x > 0$. Είναι $\overline{AB} = (1-0, 3-1) = (1, 2)$, $\overline{AM} = (x, \ln x - 1)$,

$$\det(\overline{AB}, \overline{AM}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & \ln x - 1 \end{vmatrix} = \ln x - 1 - 2x. \text{ Το ζητούμενο εμβαδό είναι:}$$

$$(ABM) = E(x) = \frac{1}{2} |\ln x - 1 - 2x|, x > 0.$$

Επειδή η f είναι κοίλη βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \leq 2x - 1 - \ln 2 < 2x + 1 \Rightarrow \ln x < 2x + 1 \Leftrightarrow \ln x - 2x - 1 < 0$, οπότε

$$E(x) = \frac{1}{2}(2x + 1 - \ln x), x > 0.$$

γ) Το τρίγωνο ABM είναι ορθογώνιο στο A όταν

$$\lambda_{AM} \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \frac{\ln x - 1}{x} \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow 2 \ln x - 2 = -x \Leftrightarrow 2 \ln x + x - 2 = 0.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $2 \ln x_1 + x_1 - 2 = 0$.

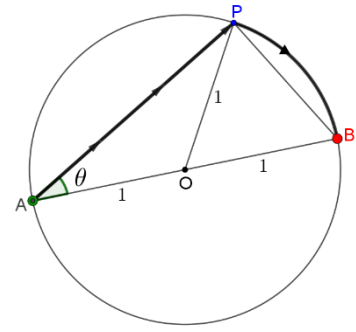
Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2 \ln x + x - 2$, $x \in [1, 2]$.

Είναι $h(1) = -1$, $h(2) = 2 \ln 2$, δηλαδή $h(1)h(2) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_1 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $h(x_1) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x_1 + x_1 - 2 = 0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με $h'(x) = \frac{2}{x} + 1 > 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[1, 2]$, είναι

γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, οπότε το x_1 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $2 \ln x + x - 2 = 0$ στο διάστημα $(1, 2)$.

28532. Ένας άνδρας βρίσκεται στο σημείο A μια κυκλικής λίμνης ακτίνας 1 Km και θέλει να φτάσει στο σημείο B της λίμνης ώστε η AB να είναι διάμετρος του κύκλου. Θέλει να τα καταφέρει συνδυάζοντας δύο είδη κινήσεων: να κωπηλατήσει αρχικά με βάρκα κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AP έχοντας ταχύτητα 3 Km/h και στη συνέχεια τρέχοντας πάνω στην κυκλική περιφέρεια κατά μήκος του τόξου PB με ταχύτητα 6 Km/h.



Έστω ότι η μεταβλητή γωνία $\widehat{PAB}$ είναι θ rad.

α) Να αποδείξετε ότι $(AP) = 2\sin\theta$ και ότι ο συνολικός χρόνος που θα χρειαστεί ο άνδρας για να κάνει τη μετάβαση από το A στο B

$$\text{είναι } f(\theta) = \frac{1}{3}(2\sin\theta + \theta), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ για την οποία ο συνολικός χρόνος μετάβασης γίνεται μέγιστος. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(\theta)$ είναι $f\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{18}\right]$.

(Μονάδες 7)

Δίνονται: το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία x rad σε κύκλο ακτίνας R , είναι $S = x \cdot R$ και ότι (απόσταση) = (χρόνος) $\times$ (ταχύτητα).

Λύση

α) Η γωνία $\widehat{PAB}$ είναι ορθή γιατί είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο PAB είναι $\sin\theta = \frac{(AP)}{(AB)} \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{(AP)}{2} \Leftrightarrow (AP) = 2\sin\theta$.

Έστω t_1 ο χρόνος που θα κάνει ο άνδρας την απόσταση AP, τότε $(AP) = 3t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{2\sin\theta}{3}$.

Επειδή η γωνία $\widehat{PAB}$ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο PB, το τόξο αυτό είναι 2θ rad και έχει μήκος $\ell_{PB} = 2\theta \cdot 1 = 2\theta$. Όμως κινείται κατά μήκος του τόξου PB με ταχύτητα 6 Km/h και έστω t_2 ο χρόνος

που κάνει ο άνδρας να διανύσει αυτό το τόξο. Είναι $\ell_{PB} = 6t_2 \Leftrightarrow t_2 = \frac{2\theta}{6} = \frac{\theta}{3}$.

Ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται ο άνδρας είναι $f(\theta) = t_1 + t_2 = \frac{2\sin\theta}{3} + \frac{\theta}{3} = \frac{1}{3}(2\sin\theta + \theta)$ με

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $f'(\theta) = \frac{1}{3}(-2\eta\mu\theta + 1)$.

$$\text{Είναι } f'(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(-2\eta\mu\theta + 1) \geq 0 \Leftrightarrow -2\eta\mu\theta + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -2\eta\mu\theta \geq -1 \Leftrightarrow \eta\mu\theta \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\theta \leq \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \eta\mu\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0 < \theta \leq \frac{\pi}{6}. \text{ Για κάθε } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \text{ είναι } f'(\theta) > 0 \text{ και για κάθε } \theta \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ είναι } f'(\theta) < 0,$$

επειδή η f είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{6}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο

$$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right). \text{ Η } f \text{ έχει μέγιστο για } \theta = \frac{\pi}{6}.$$

γ) Είναι $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} f(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{3}(2\sigma\upsilon\nu\theta + \theta) = \frac{2}{3}$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}\left(2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{18}$ και

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{3}(2\sigma\upsilon\nu\theta + \theta) = \frac{1}{3}\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

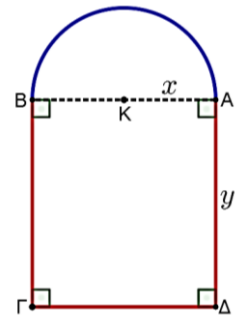
Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = \left(0, \frac{\pi}{6}\right]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$$f(\Delta_1) = \left[\frac{2}{3}, \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{18}\right]. \text{ Η } f \text{ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο } \Delta_2 = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right), \text{ οπότε έχει αντίστοιχο}$$

σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{18}\right]$. Η f έχει σύνολο τιμών το

$$f\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{18}\right].$$

28534. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα παράθυρο σε μια εκκλησία, το οποίο να αποτελείται από έναν ημικυκλικό δίσκο και από ένα ορθογώνιο, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Η συνολική περίμετρος του παραθύρου θέλουμε να είναι σταθερή ίση με 4m, αλλά το συνολικό εμβαδό του παραθύρου να είναι το μεγαλύτερο δυνατό. Έστω ότι η ακτίνα του ημικυκλίου είναι $(AK) = x$ m και το ύψος του ορθογωνίου είναι $(A\Delta) = y$ m. Ονομάζουμε $E(x)$ το συνολικό εμβαδόν του παραθύρου.



α) Να αποδείξετε ότι $y = -\frac{\pi+2}{2} \cdot x + 2$ και $E(x) = -\frac{\pi+4}{2} \cdot x^2 + 4x$, με

$$x \in \left(0, \frac{4}{\pi+2}\right).$$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του παραθύρου.

(Μονάδες 9)

γ) Ονομάζουμε x_0 την τιμή του x που μεγιστοποιεί το εμβαδόν $E(x)$ και $E(x_0)$ το μέγιστο εμβαδό.

Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(E(x))}{E(x) - E(x_0)}$.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Η περίμετρος του ημικυκλίου είναι πx και η συνολική περίμετρος είναι:

$$B\Gamma + \Gamma\Delta + A\Delta + \pi x = 2y + 2x + \pi x, \text{ άρα } 2y + 2x + \pi x = 4 \Leftrightarrow 2y = 4 - (\pi + 2)x \Leftrightarrow y = -\frac{\pi+2}{2} \cdot x + 2.$$

Το εμβαδό του ορθογωνίου μέρους είναι $(AB\Gamma\Delta) = y \cdot 2x = \left(-\frac{\pi+2}{2} \cdot x + 2\right) 2x = 4x - (\pi + 2)x^2$ και το

εμβαδό του ημικυκλικού χωρίου είναι $\frac{\pi x^2}{2}$, οπότε το συνολικό εμβαδό είναι

$$E(x) = 4x - (\pi + 2)x^2 + \frac{\pi x^2}{2} = 4x - \left(\pi + 2 - \frac{\pi}{2}\right)x^2 = -\frac{\pi+4}{2} \cdot x^2 + 4x.$$

$$\text{Είναι } x > 0 \text{ και } y > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi+2}{2} \cdot x + 2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi+2}{2} \cdot x > -2 \Leftrightarrow x < \frac{4}{\pi+2}, \text{ άρα } x \in \left(0, \frac{4}{\pi+2}\right).$$

β) Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{4}{\pi+2}\right)$ με $E'(x) = -(\pi + 4)x + 4$.

$$\text{Είναι } E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -(\pi+4)x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{\pi+4}.$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{4}{\pi+4}\right)$ είναι $E'(x) > 0$ και για κάθε $x \in \left(\frac{4}{\pi+4}, \frac{4}{\pi+2}\right)$ είναι $E'(x) < 0$, επειδή η E είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{4}{\pi+4}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{4}{\pi+4}, \frac{4}{\pi+2}\right)$.

$$\text{Η } E \text{ παρουσιάζει μέγιστο για } x = \frac{4}{\pi+4} \text{ το } E\left(\frac{4}{\pi+4}\right) = -\frac{\pi+4}{2} \cdot \left(\frac{4}{\pi+4}\right)^2 + 4 \cdot \frac{4}{\pi+4} = \frac{8}{\pi+4}.$$

γ) Επειδή η E έχει μέγιστο για $x = x_0$ ισχύει ότι $E(x) \leq E(x_0)$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{4}{\pi+2}\right)$ και η ισότητα

ισχύει μόνο για $x = x_0 = \frac{4}{\pi+4}$. Επομένως $E(x) < E(x_0) \Leftrightarrow E(x) - E(x_0) < 0$ για τιμές του x κοντά στο

$$x_0, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{E(x) - E(x_0)} = -\infty. \text{ Ακόμη } E(x_0) = \frac{4}{\pi+4} > 1 \Leftrightarrow \ln E(x_0) > \ln 1 = 0, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln(E(x)) = \ln(E(x_0)) > 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(E(x))}{E(x) - E(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\ln(E(x)) \cdot \frac{1}{E(x) - E(x_0)} \right] = -\infty.$$

31680. Ένα γαλλικό μπιλιάρδο έχει μήκος 3,1 μέτρα και πλάτος 1,7 μέτρα. Ένας παίκτης χτυπάει την άσπρη μπάλα με τέτοιο τρόπο ώστε αυτή να χτυπήσει πρώτα στο σημείο Α, μετά να κινηθεί ευθύγραμμα μέχρι το σημείο Β και από εκεί να συνεχίσει ευθύγραμμα μέχρι το σημείο Γ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δίνονται τα μήκη $\Delta B = x$, $\Delta E = 1,7$, $\Delta \Delta = 1,5$, $\Gamma E = \alpha$ και $L = AB + B\Gamma$ που εκφράζονται σε μέτρα.

α) Να αποδείξετε ότι $L = L(x) = \sqrt{x^2 + 2,25} + \sqrt{(1,7-x)^2 + \alpha^2}$,

$$x \in \left(0, \frac{17}{10}\right). \quad (\text{Μονάδες } 07)$$

β) Δίνεται ακόμη ότι το L γίνεται ελάχιστο μόνο όταν το Β απέχει 1,02 μέτρα από το Δ.

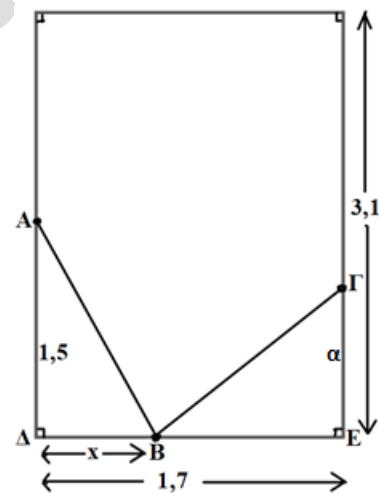
i. Αν $L'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2,25}} - \frac{(1,7-x)}{\sqrt{(1,7-x)^2 + \alpha^2}}$, $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$ να δείξετε

ότι $\alpha = 1$.

(Μονάδες 10)

ii. Αν $L''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1,02} \frac{1}{L'(x)}$, εφόσον υπάρχει.

(Μονάδες 08)



Λύση

α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta B \Delta$ έχουμε:

$$AB^2 = \Delta \Delta^2 + \Delta B^2 = 1,5^2 + x^2 \Leftrightarrow AB = \sqrt{x^2 + 2,25}$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $B \Gamma E$ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = BE^2 + \Gamma E^2 = (1,7-x)^2 + \alpha^2 \Leftrightarrow B\Gamma = \sqrt{(1,7-x)^2 + \alpha^2}.$$

$$\text{Είναι } L = L(x) = AB + B\Gamma = \sqrt{x^2 + 2,25} + \sqrt{(1,7-x)^2 + \alpha^2}, \quad x \in \left(0, \frac{17}{10}\right).$$

β) i. Επειδή η συνάρτηση L παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1,02$ που βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι

$$\begin{aligned} L'(1,02) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1,02^2}{1,02^2 + 2,25}} - \sqrt{\frac{0,68^2}{0,68^2 + \alpha^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1,02^2}{1,02^2 + 2,25}} = \sqrt{\frac{0,68^2}{0,68^2 + \alpha^2}} \Leftrightarrow \\ \frac{1,02^2}{1,02^2 + 2,25} &= \frac{0,68^2}{0,68^2 + \alpha^2} \Leftrightarrow \cancel{1,02^2 \cdot 0,68^2} + 1,02^2 \alpha^2 = \cancel{1,02^2 \cdot 0,68^2} + 2,25 \cdot 0,68^2 \Leftrightarrow \\ \sqrt{1,02^2 \alpha^2} &= \sqrt{2,25 \cdot 0,68^2} \Leftrightarrow 1,02\alpha = 1,5 \cdot 0,68 \Leftrightarrow \alpha = 1. \end{aligned}$$

ii. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$ είναι $L''(x) > 0$, άρα η L' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $1,02 < x < 1,7$ είναι $L'(x) > L'(1,02) = 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 1,02^+} \frac{1}{L'(x)} = +\infty$.

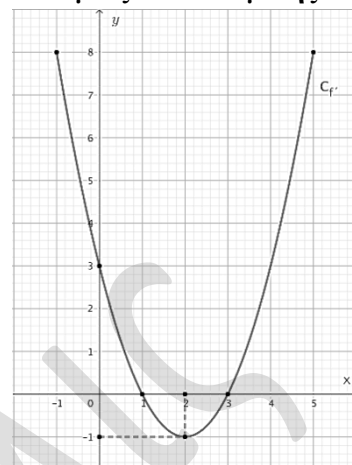
Για κάθε $0 < x < 1,02$ είναι $L'(x) < L'(1,02) = 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 1,02^-} \frac{1}{L'(x)} = -\infty$, οπότε δεν υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow 1,02} \frac{1}{L'(x)}.$$

Κυρτότητα – Σημεία καμπής

Θέμα 2ο

26736. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[-1, 5]$.



