

Μελέτη Συναρτήσεων

Άσκηση 1 Να γίνουν τα γραφήματα των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f_1(x) = (x + 1)^2$

2. $f_2(x) = (x^2 + 1)^2$

3. $f_3(x) = \sqrt{x - 1}$

4. $f_4(x) = \sqrt{1 - x}$

Άσκηση 2

1. Να σχεδιάσετε την $f(x) = \ln(x - 1)$. Να εξετάσετε αν υπάρχει αντίστροφη και αν ναι, να την σχεδιάσετε.
2. Να κάνετε το ίδιο, για την συνάρτηση $g(x) = x^2 + 3, x \geq 0$.
3. Να αποδείξετε ότι οι f^{-1}, g έχουν κοινό σημείο, το οποίο είναι και μοναδικό.

Άσκηση 3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

1. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:
(α') $f(x - 1) > f(5 - 2x)$
(β') $f(x^2 + 1) > 0$
(γ') $f(x^2 - 3x + 3) > 3$
2. Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς μία ρίζα.
3. Να σχεδιάσετε την f .

Άσκηση 4 Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Είναι η f συνεχής; Είναι παραγωγίσιμη;

Άσκηση 5 Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τις δύο πρώτες παραγώγους της g .
2. Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
3. Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της g , το πεδίο τιμών της, και να την σχεδιάσετε.¹
5. Να εξετάσετε αν η g αντιστρέφεται, και αν ναι, να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης και να την σχεδιάσετε.

Άσκηση 6 Να γίνει το ίδιο για την συνάρτηση $h(x) = x^3 + x^{-1}$.

Άσκηση 7 Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ (x-2)^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

1. Να εξεταστεί αν η f είναι συνεχής.
2. Να εξεταστεί αν η f είναι παραγωγίσιμη, και να βρείτε τον τύπο της στα σημεία που είναι.
3. Να γίνει το γράφημα της f .

Άσκηση 8 Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f_1(x) = \sin x$
2. $f_2(x) = \sin(3x)$
3. $f_3(x) = 3\sin(x)$

Άσκηση 9 Έστω η συνάρτηση²

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f , και να την σχεδιάσετε.

Άσκηση 10 Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f_1(x) = \eta\mu x$
2. $f_2(x) = \eta\mu(2x)$
3. $f_3(x) = 2\eta\mu(x)$

¹ρυθμός σύγκλισης στο $-\infty$

²Εμφανίζεται συχνά σε προβλήματα στατιστικής και σχετίζεται με την λεγόμενη κανονική κατανομή.

4. $f_4(x) = \eta\mu(x^2)$

Η πλήρης μελέτη μίας συνάρτησης μπορεί να γίνει εξαιρετικά δύσκολο πρόβλημα. Όμως, για συνεχείς και κυρίως για παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τα πράγματα γίνονται αισθητά πιο εύκολα.

Εδώ δεν θα ασχοληθούμε με πολύ δύσκολες περιπτώσεις. Γενικά τα βήματα για την μελέτη μίας συνάρτησης f είναι τα εξής:

1. Πεδίο ορισμού

Είναι πολλές φορές χρήσιμο εδώ να εξετάζονται και άλλες πληροφορίες, όπως αν η f είναι 1-1, άρτια, περιττή.

2. Ρίζες και πρόσημο της f

Η εύρεση ριζών μίας συνάρτησης μπορεί να γίνει πολύ δύσκολο πρόβλημα. Εδώ μας αρκεί να βρεθούν οι ρίζες προσεγγιστικά (π.χ. με την βοήθεια του Θεωρήματος Bolzano).

3. Συνέχεια και Παραγωγισιμότητα

Είναι γνωστό ότι αν f, g συνεχείς ή/και παραγωγίσιμες συναρτήσεις τότε οι $f \pm g$, f/g ($g \neq 0$), $f \circ g$ είναι επίσης συνεχείς ή/και παραγωγίσιμες.

4. Μονοτονία, Ακρότατα

Χρησιμοποιώντας το πρόσημο της πρώτης παραγώγου.

5. Κυρτότητα, Σημεία Καμπής

Χρησιμοποιώντας το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου.

6. Ασύμπτωτες

Εύρεση των ορίων στα άκρα του πεδίου ορισμού, είτε αυτά είναι $\pm\infty$, είτε είναι αριθμοί. Οι ασύμπτωτες βοηθούν πολύ στο γράφημα.

7. Πεδίο Τιμών

Χρησιμοποιώντας όλα τα παραπάνω.

Αν τα παραπάνω έχουν βρεθεί σωστά, τότε είναι σχετικά απλό να σχεδιαστεί η υποκείμενη συνάρτηση.