

Υπολογισμός Παραγώγων

Η παράγωγος είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την μελέτη των συναρτήσεων. Μας βοηθάει στον καθορισμό της μονοτονίας και της κυρτότητας, στον υπολογισμό ορίων (Κανόνας L'Hopital) αλλά ακόμα και σε μεθόδους εύρεσης ριζών (μέθοδος Newton-Raphson).

Εδώ δεν θα ασχοληθούμε με την θεωρία των παραγώγων, αλλά απλά με την εύρεση τους.

- Πολυωνυμικές συναρτήσεις (με εκθέτες πραγματικούς αριθμούς):** Αυτή η κατηγορία συναρτήσεων είναι σχετικά εύκολη στην χρήση και ταυτοχρόνως εξαιρετικά σημαντική (Θεώρημα Taylor, Θεώρημα Stone-Weierstrass). Η παράγωγος εδώ υπολογίζεται εύκολα. Για παράδειγμα

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 - 3x + 2 \implies f'(x) = 2x - 3 \\g(x) &= x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 10 \implies g'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 8x + 5 \\h(x) &= x^{20} - 3x^{12} + 2023 \implies h'(x) = 20x^{19} - 36x^{11}\end{aligned}$$

Ο κανόνας είναι ο εξής. Πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του πολυωνύμου με τον αρχικό εκθέτη του και ύστερα αφαιρούμε μία μονάδα από αυτόν. Αυτό γίνεται για όλους τους όρους. Προσοχή στα πρόσημα.

Η ίδια μέθοδος εφαρμόζεται και για δυνάμεις που ανήκουν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών (τότε δεν έχουμε πια πολυώνυμα)¹:

$$\begin{aligned}f(x) &= x^{-2} - 3x + 2 \implies f'(x) = (-2)x^{-2} - 1 - 3 = -2x^{-3} - 3 = -\frac{2}{x^3} - 3 \\g(x) &= 4x^{-3/2} - 9x^{-1} + 5x^{1/2} \implies g'(x) = 4\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-3/2-1} - 9(-1)x^{-1-1} + 5\frac{1}{2}x^{1/2-1} \implies \\&\implies g'(x) = -6x^{-5/2} + 9x^{-2} + \frac{5}{2}x^{-1/2}\end{aligned}$$

Από τον τύπο $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ και τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας ως την δύναμη $\sqrt{x} = x^{1/2}$ βλέπουμε ότι έχουμε τύπο για την παράγωγο της τετραγωνικής ρίζας

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

¹Υπενθυμίζουμε ότι

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

2. **Λογαριθμικές και εκθετικές συναρτήσεις:** Θα ασχοληθούμε κυρίως με τον νε-
πέριο λογάριθμο και την εκθετική συνάρτηση e^x .

Έστω $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln(x)$. Έχουμε τους εξής τύπους:

$$f'(x) = e^x, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

Δεδομένω ότι $g^{-1}(x) = f(x)$ μπορούμε να βρούμε την παράγωγο της g και με τον
τύπο της παραγώγου αντίστροφης συνάρτησης.²

Στην περίπτωση της εκθετικής συνάρτησης της μορφής a^x , όπου $a > 0$, για να
βρούμε την παράγωγο κάνουμε το εξής:

$$a^x = \exp(\ln a^x) = \exp(x \ln(a)) \implies (a^x)' = \ln(a) \exp(\ln a^x) = \ln(a) a^x$$

3. **Τριγωνομετρικές συναρτήσεις:** Έστω $f(x) = \sin(x)$ και $g(x) = \cos(x)$. Τότε ισχύ-
ουν τα εξής:

$$f'(x) = \cos(x), \quad g'(x) = -\sin(x)$$

Αξίζει να παρατηρηθεί εδώ ότι $f''(x) = -\sin(x) = -f(x)$ και $g''(x) = -\cos(x) = -g(x)$.

4. **Γινόμενα συναρτήσεων:** Έστω f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Τότε ισχύει ο
εξής τύπος για την παράγωγο της συνάρτησης $f \cdot g$.

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Για παράδειγμα, αν $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = x^3$, τότε

$$(f(x)g(x))' = (\sqrt{x})'x^3 + \sqrt{x}(x^3)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}x^3 + \sqrt{x}3x^2 = \frac{x^{5/2}}{2} + 3x^{5/2} = \frac{7x^{5/2}}{2}$$

5. **Πηλίκα συναρτήσεων:** Έστω f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Τότε ισχύει ο εξής
τύπος για την παράγωγο της συνάρτησης $\frac{f}{g}$.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Για παράδειγμα, αν $f(x) = e^x$ και $g(x) = 6x^2$, τότε

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{(e^x)'6x^2 - e^x(6x^2)'}{(6x^2)^2} = \frac{6x^2e^x - 12xe^x}{36x^4} = \frac{e^x(x-2)}{6x^3}$$

²Έστω $f(X)$ αντιστρέψιμη συνάρτηση και $f^{-1}(x)$ η αντίστροφη της. Τότε ισχύει