α) Αν η κορυφή της παραβολής της γραφικής παράστασης της παραγώγου f' είναι το σημείο $A(2, -1)$, με τη βοήθεια του σχήματος να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[-1, 2]$ και κυρτή στο $[2, 5]$.

(Μονάδες 10)

β) Ποια είναι η κλίση της f στο $x_0 = 2$;

(Μονάδες 06)

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $3f(2) - 1 = 0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 2$.

(Μονάδες 09)

Λύση

α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, 5]$, οπότε η f είναι κοίλη στο $[-1, 2]$ και κυρτή στο $[2, 5]$.

β) Επειδή το A ανήκει στη $C_{f'}$, η κλίση της f στο $x_0 = 2$ είναι το $f'(2) = -1$.

$$\gamma) 3f(2) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(2) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση } y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - \frac{1}{3} = -x + 2 \Leftrightarrow y = -x + \frac{7}{3}.$$

31527. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 3x^2 - 8$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα.

(Μόρια 10)

β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) .

(Μόρια 7)

ii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της C_f , διαφορετικό από το A , στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην (ε) .

(Μόρια 8)

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολωνυμική με $f'(x) = 4x^3 + 6x$ και $f''(x) = 12x^2 + 6$.

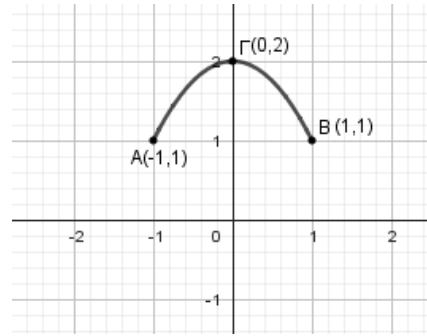
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f''(x) > 0$, οπότε η f είναι κυρτή.

β) i. Είναι $f(1) = 1 + 3 - 8 = -4$ και $f'(1) = 4 + 6 = 10$.

$$\text{Η } \varepsilon \text{ έχει εξίσωση: } y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y + 4 = 10x + 10 \Leftrightarrow y = 10x + 6$$

ii. Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και 1-1, επομένως η εξίσωση $f'(x) = \lambda_\varepsilon = 10$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

32799. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ και η ευθεία $y = 2$. Αν η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 1)$, $B(1, 1)$, και $\Gamma(0, 2)$ τότε με βάση το παρακάτω σχήμα:



α) Να εξηγήσετε γιατί ισχύει: $1 \leq f'(x) \leq 2$, για κάθε

$x \in [-1, 1]$. (Μονάδες 07)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 08)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι όλα τα σημεία της $C_{f'}$ βρίσκονται εντός των ευθειών $y = 1$ και $y = 2$ ή πάνω σε αυτές, οπότε $1 \leq f'(x) \leq 2$, για κάθε $x \in [-1, 1]$.

β) Για κάθε $x \in [-1, 1]$ είναι $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f \nearrow [-1, 1]$.

γ) Στο διάστημα $[-1, 0]$ η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η f είναι κυρτή στο διάστημα αυτό και για κάθε $x \in [0, 1]$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η f είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

Θέμα 4ο

23312. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $[-2, 2]$ τέτοια ώστε:

- f συνεχής στο $[-2, 2]$,

- δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ και

- $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$, για κάθε $x \in [-2, 2]$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει σημεία καμπής.

(Μονάδες 08)

β) Αν $f(0) = 3$,

i. Να αποδείξετε ότι $(f(x) - 1)^2 = 4 - x^2$, για κάθε $x \in [-2, 2]$ και κατόπιν ότι $f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2, 2]$.

(Μονάδες 09)

ii. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \sin x$.

(Μονάδες 08)

Λύση

α) Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής το $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (-2, 2)$, τότε $f''(x_0) = 0$.

Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$, η συνάρτηση $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε:

$$(f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3)' = 0 \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) - 2f'(x) + 2x = 0 \Rightarrow (2f(x)f'(x) - 2f'(x) + 2x)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$2f'(x)f'(x) + 2f(x)f''(x) - 2f''(x) + 2 = 0 \text{ και για } x = x_0 \text{ είναι}$$

$$2(f'(x_0))^2 + 2f(x_0)f''(x_0) - 2f''(x_0) + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(f'(x_0))^2 = -2 \text{ αδύνατη.}$$

Επομένως η f δεν έχει σημείο καμπής.

β) i. $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x) + 1 = 4 - x^2 \Leftrightarrow (f(x) - 1)^2 = 4 - x^2 \Leftrightarrow$

$$|f(x)-1|=\sqrt{4-x^2} \quad (1). \text{ Έστω } h(x)=f(x)-1, x \in [-2,2].$$

$$\text{Είναι } h(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}=0 \Leftrightarrow 4-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2.$$

Για κάθε $x \in (-2, 2)$ είναι $h(x) \neq 0$ και επειδή η h είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Είναι $h(0)=f(0)-1=2>0$, άρα $h(x)>0$ για κάθε $x \in (-2, 2)$, οπότε η (1) γίνεται:

$$f(x)-1=\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow f(x)=1+\sqrt{4-x^2}, x \in (-2,2).$$

$$\text{Για } x=2 \text{ και } x=-2 \text{ είναι } |f(2)-1|=\sqrt{4-4} \Leftrightarrow f(2)-1=0 \Leftrightarrow f(2)=1 \text{ και όμοια } f(-2)=1.$$

$$\text{Άρα } f(x)=\begin{cases} 1+\sqrt{4-x^2}, & x \in (-2,2) \\ 1, & x=2 \text{ ή } x=-2 \end{cases} = 1+\sqrt{4-x^2}, x \in [-2,2].$$

$$\text{ii. Είναι } f'(x)=-\frac{2x}{2\sqrt{4-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Για κάθε $x \in (-2,0)$ είναι $f'(x)>0$ και για κάθε $x \in (0,2)$ είναι $f'(x)<0$, επειδή η f είναι συνεχής στο $[-2,2]$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$.

Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(-2)=1$ και το $f(2)=1$ και τοπικό μέγιστο το $f(0)=3$.

Για κάθε $x \in [-2,0]$ είναι $f(-2) \leq f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq 3$ και για κάθε $x \in [0,2]$ είναι

$f(2) \leq f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq 3$, άρα για κάθε $x \in [-2,2]$ είναι $1 \leq f(x) \leq 3$, επομένως η f έχει ελάχιστο το 1 για $x=2$ και $x=-2$ και μέγιστο το 3 για $x=0$.

Επειδή για κάθε $x \in [-2,2]$ είναι $1 \leq f(x) \leq 3$ και $-1 \leq \sin x \leq 1$, η εξίσωση $f(x)=\sin x$ έχει λύση μόνο όταν $f(x)=\sin x=1$, το οποίο είναι αδύνατο αφού η εξίσωση $f(x)=1$ έχει λύσεις τις $x=2$ ή $x=-2$ που δεν επαληθεύουν την $\sin x=1$.

23531. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln x-3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει θέση ολικού ελαχίστου σε κάποιο $x_0 \in (0,1)$ με $f(x_0)<0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x))^{2023}}{f(x)-f(x_0)}$.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$ και $f''(x)=e^x+\frac{1}{x^2}$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)>0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)=\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^x-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ και $f'(1)=e-1$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Επειδή η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$f'((0,1))=\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x)\right)=(-\infty, e-1)$. Επειδή το μηδέν περιέχεται στο $f'((0,1))$, υπάρχει

μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Για κάθε $x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, x_0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = x_0$ το $f(x_0)$. Είναι $x_0 < 1 \Leftrightarrow f(x_0) < f(1) = e - 3 < 0$.

γ) Επειδή η f έχει ελάχιστο στο x_0 είναι $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x > 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_0$, οπότε για κάθε x κοντά στο x_0 είναι $f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x))^{2023}}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[(f(x))^{2023} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} \right] = -\infty$ γιατί $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{2023} = (f(x_0))^{2023} < 0$

και $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$ αφού $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ και $f(x) - f(x_0) > 0$ κοντά στο x_0 .

24760. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x - \lambda x$, $x > 0$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει $e - \lambda = e^e - 1 - \lambda e$, να αποδείξετε ότι :

α) η f είναι κυρτή. (Μονάδες 6)

β) υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1, e)$ με $f'(x_0) = 0$. (Μονάδες 6)

γ) για την f' ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1, e]$. (Μονάδες 6)

δ) η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο στο x_0 που είναι το $e^{x_0}(1 - x_0) + 1 - \ln x_0$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = e^x - \frac{1}{x} - \lambda$ και $f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) > 0$, άρα η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

β) $e - \lambda = e^e - 1 - \lambda e \Leftrightarrow f(1) = f(e)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, e]$, παραγωγίσιμη στο $(1, e)$ και $f(1) = f(e)$, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

γ) Είναι $e - \lambda = e^e - 1 - \lambda e \Leftrightarrow \lambda e - \lambda = e^e - e - 1 \Leftrightarrow \lambda(e - 1) = e^e - e - 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{e^e - e - 1}{e - 1} = \frac{e^e}{e - 1} - 1$

Επειδή η f είναι κυρτή η f' είναι γνησίως αύξουσα άρα

$1 < x_0 < e \Leftrightarrow f'(1) < f'(x_0) < f'(e) \Leftrightarrow f'(1) < 0 < f'(e)$, οπότε $f'(1)f'(e) < 0$. Επειδή η f' είναι συνεχής στο $[1, e]$, για την f' ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1, e]$.

δ) Για κάθε $0 < x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0$ και για κάθε $x > x_0$ είναι $f'(x) > f'(x_0) = 0$, επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 , είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$. Η f έχει

ελάχιστο το $f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 - \lambda x_0$. Όμως $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} - \frac{1}{x_0} - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = e^{x_0} - \frac{1}{x_0}$, οπότε

$$f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 - x_0 \left(e^{x_0} - \frac{1}{x_0} \right) = e^{x_0} - \ln x_0 - x_0 e^{x_0} + 1 = e^{x_0}(1 - x_0) + 1 - \ln x_0.$$

25745. Δίνεται συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 2]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ και ισχύουν $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$, $f(0) = f(2)$ και $(f'(x))^2 + f(x)f''(x) < 0$, για κάθε $x \in (0, 2)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$. (Μονάδες 5)

ii. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$. (Μονάδες 5)

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 7)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των ακροτάτων. (Μονάδες 8)

Λύση

α) i. Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, τότε η σχέση $(f'(x))^2 + f(x)f''(x) < 0$ για $x = x_0$ γίνεται $(f'(x_0))^2 + \cancel{f(x_0)}^0 f''(x_0) < 0 \Leftrightarrow (f'(x_0))^2 < 0$ αδύνατο. Άρα $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$.

ii. Επειδή $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$ και η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, 2)$. Επειδή $f(1) = 1 > 0$, είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$.

β) Είναι $(f'(x))^2 + f(x)f''(x) < 0 \Leftrightarrow f''(x) < -\frac{(f'(x))^2}{f(x)} < 0$, άρα η f είναι κοίλη στο $(0, 2)$.

γ) Επειδή η f είναι κοίλη στο $(0, 2)$, η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $1 < x < 2 \Rightarrow f'(x) < f'(1) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστα τα $f(0)$, $f(2)$ και μέγιστο το $f(1) = 1$.

27320. Στο διπλανό σχήμα δίνεται στο $(0, +\infty)$ η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Δίνεται επίσης ότι η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $(0, +\infty)$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f . (Μονάδες 09)

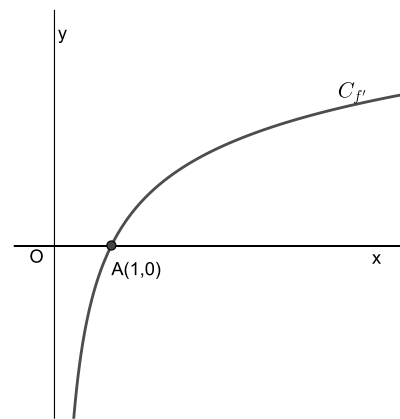
β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι:

1^ο: «Η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1».

2^ο: «Υπάρχει μοναδικό $\kappa \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(\kappa, f(\kappa))$ να ισούται με 2».

Ποιοι από τους παραπάνω ισχυρισμούς του μαθητή είναι σωστοί; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 10)

γ) Τι μπορούμε να πούμε για την κυρτότητα της f στο πεδίο ορισμού της; Να δικαιολογήσετε την όποια απάντησή σας. (Μονάδες 06)



Λύση

α) Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)$.

β) Στο σχήμα βλέπουμε ότι το σημείο $A(1,0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f' , άρα $f'(1) = 0$, επομένως η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1 και ο 1ος ισχυρισμός είναι σωστός.

Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f' είναι συνεχής, 1-1 και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, οπότε υπάρχει μοναδικό $\kappa \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f'(\kappa) = 2$, οπότε και ο 2ος ισχυρισμός είναι σωστός.

γ) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε η f είναι κυρτή στο διάστημα αυτό.

27667. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \frac{x^2}{2} + 2023, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 05)

ii. το σύνολο τιμών της f' είναι το $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α , η εξίσωση $e^x + x = \alpha$ έχει μοναδική ρίζα ρ .

(Μονάδες 05)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α , η συνάρτηση

$g(x) = \alpha x - f(x)$ με $x \in \mathbb{R}$, έχει μέγιστη τιμή την $\rho f'(\rho) - f(\rho)$.

(Μονάδες 09)

Λύση

α) i. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x + x$ και $f''(x) = e^x + 1$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f''(x) > 0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ii. Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x) = +\infty$.

Επειδή η f' είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το $f'(A) = \mathbb{R}$.

β) Επειδή ο αριθμός α βρίσκεται στο σύνολο τιμών της f' και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, υπάρχει μοναδικός αριθμός $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f'(\rho) = \alpha$, δηλαδή η εξίσωση $e^x + x = \alpha$ έχει μοναδική ρίζα ρ .

γ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = \alpha - f'(x)$.

Για κάθε $x < \rho \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\rho) = \alpha \Leftrightarrow \alpha - f'(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$.

Για κάθε $x > \rho \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\rho) = \alpha \Leftrightarrow \alpha - f'(x) < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0$. Επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, \rho]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\rho, +\infty)$. Η g έχει μέγιστο το

$g(\rho) = \alpha \rho - f(\rho) = f'(\rho)\rho - f(\rho)$.

31549. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$.

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 6)
 β) Να αποδείξετε ότι $2022^{2023} > 2023^{2022}$. (Μονάδες 6)
 γ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 6)
 δ) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[2021, 2022]$ και $[2022, 2023]$ να αποδείξετε ότι $2f(2022) < f(2021) + f(2023)$. (Μονάδες 7)
 Δίνεται $e \approx 2,71$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq e.$$

Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (e, +\infty)$ είναι $f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(e) = \frac{1}{e}$.

β) $2022^{2023} > 2023^{2022} \Leftrightarrow \ln 2022^{2023} > \ln 2023^{2022} \Leftrightarrow$
 $2023 \ln 2022 > 2022 \ln 2023 \Leftrightarrow \frac{\ln 2022}{2022} > \frac{\ln 2023}{2023} \Leftrightarrow f(2022) > f(2023) \Leftrightarrow 2022 < 2023$ ισχύει.

γ) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$.

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \geq 0 \Leftrightarrow 2 \ln x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \geq e^{\frac{3}{2}}.$$

Για κάθε $x \in \left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$ είναι $f''(x) < 0$ και για κάθε $x \in \left(e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$ είναι $f''(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι κοίλη στο $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right]$ και κυρτή στο $\left[e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$. Η f έχει σημείο καμπής το $\left(e^{\frac{3}{2}}, f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right) \equiv \left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$.

δ) Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[2021, 2022]$ και $[2022, 2023]$, υπάρχει $x_1 \in (2021, 2022)$ και $x_2 \in (2022, 2023)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) = f(2022) - f(2021)$ και $f'(x_2) = f(2023) - f(2022)$.

Είναι $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x_2) \Leftrightarrow f(2022) - f(2021) < f(2023) - f(2022) \Leftrightarrow$
 $2f(2022) < f(2021) + f(2023)$.

31550. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x$. Να αποδείξετε ότι

- α) η f είναι κυρτή. (Μονάδες 6)
 β) η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ το οποίο είναι μοναδικό. (Μονάδες 7)
 γ) το ολικό ελάχιστο είναι το $\frac{1}{x_0} + x_0$. (Μονάδες 6)
 δ) η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow f$ κυρτή.

β) $f \cup (0, +\infty) \Leftrightarrow f' \nearrow (0, +\infty)$.

Είναι $f'\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} - 2 = \sqrt{e} - 2 < 0$, $f'(1) = e - 1 > 0$, άρα $f'\left(\frac{1}{2}\right)f'(1) < 0$, f' συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, οπότε

σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της f' .

Για κάθε $0 < x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0$ και η f' είναι συνεχής στο $(0, x_0]$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$ και η f' είναι συνεχής στο $[x_0, +\infty)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(x_0)$.

γ) Είναι $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow x_0 = \ln \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow x_0 = -\ln x_0 \Leftrightarrow \ln x_0 = -x_0$.

$$f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 = \frac{1}{x_0} + x_0.$$

γ) Επειδή η f έχει ελάχιστο το $f(x_0)$, ισχύει ότι $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x > 0$.

Θα συγκρίνουμε το $f(x_0)$ με το 2, είναι: $f(x_0) - 2 = \frac{1}{x_0} + x_0 - 2 = \frac{1 + x_0^2 - 2x_0}{x_0} = \frac{(x_0 - 1)^2}{x_0} > 0 \Leftrightarrow$

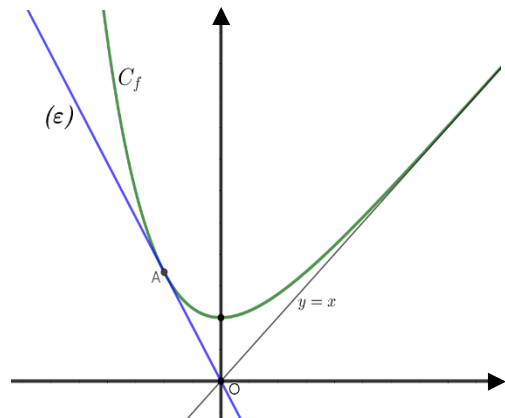
$f(x_0) > 2$, οπότε για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > 2$, επομένως η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη.

Κανόνες De L' Hospital - Ασύμπτωτες

Θέμα 2ο

23530. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης $f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε τα εξής:

- στο σημείο $A(-1, f(-1))$ της γραφικής παράστασης της f έχει σχεδιασθεί η εφαπτομένη ευθεία (ε) , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$.



α) Αν γνωρίζουμε ότι $f(-1) = e - 1$, να αποδείξετε ότι το $f'(-1) = 1 - e$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) .

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - x^2}{f(x)}$.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Η εφαπτομένη (ε) έχει εξίσωση $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1)) \Leftrightarrow y - e + 1 = (1 - e)(x - (-1)) \Leftrightarrow y = (1 - e)x$.

β) Επειδή η ευθεία $y = x = 1 \cdot x + 0$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$ ισχύει

ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$.

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - x^2}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{xf(x)}{x} - \frac{x^2}{x}}{\frac{f(x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{0}{1} = 0.$$

24755. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0, f(0))$.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι και στο $x_0 = 0$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \alpha \Leftrightarrow 1 - 1 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{1} = 1 - 1 = 0$$

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(0, f(0))$ έχει εξίσωση $y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = 0$, δηλαδή είναι ο άξονας $x'x$.

25748. Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει την ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$. (Μονάδες 8)

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{xf(x) - 3x^2}$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Επειδή η ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$, ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = -2.$$

β) Θέτουμε $f(x) - 3x = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + 3x$. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 3x) = +\infty + \infty = +\infty$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{xf(x) - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{f(x)}{x} - 1 \right)}{x(f(x) - 3x)} = \frac{3 - 1}{-2} = -1.$$

28314. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\lambda x + 1}}, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = -1$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο της f . (Μονάδες 8)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (Μονάδες 5)

Λύση

α) Αν $\lambda \neq -1$ τότε $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{\lambda x + 1}} = e^{\frac{1}{\lambda + 1}} \neq 0 = f(1)$ άτοπο αφού η f είναι συνεχής στο $x = 1$.

$$\text{Για } \lambda = -1 \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{-x+1}} \stackrel{\frac{1}{-x+1}=u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 1^+ \Rightarrow \\ u \rightarrow -\infty}} e^u = 0 = f(0)$$

β) Για $x > 1$ η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}. \text{ Στο } x = 1 \text{ είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1-1)^2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1^+ \Rightarrow u \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow -\infty}} \frac{e^u}{u^2} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{e^u}{u^2} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{e^u}{2u} =$$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \left(e^u \cdot \frac{1}{2u} \right) = 0, \text{ οπότε η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x = 1 \text{ με } f'(1) = 0.$$

γ) Για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} > 0$ και η f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

δ) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} e^u = 1.$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα έχει σύνολο τιμών το $f([1, +\infty)) = [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [0, 1)$

31547. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x) = \frac{3-2x}{(x-2)^2}$ για κάθε $x \neq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x=2$. (Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν η f είναι
 i. συνεχής στο 2. (Μονάδες 8) ii. παραγωγίσιμη στο 2. (Μονάδες 7)

Λύση

α) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (3-2x) \cdot \frac{1}{(x-2)^2} = -1 \cdot (+\infty) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ γιατί

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \Rightarrow u \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} \frac{1}{u^2} = +\infty$, άρα η ευθεία $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

β) i. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty \neq f(2) \in \mathbb{R}$ η f δεν είναι συνεχής στο 2.

ii. Επειδή η f δεν είναι συνεχής στο 2 δεν είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Θέμα 4ο

24759. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(x) \geq x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) i. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. (Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες. (Μονάδες 6)

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq \frac{3}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

β) Αν επιπλέον $f(1) = 1$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ να αποδείξετε ότι:

i. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. (Μονάδες 5)

ii. η f δεν είναι κοίλη. (Μονάδες 5)

Λύση

α) i. Για κάθε $x > 0$ είναι $\frac{f(x)}{x} \geq \frac{x^2}{x} - 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} \geq x - 1 + \frac{1}{x}$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$ οπότε και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

ii. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Για $x < 0$ είναι $\frac{f(x)}{x} \leq \frac{x^2}{x} - 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} \leq x - 1 + \frac{1}{x}$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$ οπότε και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, άρα η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, οπότε και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, οπότε και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Τέλος επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Άρα η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες.

iii. Αρκεί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να είναι $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ ισχύει.

Άρα $f(x) \geq x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) i. Είναι $f(x) \geq \frac{3}{4} = f\left(\frac{1}{2}\right)$, άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = \frac{1}{2}$ το οποίο είναι στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

ii. Αν η f ήταν κοίλη τότε η f' θα ήταν γνησίως φθίνουσα. Για κάθε $x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x) < f'\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ θα είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Είναι $\frac{1}{2} < 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) > f(1) \Leftrightarrow \frac{3}{4} > 1$ άτοπο. Άρα η f δεν είναι κοίλη.

29130. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία $y = x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. (Μονάδες 04)

ii. Η C_f έχει άπειρα κοινά σημεία με την εφαπτομένη της $y = x$ τα οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 06)

β) Για τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) - x = \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$. (Μονάδες 05)

ii. Στο διάστημα $(0, +\infty)$, η C_g βρίσκεται πάνω από την $y = x$. (Μονάδες 04)

γ) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(0, +\infty)$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης g του ερωτήματος β) βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 06)

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x$. Είναι $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\eta\mu\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ και

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 1$. Η εφαπτομένη της C_f στο A έχει εξίσωση:

$$y - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y - \frac{\pi}{2} = x - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow y = x.$$

β) i. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 0$, άρα η $y = x$ ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

ii. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $1 + \frac{1}{e^x} > 1 \Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) > \ln 1 \Leftrightarrow g(x) - x > 0 \Leftrightarrow g(x) > x$, άρα στο διάστημα $(0, +\infty)$, η C_g βρίσκεται πάνω από την $y = x$.

γ) Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) - x = x\eta\mu x - x = x(\eta\mu x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq x$ και επειδή $x < g(x)$, είναι $f(x) < g(x)$ για κάθε $x > 0$.

Αρχική συνάρτηση

Θέμα 4ο

24769. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$, $x > -1$ και έστω F αρχική της f με $F(1) = \ln 2$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > -1$ ισχύει $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ και να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως

προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$.

(Μονάδες 6)

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της F στο $x_0 = 1$.

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\frac{2F(x)-1}{x} \geq \ln 4 - 1$.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{(x+1)'}{x+1} - \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (-1, 0)$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-1, 0]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

β) Για κάθε $x > 0$ είναι $F'(x) = f(x)$ και $F''(x) = f'(x) > 0$, οπότε η F είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$.

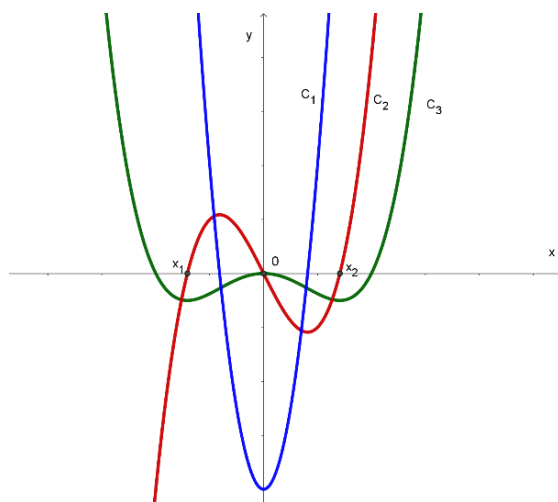
$$\gamma) \text{ i. } \varepsilon: y - F(1) = F'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - \ln 2 = f(1)(x-1) \Leftrightarrow y - \ln 2 = \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)(x-1) \Leftrightarrow$$

$$y = \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)x - \ln 2 + \frac{1}{2} + \ln 2 \Leftrightarrow y = \left(\frac{2\ln 2 - 1}{2}\right)x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \left(\frac{\ln 4 - 1}{2}\right)x + \frac{1}{2}.$$

ii. Επειδή η F είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, οπότε για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$F(x) \geq \left(\frac{\ln 4 - 1}{2}\right)x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2F(x) \geq (\ln 4 - 1)x + 1 \Leftrightarrow 2F(x) - 1 \geq (\ln 4 - 1)x \Leftrightarrow \frac{2F(x) - 1}{x} \geq \ln 4 - 1.$$

32694. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων f, f' και F , όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η C_2 ,



α) i. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στην κόλλα σας και να τον συμπληρώσετε με το πρόσημο της f καθώς και την μονοτονία της F .

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$F' = f$		0	0	0	
F					

(Μονάδες 10)

ii. να βρείτε το πλήθος καθώς και το είδος των τοπικών ακροτάτων της F . (Μονάδες 08)

β) να δικαιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_3 με την σειρά που δίνονται αντιστοιχούν στις συναρτήσεις f' και F . (Μονάδες 07)

Λύση

α) i.

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$	
F' = f		-	0	+	0	+
F		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

ii. Η F έχει τοπικό ελάχιστο στο x_1 , τοπικό μέγιστο στο 0 και τοπικό ελάχιστο στο x_2 .

β) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η C_3 έχει τη μονοτονία και τα ακρότατα της F , οπότε αυτή είναι η γραφική της παράσταση. Επομένως η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f' .

Υπολογιστικά ολοκληρώματα

Θέμα 4ο

23957. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\ln^2 x}$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 2 \frac{\ln x}{x} f(x)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 1. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e \frac{2 \ln x \cdot f(x) + x e^x}{x(f(x) + e^x)} dx$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $g(x) = e^x$,

$h(x) = x^2$ και $\varphi(x) = \ln x$ με $f'(x) = e^{\ln^2 x} (\ln^2 x)' = f(x) \cdot 2 \ln x (\ln x)' = 2 \frac{\ln x}{x} f(x)$.

β) Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \frac{\ln x}{x} f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1) = 1$.

$$\gamma) I = \int_1^e \frac{2 \ln x \cdot f(x) + x e^x}{x(f(x) + e^x)} dx = \int_1^e \frac{\frac{2 \ln x \cdot f(x)}{x} + \frac{x e^x}{x}}{x(f(x) + e^x)} dx = \int_1^e \frac{f'(x) + e^x}{f(x) + e^x} dx = \int_1^e \frac{(f(x) + e^x)'}{f(x) + e^x} dx =$$

$$\left[\ln |f(x) + e^x| \right]_1^e = \ln(f(e) + e^e) - \ln(f(1) + e) = \ln \frac{e + e^e}{1 + e}.$$

24770. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1) + x - 1$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη. (Μονάδες 8)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο $x_0 = \ln 2$.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln(e^x - 1) \leq 2x - \ln 4$. (Μονάδες 4)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2 - e^{-x}}{e^{-x} - 1} dx$. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} + 1$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f''(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) < 0$ άρα η f είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.