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

6. **Σύνθεση συναρτήσεων:** Έστω f, g συναρτήσεις, τέτοιες ώστε να ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

$$(f \circ g)' = (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

$$(g \circ f)' = (g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)$$

Για παράδειγμα, αν $f(x) = x - 2$ και $g(x) = x^3$ τότε $f'(x) = 1$ και $g'(x) = 3x^2$, δηλαδή $f'(g(x)) = 1$, $g'(f(x)) = g'(x - 2) = 3(x - 2)^2$. Άρα

$$(f \circ g)' = 1 \cdot 3x^2 = 3x^2$$

$$(g \circ f)' = 3(x - 2)^2 \cdot 1 = 3(x - 2)^2$$

Το ίδιο αποτέλεσμα να προκύψει αν βρούμε πρώτα τις συνθέσεις και μετά παραγωγίσουμε τις καινούργιες συναρτήσεις. Δηλαδή,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = x^3 - 2 \implies (f \circ g)' = 3x^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 2) = (x - 2)^3 \implies (g \circ f)' = 3(x - 2)^2$$

7. **Συναρτήση με πολλούς κλάδους:** Μια τέτοια συνάρτηση είναι της μορφής

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < \alpha \\ f_2(x), & x \geq \alpha \end{cases}$$

όπου α ένας πραγματικός αριθμός και $f_1(x), f_2(x)$ συναρτήσεις. Για παράδειγμα,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$$

(εδώ $\alpha = 0$, $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^3$)

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 1 \\ \sin(x), & x \geq 1 \end{cases}$$

($\alpha = 1$, $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = \sin(x)$)

Μπορεί μία συνάρτηση να έχει και τρεις κλάδους³, δηλαδή

$$h(x) = \begin{cases} x - 1, & x < -1 \\ \cos(x), & -1 \leq x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

³Γενικά όμως είναι σπάνιο να συναντήσει κανείς συναρτήσεις με τρεις ή παραπάνω κλάδους στα πλαίσια του Λυκείου, οπότε δεν θα μελετηθούν αναλυτικά αυτές οι περιπτώσεις.

Για την εύρεση της παραγώγου τέτοιων συναρτήσεων, θα πρέπει να προσέχουμε το εξής.

Ενώ επιδέχονται γενικά παράγωγο, στα σημεία που αλλάζουν τύπο(π.χ. η $f(x)$ στο σημείο 0 και η $g(x)$ στο σημείο 1) πρέπει να εξετάζουμε αν είναι παραγωγίσιμες, χρησιμοποιώντας πλευρικά όρια(γνωστή μεθοδολογία από προηγούμενη θεωρία).

Για παράδειγμα, βλέπουμε ότι για την $f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 0^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

Άρα είναι παραγωγίσιμη στο 0 με παράγωγο ίση με 0.

Στα υπόλοιπα σημεία (σε αυτά δηλαδή που δεν αλλάζει τύπο) υπολογίζουμε την παράγωγο κανονικά.

Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ είναι $f(x) = x^2$ η οποία είναι παραγωγίσιμη, έτσι $f'(x) = 2x$, $x \in (-\infty, 0)$.

Στο διάστημα $[0, \infty)$ είναι $f(x) = x^3$ η οποία επίσης είναι παραγωγίσιμη και $f'(x) = 3x^2$, $x \in [0, \infty)$. Επομένως, η παράγωγος της f είναι

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 3x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Άσκηση 1 Να υπολογιστεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $g(x) = x^3 \cdot \eta\mu(x)$
2. $f(x) = x^{-2} \cdot \sigma\upsilon\nu(x)$
3. $k(x) = (\sigma\upsilon\nu(x) - \sqrt{x}) \cdot x$
4. $l(x) = \ln(1 - x^2)$
5. $a(x) = 3x^2 + x^3 \cos(x)$

Άσκηση 2 Να υπολογιστεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων, στα σημεία που υπάρχει:

1.

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ (x - 2)^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

2.

$$h(x) = \begin{cases} \sin(x), & x \leq 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

3.

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 1 \\ \sin(x), & x \geq 1 \end{cases}$$

4.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < -1 \\ 2x^2 - x, & -1 \leq x < 1 \\ e^x \cos(x), & x \leq 1 \end{cases}$$

Άσκηση 3 Να υπολογιστεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων(σύνθεση):

1. $l(x) = \ln(3x - 1)$

2. $a(x) = 4(x - e^x)^3$

3. $b(x) = e^{x^4+x}$

4. $c(x) = \sqrt{1-x^3}$

5. $k(x) = \ln(\sqrt{x})$

Άσκηση 4 Να γίνει το ίδιο για τις παρακάτω συναρτήσεις:

1.

$$l(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

2.

$$b(x) = \frac{1 - x^2}{x}$$

3.

$$c(x) = \frac{4 - e^{2x}}{e^x}$$

4.

$$h(x) = \frac{\eta\mu(x)}{x^3}$$