β) i. Είναι $f(\ln 2) = \ln(e^{\ln 2} - 1) + \ln 2 - 1 = \ln(2 - 1) + \ln 2 - 1 = \ln 1 + \ln 2 - 1 = \ln 2 - 1$ και

$$f'(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2}}{e^{\ln 2} - 1} + 1 = \frac{2}{2 - 1} + 1 = 3.$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = \ln 2$ έχει εξίσωση ε :

$$y - f(\ln 2) = f'(\ln 2)(x - \ln 2) \Leftrightarrow y - \ln 2 + 1 = 3x - 3\ln 2 \Leftrightarrow y = 3x - 2\ln 2 - 1$$

ii. Επειδή η f είναι κοίλη βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \leq 3x - 2\ln 2 - 1 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) + x - 1 \leq 3x - 2\ln 2 - 1 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) \leq 2x - \ln 4$.

$$\gamma) I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2 - e^{-x}}{e^{-x} - 1} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2 - \frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x} - 1} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2e^x - 1}{1 - e^x} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2e^x - 1}{1 - e^x} dx = - \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2e^x - 1}{e^x - 1} dx \Leftrightarrow$$

$$I = - \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x - 1 + e^x}{e^x - 1} dx = - \int_{\ln 2}^{\ln 3} 1 + \frac{e^x}{e^x - 1} dx = - \int_{\ln 2}^{\ln 3} f'(x) dx = - [f(x)]_{\ln 2}^{\ln 3} = -f(\ln 3) + f(\ln 2) \Leftrightarrow$$

$$I = -\ln(e^{\ln 3} - 1) - \ln 3 + 1 + \ln 2 - 1 = \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 = -\ln 3$$

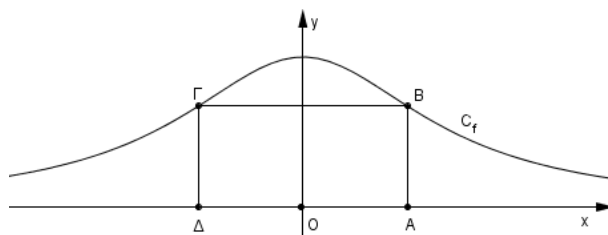
24771. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0) = 1$ και $(x^2 + 1)f'(x) + \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών B, Γ, Δ του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ με τη βοήθεια της τετμημένης α , $\alpha > 0$ του σημείου $A(\alpha, 0)$. (Μονάδες 6)



γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\alpha)$ του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ δίνεται από τον τύπο

$$E(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}, \alpha > 0. \text{ Κατόπιν, να βρείτε για ποια τιμή του } \alpha \text{ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.}$$

(Μονάδες 8)

δ) Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1) = \ln 2$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(x) dx = \ln \sqrt{2}$. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(x^2 + 1)f'(x) + \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)f'(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } f(0) = 1 \Leftrightarrow 1 + c = 1 \Leftrightarrow c = 0, \text{ άρα}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}.$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} = f(x)$, άρα η f είναι άρτια, οπότε η C_f

έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

Είναι $B(\alpha, f(\alpha))$ και λόγω συμμετρίας $\Gamma(-\alpha, f(\alpha)), \Delta(-\alpha, 0)$.

γ) Το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ έχει εμβαδό $E(\alpha) = (A\Delta)(AB) = 2\alpha f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}$, $\alpha > 0$.

Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$E'(\alpha) = \frac{2(\alpha^2 + 1) - 2\alpha \cdot 2\alpha}{(\alpha^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2\alpha^2}{(\alpha^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - \alpha)(1 + \alpha)}{(\alpha^2 + 1)^2}.$$

$$\text{Είναι } E'(\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(1 - \alpha)(1 + \alpha)}{(\alpha^2 + 1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 1.$$

Για κάθε $\alpha \in (0, 1)$ είναι $E'(\alpha) > 0$ και επειδή η E είναι συνεχής στο $(0, 1]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $\alpha \in (1, +\infty)$ είναι $E'(\alpha) < 0$ και επειδή η E είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η E παρουσιάζει μέγιστο για $\alpha = 1$.

$$\delta) \int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 x' \cdot F(x) dx = [xF(x)]_0^1 - \int_0^1 xF'(x) dx = F(1) - \int_0^1 xF'(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 F(x) dx = \ln 2 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 F(x) dx = \ln 2 - \frac{1}{2} [\ln(x^2+1)]_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}.$$

26184. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x > 0$.

α) Να βρείτε, με απόδειξη, την κατακόρυφη ασύμπτωτη και την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f . (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ολικό μέγιστο για $x = e^2$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^{e^2} f(x) dx$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = -\infty(+\infty) = -\infty$ γιατί $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{u} = +\infty$, άρα η ευθεία $x = 0$, δηλαδή ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = 0$, άρα η ευθεία $y = 0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f .

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{2 - \ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}.$$

$$\text{Είναι } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq e^2.$$

Για κάθε $x \in (0, e^2)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (e^2, +\infty)$ είναι $f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e^2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e^2, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει μέγιστο για $x = e^2$.

$$\gamma) I = \int_1^{e^2} f(x) dx = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{e^2} \ln x (2\sqrt{x})' dx = [\ln x \cdot 2\sqrt{x}]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{x} \cdot 2\sqrt{x} dx \Leftrightarrow$$

$$I = 2 \cdot 2\sqrt{e^2} - 2 \int_1^{e^2} \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} dx = 4e - 2 [2\sqrt{x}]_1^{e^2} = 4e - 4e + 4 = 4$$

27321. Σε μια χώρα, οι επιστήμονες μελέτησαν για μεγάλο χρονικό διάστημα την μεταβολή του πληθυσμού των ψαριών σε έναν ποταμό και δημιούργησαν ένα προσεγγιστικό μαθηματικό μοντέλο που συσχετίζει τον πληθυσμό x των ψαριών στο τέλος ενός συγκεκριμένου έτους με τον αναμενόμενο πληθυσμό y των ψαριών στο τέλος της αμέσως επόμενης χρονιάς. Το μοντέλο εκφράζεται από τη σχέση $y = f(x) = \alpha x e^{-\beta x}$, $x \in (0, +\infty)$ όπου α, β θετικές σταθερές, με $\beta \in (0, 1)$ και $\alpha \in (1, +\infty)$.

α) Να βρείτε την τιμή του τρέχοντος πληθυσμού x που μεγιστοποιεί τον πληθυσμό y των ψαριών το επόμενο έτος σύμφωνα με αυτό το μοντέλο. Ποια είναι αυτή η μέγιστη τιμή του πληθυσμού y ;

(Μονάδες 9)

β) Να εξηγήσετε γιατί ένας απεριόριστα μεγάλος πληθυσμός ψαριών δεν θα είναι βιώσιμος την αμέσως επόμενη χρονιά. (Μονάδες 7)

γ) Θεωρούμε συνάρτηση F η οποία είναι μια παράγουσα (αρχική) της συνάρτησης f . Να αποδείξετε

$$\text{ότι } F(\beta) - F(2\beta) = \frac{\alpha}{\beta^2} \cdot \frac{2\beta^2 + 1 - (1 + \beta^2)e^{\beta^2}}{e^{2\beta^2}}. \quad (\text{Μονάδες 9})$$

Λύση

α) Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = \alpha e^{-\beta x} - \alpha \beta x e^{-\beta x} = \alpha e^{-\beta x} (1 - \beta x)$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha e^{-\beta x} (1 - \beta x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \beta x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{\beta}.$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{\beta}\right)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in \left(\frac{1}{\beta}, +\infty\right)$ είναι $f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής,

είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{1}{\beta}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{\beta}, +\infty\right)$. Ο πληθυσμός την επόμενη χρονιά

γίνεται μέγιστος όταν ο σημερινός πληθυσμός είναι $x = \frac{1}{\beta}$. Η μέγιστή τιμή του είναι $f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{\alpha}{\beta e}$.

β) Όταν ο πληθυσμός των ψαριών είναι απεριόριστα μεγάλος, τότε $x \rightarrow +\infty$ και τότε

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha x e^{-\beta x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x}{e^{\beta x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{\beta e^{\beta x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} 0$, δηλαδή την αμέσως επόμενη χρονιά ο πληθυσμός των ψαριών πρακτικά θα εξαφανιστεί.

$$\gamma) \text{ Είναι } F(\beta) - F(2\beta) = \int_{2\beta}^{\beta} f(x) dx = \alpha \int_{2\beta}^{\beta} x e^{-\beta x} dx = \alpha \int_{2\beta}^{\beta} x \left(-\frac{1}{\beta} e^{-\beta x}\right) dx =$$

$$\alpha \left[-x \frac{1}{\beta} e^{-\beta x} \right]_{2\beta}^{\beta} + \alpha \int_{2\beta}^{\beta} e^{-\beta x} dx = -\alpha \left(e^{-\beta^2} - 2e^{-2\beta^2} \right) - \alpha \left[-\frac{1}{\beta} e^{-\beta x} \right]_{2\beta}^{\beta} = \dots = \frac{\alpha}{\beta^2} \cdot \frac{2\beta^2 + 1 - (1 + \beta^2)e^{\beta^2}}{e^{2\beta^2}}$$

27322. Ο νόμος του Νεύτωνα που αφορά την μείωση της θερμοκρασίας T (σε βαθμούς Κελσίου) ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες), ορίζεται από την εξίσωση

$$T(t) = E + (T_0 - E)e^{-kt} \quad \text{όπου:}$$

- E είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου στον οποίο βρίσκεται το σώμα με $E < T_0$.
- $T_0 = T(0)$ είναι η αρχική θερμοκρασία του σώματος τη στιγμή που τοποθετείται στο περιβάλλοντα χώρο.
- k είναι μια θετική σταθερά.

α) Να υπολογίσετε το $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$ και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $T'(t) = k[E - T(t)]$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 (E - T(t)) \cdot \ln(T(t)) dt$ ισούται με $\frac{2e^3 - 3e^4}{k}$ αν είναι $T(0) = e^4$ και $T(1) = e^3$. (Μονάδες 10)

Λύση

$$\alpha) \lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [E + (T_0 - E)e^{-kt}] \stackrel{-kt=x}{=} \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \Rightarrow x \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow -\infty}} [E + (T_0 - E)e^x] = E + (T_0 - E) \cdot 0 = E$$

β) Η συνάρτηση T είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $T'(t) = (E + (T_0 - E)e^{-kt})' = -k(T_0 - E)e^{-kt}$ (1)

$$\text{Είναι } T(t) = E + (T_0 - E)e^{-kt} \Leftrightarrow T(t) - E = (T_0 - E)e^{-kt} \Leftrightarrow -(T_0 - E)e^{-kt} = E - T(t) \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $T'(t) = k[E - T(t)]$.

$$\gamma) \text{ Είναι } I = \int_0^1 (E - T(t)) \cdot \ln(T(t)) dt = \int_0^1 \frac{1}{k} T'(t) \cdot \ln(T(t)) dt$$

Θέτουμε $T(t) = x$ οπότε $T'(t) dt = dx$. Για $t=0$ είναι $x=T(0)=e^4$ και για $t=1$ είναι $x=T(1)=e^3$, οπότε:

$$I = \frac{1}{k} \int_{e^4}^{e^3} \ln x dx = \frac{1}{k} \int_{e^4}^{e^3} \ln x \cdot (x)' dx = \frac{1}{k} [x \ln x]_{e^4}^{e^3} - \frac{1}{k} \int_{e^4}^{e^3} \frac{1}{x} \cdot x dx = \frac{1}{k} (3e^3 - 4e^4) - \frac{1}{k} (e^3 - e^4) = \frac{2e^3 - 3e^4}{k}.$$

29549. Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δευτέρα παράγωγο τέτοια, ώστε: $f'(0) = f(0) = 0$ και $\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta \mu x dx = 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \int_0^\pi f''(x) \eta \mu x dx = - \int_0^\pi f'(x) \sigma \nu x dx. \quad (\text{Μονάδες } 07)$$

$$\beta) f(\pi) = 0. \quad (\text{Μονάδες } 08)$$

$$\gamma) \text{ Στο διάστημα } (0, \pi) \text{ υπάρχει μια τουλάχιστον πιθανή θέση σημείου καμπής.} \quad (\text{Μονάδες } 10)$$

Λύση

$$\alpha) \int_0^\pi f''(x) \eta \mu x dx = \int_0^\pi (f'(x))' \eta \mu x dx = [f'(x) \eta \mu x]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) \sigma \nu x dx =$$

$$f'(\pi) \eta \mu \pi - f'(0) \eta \mu 0 - \int_0^\pi f'(x) \sigma \nu x dx = - \int_0^\pi f'(x) \sigma \nu x dx$$

$$\beta) \int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta \mu x dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x) \eta \mu x dx + \int_0^\pi f''(x) \eta \mu x dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^\pi f(x) (-\sigma \nu x)' dx - \int_0^\pi f'(x) \sigma \nu x dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$- [f(x) \sigma \nu x]_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) \sigma \nu x dx - \int_0^\pi f'(x) \sigma \nu x dx = 0 \Leftrightarrow f(\pi) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(\pi) = 0.$$

γ) Επειδή $f(\pi) = f(0)$, για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[0, \pi]$, οπότε υπάρχει $x_1 \in (0, \pi)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = 0$. Επειδή $f'(x_1) = f'(0)$, για την f' εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[0, x_1]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (0, x_1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$. Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ το σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι πιθανό σημείο καμπής της f .

Ιδιότητες ολοκληρωμάτων

Θέμα 4ο

23219. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(1) = f'(1) = 2$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι :

i. $\int_0^1 f(x) dx > 1$. (Μονάδες 6)

ii. $\int_0^1 xf'(x) dx < 1$. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ έχει εξίσωση

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 2 = 2x - 2 \Leftrightarrow y = 2x.$$

Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq 2x$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq 2x$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$, άρα και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

γ) i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq 2x$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$, άρα

$$\int_0^1 f(x) dx > \int_0^1 2x dx = \left[x^2 \right]_0^1 = 1.$$

ii. $\int_0^1 xf'(x) dx < 1 \Leftrightarrow [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx < 1 \Leftrightarrow f(1) - \int_0^1 f(x) dx < 1 \Leftrightarrow -\int_0^1 f(x) dx < 1 - 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx > 1$ ισχύει.

24758. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, και η συνάρτηση $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$ για την οποία ισχύει $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ και για $x=-1$ και στη συνέχεια ότι $f(1) = f(-1) = 0$.

(Μονάδες 6)

β) $f'(1) \geq 0$ και $f'(-1) \leq 0$.

(Μονάδες 8)

γ) η f δεν είναι κοίλη.

(Μονάδες 5)

δ) $\int_{-1}^1 (x^3 - 3x)f'(x) dx \leq 0$.

(Μονάδες 6)

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι $g(1) = g(-1) = 0$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) \geq g(1)$ και $g(x) \geq g(-1)$, άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ και για $x=-1$.

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = 2xf(x) + (x^2 - 1)f'(x)$ και τα $x=1$ και $x=-1$ είναι εσωτερικά του πεδίου ορισμού της, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $g'(1) = 0 \Leftrightarrow 2f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$ και $g'(-1) = 0 \Leftrightarrow 2f(-1) = 0 \Leftrightarrow f(-1) = 0$.

β) Είναι $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1}$. Είναι $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)f(x) \geq 0$ (1), οπότε:

Αν $x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$ τότε από την (1) προκύπτει $f(x) > 0$ οπότε $\frac{f(x)}{x - 1} > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x - 1} \geq 0 \Rightarrow f'(1) \geq 0$ Αν

$x < -1 \Leftrightarrow x + 1 < 0$ τότε από την (1) προκύπτει ότι $f(x) > 0$ οπότε $\frac{f(x)}{x + 1} < 0 \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)}{x + 1} \leq 0 \Rightarrow f'(-1) \leq 0.$$

γ) Έστω ότι η f είναι κοίλη τότε η f' θα είναι γνησίως φθίνουσα. Τότε $-1 < 1 \Leftrightarrow f'(-1) > f'(1)$ που είναι άτοπο αφού $f'(-1) \leq 0 \leq f'(1)$. Άρα η f δεν είναι κοίλη.

$$\delta) \int_{-1}^1 (x^3 - 3x)f'(x)dx = \left[(x^3 - 3x)f'(x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (3x^2 - 3)f(x)dx = 0 - 0 - 3 \int_{-1}^1 g(x)dx.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) \geq 0$, άρα $\int_{-1}^1 g(x)dx \geq 0 \Leftrightarrow -3 \int_{-1}^1 g(x)dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 (x^3 - 3x)f'(x)dx \leq 0$.

25766. Στον διπλανό πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου μιας συνάρτησης f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια και επιπλέον ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $f(0) = 1$ και $f(2) = 5$ τότε:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
f'(x)		+	o	-	o	+	o	-

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = |x^2 - 4| + 5$.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 xf(x)dx = 0$.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Επειδή η f είναι άρτια, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = f(x)$. Για $x = 2$ είναι $f(-2) = f(2) = 5$.

Για κάθε $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$ είναι $f'(x) > 0$ και η f είναι συνεχής στα $(-\infty, -2]$, $[0, 2]$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα αυτά. Για κάθε

$x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$ είναι $f'(x) < 0$ και η f είναι συνεχής στα $[-2, 0]$, $[2, +\infty)$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στα

διαστήματα αυτά. Η f έχει τοπικά μέγιστα τα $f(-2) = f(2) = 5$ και τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 1$.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$	+	o	-	o	+	o	-	
$f(x)$								

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) \stackrel{-x=u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \Rightarrow u \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} f(u) = -\infty$.

Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, -2]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = (-\infty, 5]$. Στο διάστημα $\Delta_2 = [-2, 0]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = [1, 5]$. Στο διάστημα $\Delta_3 = [0, 2]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_3) = [1, 5]$. Στο διάστημα $\Delta_4 = [2, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_4) = (-\infty, 5]$.

Η f έχει σύνολο τιμών το $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) \cup f(\Delta_4) = (-\infty, 5]$.

γ) Επειδή $f(A) = (-\infty, 5]$, είναι $f(x) \leq 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Όμως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|x^2 - 4| \geq 0 \Leftrightarrow |x^2 - 4| + 5 \geq 5$, άρα η εξίσωση $f(x) = |x^2 - 4| + 5$ έχει λύση αν και μόνο αν

$$\begin{cases} f(x) = 5 \\ |x^2 - 4| + 5 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ή } -2 \\ |x^2 - 4| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ή } -2 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$\delta) \int_{-1}^1 xf(x)dx = \int_{-1}^1 xf(-x)dx \stackrel{\substack{-x=u \Rightarrow dx=-du \\ x=-1 \Rightarrow u=1 \\ x=1 \Rightarrow u=-1}}{=} \int_1^{-1} -uf(u)(-du) = \int_1^{-1} uf(u)du = -\int_{-1}^1 uf(u)du = -\int_{-1}^1 xf(x)dx \Leftrightarrow$$

$$2 \int_{-1}^1 xf(x)dx = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 xf(x)dx = 0.$$

27668. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-3)(x-\lambda)(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$ με $1 < \lambda < 3$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε η συνάρτηση f έχει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής. (Μονάδες 08)

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(x) = -f(4-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να υπολογίσετε το

ολοκλήρωμα $\int_1^3 f(x)dx$. (Μονάδες 05)

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = (x-\lambda)(x-1) + (x-3)(x-1) + (x-3)(x-\lambda) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = x^2 - x - \lambda x + \lambda + x^2 - 3x - x + 3 + x^2 - \lambda x - 3x + 3\lambda \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 2(\lambda+4)x + 4\lambda + 3$$

$$\text{Η } f' \text{ είναι τριώνυμο με διακρίνουσα } \Delta = 4(\lambda+4)^2 - 12(4\lambda+3) = 4(\lambda^2 + 8\lambda + 16 - 12\lambda - 9) = 4(\lambda^2 - 4\lambda + 7)$$

Το τριώνυμο $\lambda^2 - 4\lambda + 7$ έχει διακρίνουσα αρνητική, άρα $\Delta = 4(\lambda^2 - 4\lambda + 7) > 0$ για κάθε $\lambda \in (1, 3)$, οπότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

β) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της f' με $x_1 < x_2$, τότε για κάθε $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, x_1], [x_2, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα σε αυτά.

Για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(x_1)$ και τοπικό ελάχιστο το $f(x_2)$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = 6x - 2(\lambda+4)$.

$$\text{Είναι } f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 6x \geq 2(\lambda+4) \Leftrightarrow x \geq \frac{\lambda+4}{3}.$$

Για κάθε $x < \frac{\lambda+4}{3}$ είναι $f''(x) < 0$ και για κάθε $x > \frac{\lambda+4}{3}$ είναι $f''(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι κοίλη στο $\left(-\infty, \frac{\lambda+4}{3}\right]$ και κυρτή στο $\left[\frac{\lambda+4}{3}, +\infty\right)$, οπότε έχει σημείο καμπής το $\left(\frac{\lambda+4}{3}, f\left(\frac{\lambda+4}{3}\right)\right)$.

$$\gamma) \text{ Είναι } \int_1^3 f(x)dx = -\int_1^3 f(4-x)dx.$$

Θέτουμε $4-x=u \Leftrightarrow x=4-u$, $dx=-du$. Για $x=1$ είναι $u=3$ και για $x=3$ είναι $u=1$, οπότε

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_3^1 f(u)du \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx = -\int_1^3 f(x)dx \Leftrightarrow 2\int_1^3 f(x)dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx = 0.$$

31551. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} & , x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$

και $\varphi(x) = x \sin x - \eta\mu x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi, \pi]$ και να βρείτε το πρόσημό της.

(Μονάδες 10)

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in (-\pi, \pi)$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^{\kappa} \varphi(x) dx = 0$.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Για κάθε $x \in (-\pi, \pi)$ είναι $\varphi'(x) = \sin x - x \eta\mu x - \sin x = -x \eta\mu x$.

Αν $x \in (-\pi, 0)$ είναι $\eta\mu x < 0 \Rightarrow x \eta\mu x > 0 \Rightarrow \varphi'(x) < 0$.

Αν $x \in (0, \pi)$ είναι $\eta\mu x > 0 \Rightarrow x \eta\mu x > 0 \Rightarrow \varphi'(x) < 0$. Επειδή η φ είναι συνεχής στο $[-\pi, \pi]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 = f(0)$, άρα η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

Για κάθε $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ είναι $f'(x) = \frac{x \sin x - \eta\mu x}{x^2} = \frac{\varphi(x)}{x^2}$.

Για κάθε $-\pi < x < 0$ επειδή η φ είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $0 < x < \pi$ επειδή η φ είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει $\varphi(x) < \varphi(0) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Η f έχει τοπικά ελάχιστα τα $f(-\pi) = 0 = f(\pi)$ και μέγιστο το $f(0) = 1$.

γ) Αν $\kappa \in (-\pi, 0)$ τότε $\varphi(x) > 0$ οπότε και $\int_{\kappa}^0 \varphi(x) dx > 0 \Leftrightarrow -\int_0^{\kappa} \varphi(x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^{\kappa} \varphi(x) dx < 0$.

Αν $\kappa \in (0, \pi)$ τότε $\varphi(x) < 0$ οπότε και $\int_0^{\kappa} \varphi(x) dx < 0$. Προφανώς αν $\kappa = 0$ τότε $\int_0^{\kappa} \varphi(x) dx = 0$.

Επομένως $\kappa = 0$.

32225. Για μια συνεχή συνάρτηση $f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν:

- $(f(x) + x)^2 = x^2(x+1)$, για κάθε $x \in [-1, +\infty)$,
- $f(1) > -1$ και $f\left(-\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$, $g(x) > 0$

α) Αν $g(x) = f(x) + x$, $x \in [-1, +\infty)$ τότε

i. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $g(x) = 0$.

(Μονάδες 05)

ii. Να αποδείξετε ότι $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 0)$ και για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x(\sqrt{x+1} - 1)$, $x \geq -1$.

(Μονάδες 07)

γ) Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή τότε να αποδείξετε ότι η $h(x) = f(x+1) - f(x)$, $x \in (-1, +\infty)$ είναι

γνησίως αύξουσα και έπειτα ότι $\int_{2023}^{2024} (f(x+1) - f(x)) dx < \int_{2023}^{2024} (f(x+2) - f(x+1)) dx$. (Μονάδες 06)

Λύση

α) i. $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + x = 0 \Leftrightarrow x^2(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1.$

ii. Για κάθε $x \in (-1, 0)$ είναι $g(x) \neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1, 0)$. Είναι $g\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, άρα $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 0)$.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $g(x) \neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$. Είναι $g(1) = f(1) + 1 > -1 + 1 = 0$, άρα $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

β) Για κάθε $x \in [-1, +\infty)$ είναι $(f(x) + x)^2 = x^2(x+1) \Leftrightarrow g^2(x) = x^2(x+1) \Leftrightarrow |g(x)| = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x+1} \Leftrightarrow |g(x)| = |x| \cdot \sqrt{x+1} \quad (1).$

Αν $x \in (-1, 0)$ είναι $g(x) < 0$, οπότε η (1) γίνεται $-g(x) = -x\sqrt{x+1} \Leftrightarrow g(x) = x\sqrt{x+1}$ και αν $x > 0$ η (1)

γίνεται $g(x) = x\sqrt{x+1}$. Άρα $g(x) = \begin{cases} x\sqrt{x+1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = x\sqrt{x+1}, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) + x = x\sqrt{x+1} \Leftrightarrow$

$f(x) = x\sqrt{x+1} - x(\sqrt{x+1} - 1), x \in \mathbb{R}.$

γ) Αν η f είναι κυρτή τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με $h'(x) = f'(x+1) - f'(x).$

Είναι $x+1 > x \Leftrightarrow f'(x+1) > f'(x) \Leftrightarrow h'(x) > 0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα.

Για κάθε $x > -1$ είναι $x < x+1 \Leftrightarrow h(x) < h(x+1) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) < f(x+2) - f(x+1)$, οπότε

$$\int_{2023}^{2024} (f(x+1) - f(x)) dx < \int_{2023}^{2024} (f(x+2) - f(x+1)) dx.$$

Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

Θέμα 2ο

32800. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [1, 9] \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Πάνω στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι τιμές των εμβαδών των χωρίων που σχηματίζει η γραφική παράσταση της f με τον άξονα $x'x$, όταν $x \in [1, 7]$.

Δίνονται ακόμη ότι:

- $\left(\int_7^9 f(x) dx \right)^2 = 16$ και

- η γραφική παράσταση της

f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στα σημεία με τετμημένες 1, 3, 5, 7.

α) Να αποδείξετε ότι

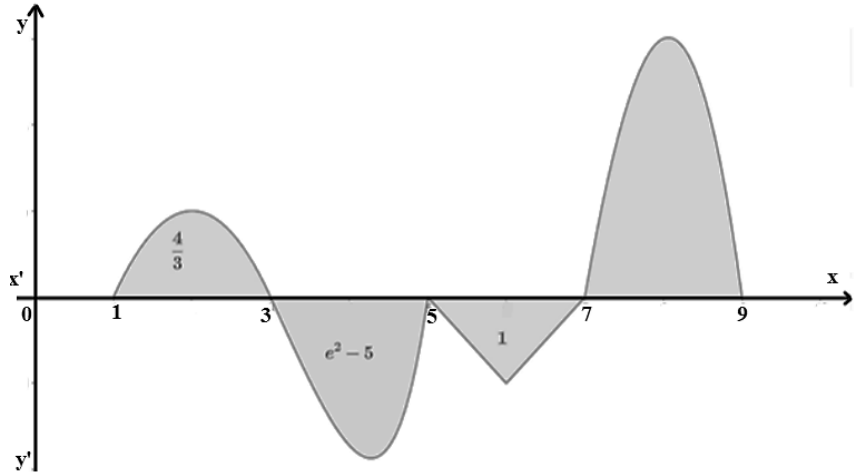
$$\int_7^9 f(x) dx = 4.$$

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$, όταν $x \in [1, 9]$. (Μονάδες 07)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^9 f(x) dx$.

(Μονάδες 08)



Λύση

α) Επειδή $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [7, 9]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 7$ και $x = 9$, είναι $\int_7^9 f(x) dx > 0$,

οπότε $\left(\int_7^9 f(x) dx \right)^2 = 16 = 4^2 \Leftrightarrow \int_7^9 f(x) dx = 4.$

$$\beta) E(\Omega) = \frac{4}{3} - (e^2 - 5) - 1 + \int_7^9 f(x) dx = \frac{4}{3} - e^2 + 5 - 1 + 4 = \frac{28}{3} - e^2$$

Θέμα 4ο

23218. Δίνεται η πολωνυμική συνάρτηση $P(x) = x^3 + 3x^2 - \lambda x + 1$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η $P(x)$ παρουσιάζει σημείο καμπής για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής K . (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να προσδιορίσετε το είδος τους. (Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι $K(-1, \lambda + 3)$ και ότι η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις x_1, x_2 , με $x_1 < -1 < x_2$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_p στο σημείο K και κατόπιν να αιτιολογήσετε ότι βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο. (Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_1 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_p και των ευθειών $x = x_1, x = -1$ είναι ίσο με το εμβαδόν E_2 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_p και των ευθειών $x = x_2, x = -1$. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Η P είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με $P'(x) = 3x^2 + 6x - \lambda$.

Η P' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με $P''(x) = 6x + 6$.

Είναι $P''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 6x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Για κάθε $x \in (-\infty, -1)$ είναι $P''(x) < 0$ και επειδή η P είναι συνεχής στο $(-\infty, -1]$ είναι κοίλη στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ είναι $P''(x) > 0$ και επειδή η P είναι συνεχής στο $[-1, +\infty)$ είναι κυρτή στο διάστημα αυτό. Η P έχει σημείο καμπής το $K(-1, P(-1))$ ή $(-1, 3 + \lambda)$.

β) Η P' είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = 36 + 12\lambda$.

Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow 36 + 12\lambda < 0 \Leftrightarrow 12\lambda < -36 \Leftrightarrow \lambda < -3$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $P'(x) > 0$, οπότε η P είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow 36 + 12\lambda = 0 \Leftrightarrow 12\lambda = -36 \Leftrightarrow \lambda = -3$ τότε $P'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2 > 0$ για κάθε $x \neq -1$ και επειδή η P είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 36 + 12\lambda > 0 \Leftrightarrow 12\lambda > -36 \Leftrightarrow \lambda > -3$ τότε η P' έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ και αφού $a = 3 > 0$ το πρόσημο της P' και η μονοτονία της P φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

X	$-\infty$	X_1	X_2	$+\infty$	
P'	+	0	-	0	+
P					

Άρα για $\lambda > -3$ η P έχει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = \frac{-6 - \sqrt{12\lambda + 36}}{6}$ και τοπικό ελάχιστο στο

$$x_2 = \frac{-6 + \sqrt{12\lambda + 36}}{6}.$$

γ) i. Αφού η P παρουσιάζει τοπικά ακρότατα είναι $\lambda > -3$. Η εφαπτομένη της C_P στο K έχει εξίσωση

$$ε: y - P(-1) = P'(-1)(x + 1) \quad y - (\lambda + 3) = (-3 - \lambda)(x + 1) \Leftrightarrow y = (-3 - \lambda)x$$

Επειδή $\lambda > -3$ είναι $(-3 - \lambda) < 0$ και επειδή διέρχεται από την αρχή O των αξόνων βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

ii. Επειδή η P είναι κοίλη στο $(-\infty, -1]$ βρίσκεται κάτω από την ε στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x \leq -1$ είναι $P(x) \leq (-3 - \lambda)x$.

Επειδή η P είναι κυρτή στο $[-1, +\infty)$, βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους άρα για κάθε $x \geq -1$ είναι $P(x) \geq (-3 - \lambda)x$.

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_{x_1}^{-1} ((-3 - \lambda)x - P(x)) dx = \int_{x_1}^{-1} ((-3 - \lambda)x - (x^3 + 3x^2 - \lambda x + 1)) dx = \\ &= \int_{x_1}^{-1} ((-3 - \lambda)x - x^3 - 3x^2 + \lambda x - 1) dx = \int_{x_1}^{-1} (-x^3 - 3x^2 - 3x - 1) dx = - \int_{x_1}^{-1} (x + 1)^3 dx = \\ &= - \left[\frac{(x + 1)^4}{4} \right]_{x_1}^{-1} = \frac{(x_1 + 1)^4}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= \int_{-1}^{x_2} (P(x) - (-3 - \lambda)x) dx = \int_{-1}^{x_2} ((x^3 + 3x^2 - \lambda x + 1) - (-3 - \lambda)x) dx = \\ &= \int_{-1}^{x_2} (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) dx = \int_{-1}^{x_2} (x + 1)^3 dx = \frac{(x_2 + 1)^4}{4} \end{aligned}$$

$$E_1 = E_2 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + 1)^4}{4} = \frac{(x_2 + 1)^4}{4} \Leftrightarrow (x_1 + 1)^4 = (x_2 + 1)^4 \Leftrightarrow (x_1 + 1 = x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ αδύνατο}) \text{ ή}$$

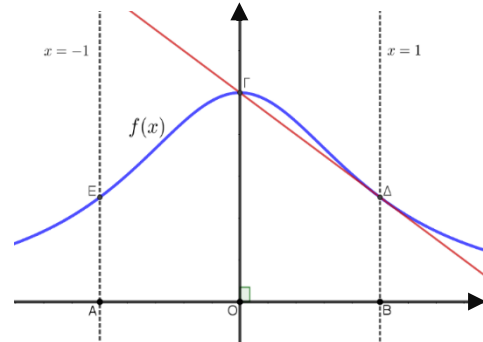
$$(x_1 + 1 = -x_2 - 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -2 \text{ (1)})$$

Επειδή τα x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $P'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - \lambda = 0$, από τους τύπους Vieta είναι

$$x_1 + x_2 = -\frac{6}{3} = -2, \text{ άρα η (1) είναι αληθής.}$$

23955. Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$

και οι ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = 1$ οι οποίες τέμνουν τον μεν άξονα $x'x$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, την δε γραφική παράσταση της f στα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ.



α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο Δ, είναι η ευθεία ΓΔ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $[0,1]$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την ευθεία ΓΔ, με εξαίρεση τα κοινά τους σημεία Γ και Δ. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 f(x) dx > \frac{3}{2}$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Είναι $f(0) = 1$ και $f(1) = \frac{1}{2}$, άρα $\Gamma(0,1)$ και $\Delta(1, \frac{1}{2})$.

Η ευθεία ΓΔ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{1 - 0} = -\frac{1}{2}$ και εξίσωση: $y - 1 = -\frac{1}{2}x \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο Δ έχει εξίσωση $y - \frac{1}{2} = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$, δηλαδή είναι η ΓΔ.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x) > -\frac{1}{2}x + 1$ για κάθε $x \in (0,1)$.

$$\text{Είναι } f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{x - 2}{2} = \frac{2 + (x - 2)(x^2 + 1)}{2(x^2 + 1)} = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{2(x^2 + 1)} \Leftrightarrow$$

$$f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{x(x^2 - 2x + 1)}{2(x^2 + 1)} = \frac{x(x - 1)^2}{2(x^2 + 1)} > 0 \text{ για κάθε } x \in (0,1), \text{ άρα } f(x) > -\frac{1}{2}x + 1 \text{ για κάθε } x \in (0,1).$$

γ) Για κάθε $x \in D_f = \mathbb{R}$ είναι $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = \frac{1}{1+(-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} = f(x)$, άρα η f είναι άρτια.

$$\text{Είναι } \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(-x) dx + \int_0^1 f(x) dx$$

Θέτουμε $-x = u \Leftrightarrow x = -u \Rightarrow dx = -du$. Για $x = 0$ είναι $u = 0$ και για $x = -1$ είναι $u = 1$. Τότε

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = -\int_1^0 f(u) du + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx.$$

Για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + 1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$ και $x = 1$, οπότε

$$\int_0^1 f(x) dx > \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) dx = \left[-\frac{x^2}{4} + x\right]_0^1 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}, \text{ οπότε } \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx > 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

24275. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{e^x}, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία $y = -x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$. (Μονάδες 07)

β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ , η οποία είναι μεγαλύτερη του 1. (Μονάδες 09)

γ) Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1, x = \rho$ ισούται με $E(\Omega) = -\frac{(\rho-1)^2}{2} - (\rho-1) + e^{-1}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 09)

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow f(x) + x - 1 = e^{-x}$, άρα

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, οπότε η ευθεία $y = -x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = -1 - e^{-x}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) < 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f(1) = -1 + 1 + \frac{1}{e} = \frac{1}{e} > 0$, $f(2) = -2 + 1 + \frac{1}{e^2} = -1 + \frac{1}{e^2} < 0$, δηλαδή $f(1)f(2) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\rho \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = 0$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα το ρ είναι μοναδικό και επειδή επιπλέον $\rho \in (1, 2)$ είναι $\rho > 1$.

γ) Για κάθε $x \in (1, \rho)$ είναι $f(x) > f(\rho) = 0$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E(\Omega) = \int_1^\rho f(x) dx = \int_1^\rho (-x + 1 + e^{-x}) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + x - e^{-x}\right]_1^\rho \Leftrightarrow$

$$E(\Omega) = -\frac{\rho^2}{2} + \rho - e^{-\rho} + \frac{1}{2} - 1 + e^{-1} = -\frac{\rho^2 - 2\rho + 1}{2} - e^{-\rho} + e^{-1} = -\frac{(\rho-1)^2}{2} - e^{-\rho} + e^{-1} \quad (1)$$

Είναι $f(\rho) = 0 \Leftrightarrow -\rho + 1 + e^{-\rho} = 0 \Leftrightarrow e^{-\rho} = \rho - 1$, οπότε η (1) γίνεται:

$$E(\Omega) = -\frac{(\rho-1)^2}{2} - (\rho-1) + e^{-1} \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

24704. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^x, x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο A τον άξονα $x'x$, με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$, είναι $E = e + (x_0 - 1)(1 - \ln x_0)$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1}{x} + e^x$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + e^x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = e$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$f((0, 1)) = (-\infty, e)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $f((0, 1))$, υπάρχει μοναδικό λόγω μονοτονίας $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$. Επομένως η γραφική παράσταση της f τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο A τον άξονα $x'x$, με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

γ) Είναι $x_0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow f(x_0) \leq f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq e$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_{x_0}^1 f(x) dx = \int_{x_0}^1 (\ln x + e^x) dx = \int_{x_0}^1 \ln x (x)' dx + [e^x]_{x_0}^1 \Leftrightarrow$

$$E = [x \ln x]_{x_0}^1 - \int_{x_0}^1 x \cdot \frac{1}{x} dx + e - e^{x_0} = -x_0 \ln x_0 - 1 + x_0 + e - e^{x_0} \quad (1)$$

Είναι $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 + e^{x_0} = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = -e^{x_0}$, οπότε η (1) γίνεται:

$$E = -x_0 \ln x_0 - 1 + x_0 + e + \ln x_0 = e + (x_0 - 1) - \ln x_0 (x_0 - 1) \Leftrightarrow E = e + (x_0 - 1)(1 - \ln x_0)$$

25147. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = f(x) \eta \mu x$, $x \in [0, 2\pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A\left(\frac{\pi}{2}, e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$,

στο διάστημα ορισμού τους $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο τομής τους.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τον άξονα $y'y$ και τις γραφικές παραστάσεις των C_f, C_g .

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Είναι $f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^{-x} = e^{-x} \eta \mu x \Leftrightarrow \eta \mu x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$, άρα οι γραφικές παραστάσεις των f, g

έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A\left(\frac{\pi}{2}, e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$, στο διάστημα ορισμού τους $[0, 2\pi]$.

β) Είναι $f'(x) = -e^{-x}$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$ και $g'(x) = f'(x) \eta \mu x + f(x) \sigma \upsilon \nu x$, άρα $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο A .

γ) Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x) - g(x)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)(1 - g(x))| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |e^{-x}(1 - \eta \mu x)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}(1 - \eta \mu x) dx \Leftrightarrow$$

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \eta \mu x dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \eta \mu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{-x})' \eta \mu x dx = e^{-\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sigma \nu \nu x dx = e^{-\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{-x})' \sigma \nu \nu x dx =$$

$$e^{-\frac{\pi}{2}} + [e^{-x} \sigma \nu \nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \eta \mu x dx \Leftrightarrow 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \eta \mu x dx = e^{-\frac{\pi}{2}} - 1 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \eta \mu x dx =, \text{ οπότε η (1) γίνεται}$$

$$E = -e^{-\frac{\pi}{2}} + 1 - \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} - 1}{2} = \frac{1 - e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}$$

25235. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sigma \nu \nu x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, της

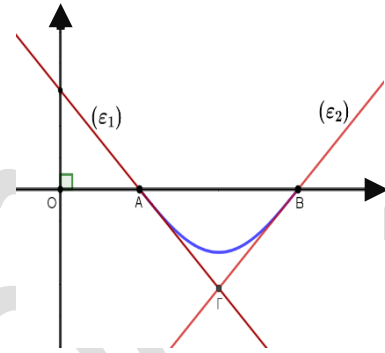
οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Στα σημεία $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ και $B\left(\frac{3\pi}{2}, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ έχουν σχεδιασθεί

οι εφαπτόμενες (ε_1) , (ε_2) αντίστοιχα της γραφικής παράστασης της f , οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ .

α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των εφαπτόμενων ευθειών

(ε_1) , (ε_2) είναι $(\varepsilon_1): y = -x + \frac{\pi}{2}$ και $(\varepsilon_2): y = x - \frac{3\pi}{2}$ αντίστοιχα.



(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) .

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{f(x) + x - \frac{\pi}{2}}$.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ με $f'(x) = -\eta \mu x$.

Είναι $(\varepsilon_1): y - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y = -x + \frac{\pi}{2}$ και

$(\varepsilon_2): y - f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y = \left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y = x - \frac{3\pi}{2}$

β) Για τις συντεταγμένες του σημείου τομής Γ των (ε_1) , (ε_2) , έχουμε:

$$\begin{cases} y = -x + \frac{\pi}{2} \\ y = x - \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow 2y = -\pi \Leftrightarrow y = -\frac{\pi}{2}$$

και $-\frac{\pi}{2} = x - \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow x = \pi$, άρα $\Gamma\left(\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει εμβαδό

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB)|y_\Gamma| = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$. Το εμβαδόν του χωρίου Ω_1 που περικλείεται από τη C_f και τον

άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega_1) = -\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sigma \nu \nu x dx = -[\eta \mu x]_{\pi/2}^{3\pi/2} = -(-1 - 1) = 2$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E(\Omega) = (AB\Gamma) - E(\Omega_1) = \frac{\pi^2}{4} - 2$.

γ) Επειδή η f είναι κυρτή στο $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό,

εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ είναι $f(x) > -x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(x) + x - \frac{\pi}{2} > 0$.

Ακόμη $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left(f(x) + x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$, οπότε αν θέσουμε $f(x) + x - \frac{\pi}{2} = u$, προκύπτει ότι

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{f(x) + x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{u} = +\infty.$$

25259. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, που είναι τέτοια, ώστε:

- η γραφική παράσταση της f , να εφάπτεται της $\varepsilon: y = \frac{1}{4}$, στο $x_0 = 0$.
- είναι κυρτή και
- $f(1) = 1$.

α) Να αποδείξει ότι:

i. $f(0) = \frac{1}{4}$ και $f'(0) = 0$. (Μονάδες 06) ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f(x) - 1}{\eta\mu x \cdot f(x)} = 0$. (Μονάδες 07)

β) Επιπλέον δίνεται ότι η πρώτη παράγωγος της f είναι συνεχής.

- i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$. (Μονάδες 06)
- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f' , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$. (Μονάδες 06)

Λύση

α) i. Επειδή το σημείο $A(0, f(0))$ ανήκει στην ευθεία ε , είναι $f(0) = \frac{1}{4}$.

Επειδή η ε εφάπτεται της C_f στο A , είναι $f'(0) = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow f'(0) = 0$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f(x) - 1}{\eta\mu x \cdot f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\left(f(x) - \frac{1}{4}\right)}{\eta\mu x \cdot f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \frac{f(x) - f(0)}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x} \cdot f(x)} = \frac{4f'(0)}{1 \cdot f(0)} = 0$.

β) i. Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε $0 \leq x \leq 1$ είναι $f'(x) \geq f'(0) = 0$.

ii. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1-1, οπότε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = f'(0) \Leftrightarrow x = 0$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E = \int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

25746. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι $f'(x) > f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}f(x)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x < 0$. (Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(|\eta\mu x| + 1) = f(|x| + 1)$. (Μονάδες 7)

δ) Αν E το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, να αποδείξετε ότι $E < f(1)$. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)).$$

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) > f(x)$, είναι $g'(x) > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x < 0$ είναι $g(x) < g(0) \Leftrightarrow e^{-x}f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$ και για κάθε $x > 0$ είναι

$$g(x) > g(0) \Leftrightarrow e^{-x}f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0.$$

γ) Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > f(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, οπότε είναι και 1-1 στο $[0, +\infty)$.

$$\text{Είναι } |\eta\mu x| + 1 > 0, |x| + 1 > 0, \text{ οπότε } f(|\eta\mu x| + 1) = f(|x| + 1) \Leftrightarrow |\eta\mu x| + 1 = |x| + 1 \Leftrightarrow |\eta\mu x| = |x| \Leftrightarrow x = 0.$$

δ) Επειδή για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) \geq 0$ και η f είναι συνεχής, το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \int_0^1 f(x) dx. \text{ Είναι } f'(x) > f(x) \Rightarrow \int_0^1 f'(x) dx > \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow E < f(1) - f(0) \Leftrightarrow E < f(1).$$

25747. Δίνεται συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ και ισχύουν $f(1) = 1$ και $f(x) \cdot f'(x) = -x + 1$, για κάθε $x \in (0, 2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f^2(x) = -x^2 + 2x$ για κάθε $x \in [0, 2]$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$ για κάθε $x \in [0, 2]$. (Μονάδες 6)

γ) Αφού αιτιολογήσετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι ημικύκλιο με κέντρο $K(1, 0)$ και ακτίνα 1, να τη σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 7)

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x) dx$. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Για κάθε $x \in (0, 2)$ είναι $f(x)f'(x) = -x + 1 \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = -2x + 2 \Leftrightarrow (f^2(x))' = (-x^2 + 2x)' \Leftrightarrow f^2(x) = -x^2 + 2x + c, c \in \mathbb{R}$. Για $x = 1$ είναι $f^2(1) = -1 + 2 + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$, οπότε $f^2(x) = -x^2 + 2x$ για κάθε $x \in (0, 2)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$, είναι συνεχής και στα $x_1 = 0, x_2 = 2$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + 2x) \Leftrightarrow f^2(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f^2(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + 2x) \Leftrightarrow f^2(2) = 0 \Leftrightarrow f(2) = 0.$$

$$\text{Τελικά } f^2(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \in (0, 2) \\ 0, & x = 0 \text{ ή } x = 2 \end{cases} = -x^2 + 2x, x \in [0, 2]$$

β) Για κάθε $x \in [0, 2]$ είναι $f^2(x) = -x^2 + 2x \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{-x^2 + 2x}$ (1)

$$\text{Είναι } f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2 + 2x} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2.$$

Για κάθε $x \in (0, 2)$ είναι $f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Επειδή $f(1) = 1$, είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$, οπότε η (1) γίνεται $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$.

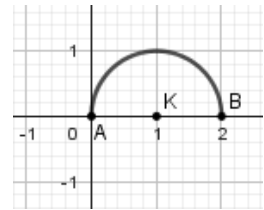
$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x^2 + 2x}, & x \in (0, 2) \\ 0, & x = 0 \text{ ή } x = 2 \end{cases} = \sqrt{-x^2 + 2x}, \quad x \in [0, 2].$$

γ) Είναι $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{-x^2 + 2x} = y, \quad y \geq 0$, οπότε

$$-x^2 + 2x = y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1. \text{ Η γραφική παράσταση της } f \text{ είναι το}$$

ημικύκλιο με κέντρο $K(1,0)$ και ακτίνα 1 που βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, μαζί με τα σημεία A και B .



δ) Το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι το εμβαδό του προηγούμενου ημικυκλίου, οπότε

$$\int_0^2 f(x) dx = \frac{\pi \rho^2}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ τ.μ.}$$

25757. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (1-x)\eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right), & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. (Μονάδες 09)

β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in [0,1]$, ισχύει $0 \leq f(x) \leq 1-x$. (Μονάδες 07)

γ) Να αποδειχθεί ότι για το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0, x=1$ ισχύει $E < \frac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 09)

Λύση

α) Στο διάστημα $[0,1)$ η f είναι συνεχής ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

$$\text{Για κάθε } x \in [0,1) \text{ είναι } 0 \leq \eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq (1-x)\eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right) \leq 1-x.$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 = f(0)$, επομένως η f είναι συνεχής στο $[0,1]$.

β) Στο προηγούμενο σκέλος δείξαμε ότι για κάθε $x \in [0,1)$ είναι

$$0 \leq (1-x)\eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right) \leq 1-x \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 1-x. \text{ Επειδή για } x=1 \text{ είναι } f(1)=0 \text{ και } 0 \leq f(0) \leq 1-0, \text{ η}$$

σχέση $0 \leq f(x) \leq 1-x$ αληθεύει για κάθε $x \in [0,1]$.

γ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \int_0^1 f(x) dx.$$

Για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $f(x) \leq 1-x$ και η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [0,1]$, οπότε

$$\int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 (1-x) dx \Leftrightarrow E < \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow E < \frac{1}{2} \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

25765. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x + x$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} . (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x$. (Μονάδες 8)

γ) Έστω $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(x) = e^{f(|x|)}$ για κάθε $x \neq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(x) = x^2 e^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g , τον $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -1$, $x = 1$. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{2}{x} + 1$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε είναι 1-1 και

αντιστρέφεται. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2\ln x + x) = -\infty + 0 = -\infty$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2\ln x + x) = +\infty + \infty = +\infty$. Επειδή η f είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbb{R}$.

β) Επειδή η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $f(A) = \mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $D_f = (0, +\infty)$, έχουμε:

Αν $x \leq 0$ τότε η ανίσωση $f^{-1}(x) > x$ είναι αληθής.

Αν $x > 0$ τότε $f^{-1}(x) > x \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) > f(x) \Leftrightarrow f(x) < x \Leftrightarrow 2\ln x + x < x \Leftrightarrow 2\ln x < 0 \Leftrightarrow$

$\ln x < \ln 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$. Τελικά η ανίσωση αληθεύει για $x < 1$.

γ) i. Η συνάρτηση $f(|x|)$ ορίζεται όταν $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$, τότε $f(|x|) = 2\ln|x| + |x|$ και

$g(x) = e^{f(|x|)} = e^{2\ln|x| + |x|} = e^{\ln x^2} \cdot e^{|x|} = x^2 e^{|x|}$, $x \neq 0$.

Επειδή η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, οπότε $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{|x|} = 0$, οπότε

$g(x) = \begin{cases} x^2 e^{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = x^2 e^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

ii. $E(\Omega) = \int_{-1}^1 |g(x)| dx = \int_{-1}^1 x^2 e^{|x|} dx = \int_{-1}^0 x^2 e^{-x} dx + \int_0^1 x^2 e^x dx \Leftrightarrow$

$E(\Omega) = \left[-x^2 e^{-x} \right]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 2xe^{-x} dx + \left[x^2 e^x \right]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx \Leftrightarrow$

$E(\Omega) = e + \left[-2xe^{-x} \right]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 2e^{-x} dx + e - \left[2xe^x \right]_0^1 + \int_0^1 2e^x dx \Leftrightarrow$

$E(\Omega) = e - 2e - 2 \left[e^{-x} \right]_{-1}^0 + e - 2e + 2 \left[e^x \right]_0^1 = -2 + 2e - 2e + 2e - 2 = 2(e - 2)$ τ.μ.

26183. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{4}\right), & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \frac{4\ln x}{x}, & x > 1 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 1. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο κρίσιμα σημεία στο διάστημα $[0, +\infty)$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$, είναι $E = \frac{\ln 4}{\pi}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 = f(1)$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 - \frac{4 \ln x}{x}\right) = 1$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ η f είναι συνεχής στο 1.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{4}\right) - 1}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \left(\frac{\pi x}{4}\right)'}{1} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\pi}{2}$ και

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \frac{4 \ln x}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-4 \ln x}{x^2 - x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{4}{x}}{2x - 1} = \frac{-4}{1} = -4$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

γ) Επειδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1 που είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της, το $x=1$ είναι κρίσιμο σημείο της f .

Για $x \in (0,1)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$f'(x) = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \left(\frac{\pi x}{4}\right)' = \frac{\pi}{4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$. Επειδή για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $f'(x) > 0$, η f δεν έχει κρίσιμα

σημεία στο διάστημα αυτό.

Για $x > 1$ είναι $f'(x) = -4 \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4 \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$.

Επειδή τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης είναι τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία δεν είναι παραγωγίσιμη και οι ρίζες της f' , η f έχει ακριβώς δύο κρίσιμα σημεία τα 1, e .

δ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{4}\right) dx.$$

Θέτουμε $\frac{\pi x}{4} = u \Leftrightarrow x = \frac{4u}{\pi}$, άρα $dx = \frac{4}{\pi} du$. Για $x = 0$ είναι $u = 0$ και για $x = 1$ είναι $u = \frac{\pi}{4}$, οπότε

$$E = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi u du = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta \mu u}{\sigma \nu u} du = -\frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sigma \nu u)'}{\sigma \nu u} du = -\frac{4}{\pi} [\ln(\sigma \nu u)]_0^{\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$E = -\frac{4}{\pi} \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{4}{\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{4}{\pi} \left(-\ln 2^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2 \ln 2}{\pi}.$$

27031. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}x^3$, με $x \in (-\infty, 0]$ και τυχαίο σημείο $A\left(a, -\frac{a^3}{3}\right)$ με $a < 0$ της

γραφικής της παράστασης.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο A. (Μονάδες 06)

β) i. Ένα περιπολικό A κινείται κατά μήκος της καμπύλης

$$y = -\frac{1}{3}x^3, \quad x \leq 0 \text{ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του}$$

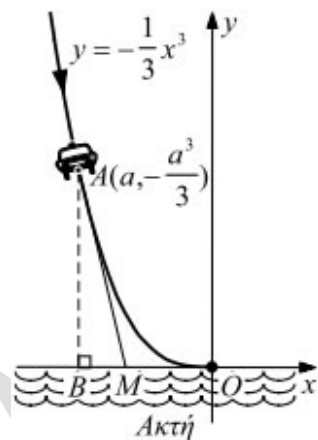
φωτίζει κατευθείαν εμπρός (όπως φαίνεται στο σχήμα).

Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = -\alpha(t)$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της

τετμημένης του σημείου M της ακτής, στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3 . (Μονάδες 08)

ii. Να ερμηνεύσετε το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του σημείου M. (Μονάδες 02)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη -3 . (Μονάδες 09)



Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με $f'(x) = -x^2$. Η εφαπτομένη της C_f στο A είναι η ευθεία

$$\varepsilon: y - f(a) = f'(a)(x - a) \Leftrightarrow y + \frac{a^3}{3} = -a^2(x - a) \Leftrightarrow y = -a^2x + \frac{2a^3}{3}.$$

β) i. Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\alpha(t_0) = -3$ και $\alpha'(t_0) = -\alpha(t_0) = 3$.

ii. Επειδή $\alpha(t) < 0$ είναι $\alpha'(t) = -\alpha(t) > 0$, δηλαδή η τετμημένη του σημείου M αυξάνεται αφού το M πλησιάζει το O.

γ) Για $\alpha = -3$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση ε :

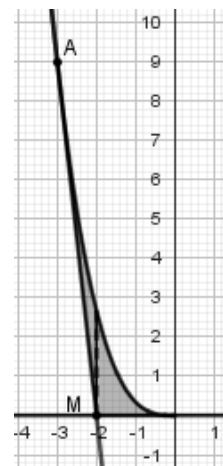
$$y = -(-3)^2 x + \frac{2 \cdot (-3)^3}{3} \Leftrightarrow y = -9x - 18.$$

Για $y = 0$ είναι $-9x - 18 = 0 \Leftrightarrow -9x = 18 \Leftrightarrow x = -2$, άρα $M(-2, 0)$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E(\Omega) = \int_{-3}^{-2} \left(-\frac{1}{3}x^3 - (-9x - 18) \right) dx + \int_{-2}^0 \left(-\frac{1}{3}x^3 \right) dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \left[-\frac{1}{12}x^4 + \frac{9}{2}x^2 + 18x \right]_{-3}^{-2} + \left[-\frac{1}{12}x^4 \right]_{-2}^0 = \dots = \frac{9}{4}$$



27408. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 9 - x^2$. Μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης και του οριζώντιου άξονα $x'x$ είναι εγγεγραμμένο το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$.

Οι κορυφές $A(x, 0)$ και $\Delta(-x, 0)$ είναι σημεία του άξονα $x'x$, ενώ οι κορυφές $B(x, f(x))$ και $\Gamma(-x, f(-x))$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

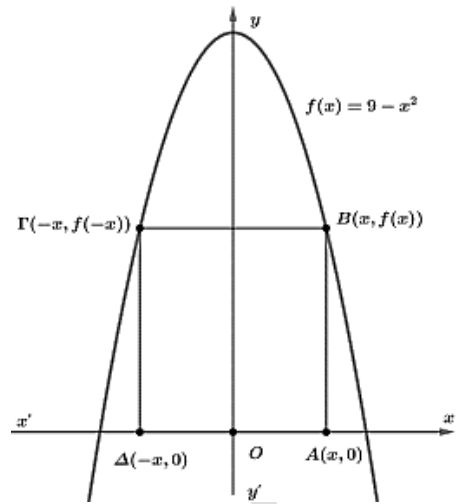
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ ως συνάρτηση του $x \in [0, 3]$ δίνεται από την συνάρτηση

$$E(x) = 18x - 2x^3. \quad (\text{Μονάδες } 6)$$

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση $E(x)$ ως προς την μονοτονία. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, ώστε αυτό να έχει το μέγιστο εμβαδό, και να αποδείξετε ότι αυτό ισούται με $12\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 6)

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , του άξονα $x'x$ και είναι εξωτερικό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ όταν το εμβαδό του παίρνει την μέγιστη τιμή του. (Μονάδες 7)



Λύση

α) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E(x) = (A\Delta)(AB) = 2x \cdot f(x) = 2x(9 - x^2) = 18x - 2x^3$, $x \in [0, 3]$

β) Η E είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$ με $E'(x) = 18 - 6x^2$.

$$\text{Είναι } E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 18 - 6x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -6x^2 \geq -18 \Leftrightarrow x^2 \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{3} \quad x \in (0, 3)$$

Για κάθε $x \in (0, \sqrt{3})$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (\sqrt{3}, 3)$ είναι $f'(x) < 0$, επειδή η E είναι συνεχής στο $[0, 3]$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \sqrt{3}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\sqrt{3}, 3]$.

γ) Το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο για $x = \sqrt{3}$, τότε οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $A\Delta = 2x = 2\sqrt{3}$ και $B\Gamma = f(\sqrt{3}) = 9 - (\sqrt{3})^2 = 9 - 3 = 6$. Το μέγιστο εμβαδό είναι

$$E(\sqrt{3}) = 18\sqrt{3} - 2(\sqrt{3})^3 = 18\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}.$$

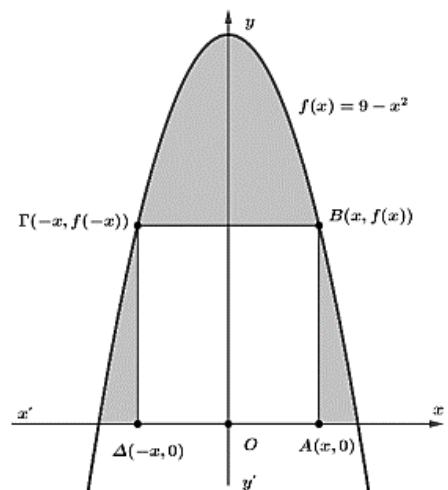
δ) Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E(\Omega) = \int_{-3}^3 f(x) dx - E(\sqrt{3}) = \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx - 12\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^3 - 12\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = 27 - 9 + 27 - 9 - 12\sqrt{3} = 36 - 12\sqrt{3} = 12(3 - \sqrt{3})$$

τετραγωνικές μονάδες



28476. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(x-1)}{\ln x} = 0$ και

$$f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) i. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$. (Μονάδες 03)

ii. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$. (Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα. (Μονάδες 06)

γ) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 06)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου E , που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και των ευθειών $x=0$ και $x=1$. (Μονάδες 07)

Λύση

α) i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$

ii. Έστω $g(x) = \frac{f(x)(x-1)}{\ln x}$, $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, τότε $f(x) = g(x) \frac{\ln x}{x-1}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι συνεχής στο $x=1$, άρα

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \frac{\ln x}{x-1} = 0 \cdot 1 = 0$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή $f(1) = 0$, η $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

γ) Για κάθε $x < 1$ είναι $f(x) < f(1) = 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $f(x) > f(1) = 0$.

δ) Επειδή η f είναι συνεχής και $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = -\int_0^1 f(x) dx = -\int_0^1 (x)' f(x) dx = -\left[x f(x) \right]_0^1 + \int_0^1 x f'(x) dx = -f(1) + \int_0^1 x \sqrt{x^2 + 1} dx \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} \int_0^1 2x (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + 1)' (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot \left(2^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}.$$

31148. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = e^{-x}$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

β) Θεωρούμε τα σημεία $B(x, f(x))$ και $\Gamma(x, g(x))$ με $x > 0$. Η παράλληλη ευθεία από το B προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Δ , ενώ η παράλληλη ευθεία από το Γ προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Z .

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $B\Gamma Z\Delta$ είναι $E(x) = \frac{x^3}{e^x}$, $x > 0$. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του x , το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της

συνάρτησης $h(x) = \frac{f(x) - g(x)}{x}$ καθώς και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \ln 2$ και $x = 1$, είναι

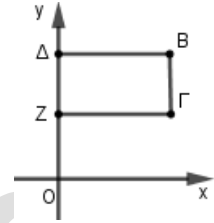
$\ln\sqrt{2e} - \frac{2}{e}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{e^x} \geq e^{-x} \Leftrightarrow x^2+1 \geq e^x e^{-x} \Leftrightarrow x^2+1 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$ ισχύει

β) i. $E(x) = (B\Gamma)(\Gamma Z) = (f(x) - g(x)) \cdot x = \left(\frac{x^2+1}{e^x} - e^{-x} \right) \cdot x = \frac{x^2}{e^x} \cdot x = \frac{x^3}{e^x}$



ii. Για κάθε $x > 0$ είναι $E'(x) = \frac{3x^2 e^x - x^3 e^x}{(e^x)^2} = \frac{x^2 e^x (3-x)}{(e^x)^2} = \frac{x^2 (3-x)}{e^x}$.

$$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(3-x)}{e^x} \geq 0 \Leftrightarrow 3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

Για κάθε $x \in (0, 3)$ είναι $E'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (3, +\infty)$ είναι $E'(x) < 0$, επειδή η E είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[3, +\infty)$. Η E έχει μέγιστο για $x = 3$.

γ) Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_{\ln 2}^1 h(x) dx = \int_{\ln 2}^1 \frac{f(x) - g(x)}{x} dx = \int_{\ln 2}^1 \frac{x}{e^x} dx = \int_{\ln 2}^1 x e^{-x} dx \Leftrightarrow$

$$E = \int_{\ln 2}^1 x(-e^{-x})' dx = [-x e^{-x}]_{\ln 2}^1 - \int_{\ln 2}^1 (-e^{-x}) dx = -e^{-1} - \frac{1}{e^{\ln 2}} - [-e^{-x}]_{\ln 2}^1 = \dots = \ln\sqrt{2e} - \frac{2}{e} \text{ τ.μ.}$$

31149. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2}$ με $x \in (0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $\ln(1 + f(x)) - \ln(f(x)) > f^2(x) \cdot f(\ln 2)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f ,

τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$ είναι $\ln\left(\frac{27}{4e}\right)$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Για κάθε $x > 0$ είναι $1 + \frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 0$ και επειδή $x^2 > 0$, είναι $f(x) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2} > 0$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x_1} > 1 + \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{x_1}\right) > \ln\left(1 + \frac{1}{x_2}\right)$ (1)

και $x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1^2} > \frac{1}{x_2^2}$ (2). Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (1), (2) προκύπτει ότι

$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f \searrow (0, +\infty)$. (Προτιμήσαμε τον ορισμό μονοτονίας γιατί η παραγωγή φαίνονταν ποιο δύσκολη).

$$\beta) \ln(1+f(x)) - \ln(f(x)) > f^2(x) \cdot f(\ln 2) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1+f(x)}{f(x)}\right) > f^2(x) \cdot f(\ln 2) \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{f(x)}\right) > f^2(x) \cdot f(\ln 2) \Leftrightarrow \frac{\ln\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)}{f^2(x)} > f(\ln 2) \Leftrightarrow$$

$$f(f(x)) > f(\ln 2) \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < \ln 2 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} x > 1.$$

$$\gamma) \text{ Το ζητούμενο εμβαδό είναι } E = \int_{1/2}^1 f(x) dx = \int_{1/2}^1 \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx.$$

Θέτουμε $1+\frac{1}{x}=u$, τότε $-\frac{1}{x^2}dx=du$. Για $x=\frac{1}{2}$ είναι $u=3$ και για $x=1$ είναι $u=2$, οπότε

$$E = -\int_{1/2}^1 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}dx\right) = -\int_3^2 \ln u du = \int_2^3 \ln x(x)' dx = [x \ln x]_2^3 - \int_2^3 u \cdot \frac{1}{u} du = 3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 3 + 2 \Leftrightarrow$$

$$E = \ln 27 - \ln 4 - 1 = \ln 27 - \ln 4e = \ln\left(\frac{27}{4e}\right)$$

31530. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη x_0 που περιέχεται στο διάστημα $(0, 1)$. (Μονάδες 5)

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός x_0 είναι πιο κοντά στο 0 ή στο 1. (Μονάδες 4)

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + \theta)x^3 + 2x - 5}{f(x_0 - \theta)x - 5}$, αν x_0 είναι ο αριθμός του ερωτήματος (α) και θ

ένας θετικός αριθμός. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_f της f , την εφαπτομένη της στο σημείο $A(1, 4)$ και την κατακόρυφη ευθεία $x = 2$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) i. Είναι $f(0) = -2$, $f(1) = 4$, άρα $f(0)f(1) < 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πολυωνυμική, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 + 5$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

ii. Είναι $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{5}{2} - 2 = \frac{5}{8} > 0$, άρα $f\left(\frac{1}{2}\right)f(0) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, σύμφωνα

με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Όμως το x_0 είναι η

μοναδική ρίζα της f , άρα $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, οπότε το x_0 είναι πιο κοντά στο 0.

β) Είναι $x_0 + \theta > x_0 \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_0 + \theta) > f(x_0) = 0$ και $x_0 - \theta < x_0 \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_0 - \theta) < f(x_0) = 0$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + \theta)x^3 + 2x - 5}{f(x_0 - \theta)x - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + \theta)x^{\cancel{3}}}{f(x_0 - \theta)x^{\cancel{1}}} = -\infty.$$

γ) Είναι $f'(1) = 3 + 5 = 8$. Η εφαπτομένη της C_f στο A έχει εξίσωση $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = 8x - 4$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f''(x) = 6x$. Για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι κυρτή στο διάστημα αυτό. Οπότε η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, δηλαδή $f(x) \geq 8x - 4$ για κάθε $x \geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$. Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_1^2 (f(x) - (8x - 4)) dx = \int_1^2 (x^3 + 5x - 2 - 8x + 4) dx = \int_1^2 (x^3 - 3x + 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_1^2 = \dots = \frac{5}{4}.$$

31533. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$, $x \neq 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f . (Μονάδες 9)

β) Αν οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι $x_1 x_2 = -4$. (Μονάδες 6)

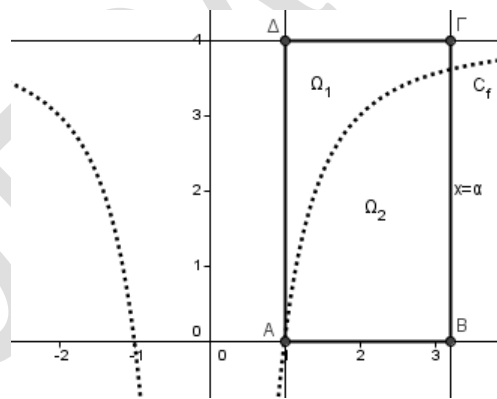
γ) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f (διακεκομμένη γραμμή) και το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ που ορίζεται από τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = \alpha$, $\alpha > 1$ και $y = 4$. Η C_f χωρίζει το ορθογώνιο σε δυο χωρία Ω_1, Ω_2 .

i. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του α , τα εμβαδά $E(\Omega_1)$, $E(\Omega_2)$ των χωρίων.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $E(\Omega_1) = E(\Omega_2)$.

(Μονάδες 5)



Λύση

α) Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \frac{8}{x^3}$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f''(x) = -\frac{24}{x^4} < 0$, οπότε η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{4}{x^2} \right) = 4$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4 - \frac{4}{x^2} \right) = 4$, άρα η ευθεία $y = 4$ είναι ασύμπτωτη της C_f .

β) Επειδή οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ είναι κάθετες, ισχύει ότι

$$f'(x_1)f'(x_2) = -1 \Leftrightarrow \frac{8}{x_1^3} \cdot \frac{8}{x_2^3} = -1 \Leftrightarrow (x_1 x_2)^3 = -64 \Leftrightarrow x_1 x_2 = -4$$

γ) i. Το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ έχει εμβαδό $(AB\Gamma\Delta) = (AB)(A\Delta) = 4(\alpha - 1)$.

$$E(\Omega_2) = \int_1^\alpha f(x) dx = \int_1^\alpha \left(4 - \frac{4}{x^2} \right) dx = \left[4x + \frac{4}{x} \right]_1^\alpha = 4\alpha + \frac{4}{\alpha} - 4 - 4 = 4\alpha + \frac{4}{\alpha} - 8 = \frac{4\alpha^2 - 8\alpha + 4}{\alpha} = \frac{4(\alpha - 1)^2}{\alpha}$$

$$E(\Omega_1) = (AB\Gamma\Delta) - E(\Omega_2) = 4(\alpha-1) - \frac{4(\alpha-1)^2}{\alpha} = 4(\alpha-1)\left(1 - \frac{\alpha-1}{\alpha}\right) = \frac{4(\alpha-1)}{\alpha}.$$

$$\text{ii. } E(\Omega_1) = E(\Omega_2) \Leftrightarrow \frac{4(\alpha-1)}{\alpha} = \frac{4(\alpha-1)^2}{\alpha} \Leftrightarrow 1 = \alpha-1 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

31534. Η παραβολή του διπλανού σχήματος διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η κορυφή της είναι το σημείο $K(2, 2)$ και είναι η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x, x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 1)$, να αποδείξετε ότι $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 1$.

(Μονάδες 6)

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g(x) = x^2 + x + 1 - \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$.

γ) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f για κάθε $x > 0$.

(Μονάδες 6)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x=0$ και $x=\pi$.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Επειδή η f' είναι παραβολή έχει εξίσωση της μορφής $f'(x) = ax^2 + bx + \gamma$. Επειδή η παραβολή έχει μέγιστο είναι $a < 0$. Επειδή η παραβολή διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$. Επειδή η f' έχει μέγιστο στο $x = 2$ που βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, είναι $f''(2) = 0$. Είναι $f''(x) = 2ax + b$, οπότε $f''(2) = 0 \Leftrightarrow 4a + b = 0 \Leftrightarrow b = -4a$ (1).

Επειδή η $C_{f'}$ διέρχεται από το K , ισχύει ότι $f'(2) = 2 \Leftrightarrow 4a + 2b = 2 \Leftrightarrow 4a - 8a = 2 \Leftrightarrow -4a = 2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

και από την (1) είναι $b = 2$, άρα $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x, x \in \mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \Leftrightarrow f'(x) = \left(-\frac{1}{6}x^3 + x^2\right)' \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + c, c \in \mathbb{R}$

Είναι $f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$, άρα $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 1$.

γ) i. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) > f(x) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - \eta\mu x > -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{6}x^3 + x - \eta\mu x > 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{1}{6}x^3 + x - \eta\mu x, x \geq 0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $h'(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 - \sigma\upsilon\eta x$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $\frac{1}{2}x^2 > 0, 1 - \sigma\upsilon\eta x \geq 0$, άρα $h'(x) > 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι

γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) > h(0) \Leftrightarrow \frac{1}{6}x^3 + x - \eta\mu x > 0$

ii. Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_0^\pi |f(x) - g(x)| dx = \int_0^\pi \left| \frac{1}{6}x^3 + x - \eta\mu x \right| dx = \int_0^\pi \left(\frac{1}{6}x^3 + x - \eta\mu x \right) dx =$

$$\left[\frac{x^4}{24} + \frac{x^2}{2} + \sin x \right]_0^\pi = \frac{\pi^4}{24} + \frac{\pi^2}{2} - 1 - 1 = \frac{\pi^4 + 12\pi^2 - 48}{24}$$

31792. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 1, & -1 \leq x < 1 \\ 1 + \frac{(\ln x)^2}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής, αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .

(Μονάδες 7)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}$. Να υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x), g(x)$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2 + x + 1) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + \frac{(\ln x)^2}{x} \right) = 1 = f(1)$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^2 + x + 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x(x-1)}{x-1} = -1$ και

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 + \frac{(\ln x)^2}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\ln x)^2}{x^2 - x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{2x - 1} = 0$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

β) Η f έχει κρίσιμο σημείο το $x_0 = 1$.

Για $-1 < x < 1$ είναι $f'(x) = -2x + 1$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Η f έχει κρίσιμο σημείο το $x = \frac{1}{2}$.

Για $x > 1$ είναι $f'(x) = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln x (2 - \ln x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$.

Η f έχει κρίσιμο σημείο το $x = e^2$.

γ) Έστω $h(x) = f(x) - g(x) = 1 + \frac{(\ln x)^2}{x} - e^{-x}$, $x \in [1, e]$.

Για κάθε $1 \leq x \leq e$ είναι $-1 \geq -x \geq -e \Leftrightarrow e^{-e} \leq e^{-x} \leq e^{-1} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow 1 - e^{-x} > 0$ και επειδή $\frac{(\ln x)^2}{x} \geq 0$, είναι

$h(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, e]$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_1^e h(x) dx = \int_1^e (1 - e^{-x}) dx + \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \left[x + e^{-x} \right]_1^e + \int_1^e (\ln x)^2 (\ln x)' dx \Leftrightarrow$$

$$E = e + e^{-e} - 1 - \frac{1}{e} + \left[\frac{\ln^3 x}{3} \right]_1^e = e + e^{-e} - 1 - \frac{1}{e} + \frac{1}{3} = e + e^{-e} - \frac{2}{3} - \frac{1}{e}$$