

Μία άσκηση στο Πεντάγωνο

Δασκαλόπουλος Κυριάκος
Ηλίας Τσιτουνάς
4 Φεβρουαρίου 2025

Πρόβλημα: Δίνεται πεντάγωνο με κορυφές τα σημεία

$$z_n = \left(\cos \left(\frac{2n\pi}{5} \right), \sin \left(\frac{2n\pi}{5} \right) \right), \quad n = 1, 2, 3, 4, 5$$

Να φέρετε όλες τις διαθέσιμες διαγωνίους, και να αποδείξετε ότι δημιουργείται ένα εσωτερικό πεντάγωνο.

Ποιό είναι το εμβαδόν του μικρού πενταγώνου;

Λύση

Βήμα Α: Εύρεση κορυφών πενταγώνου.

Τα σημεία του πενταγώνου είναι

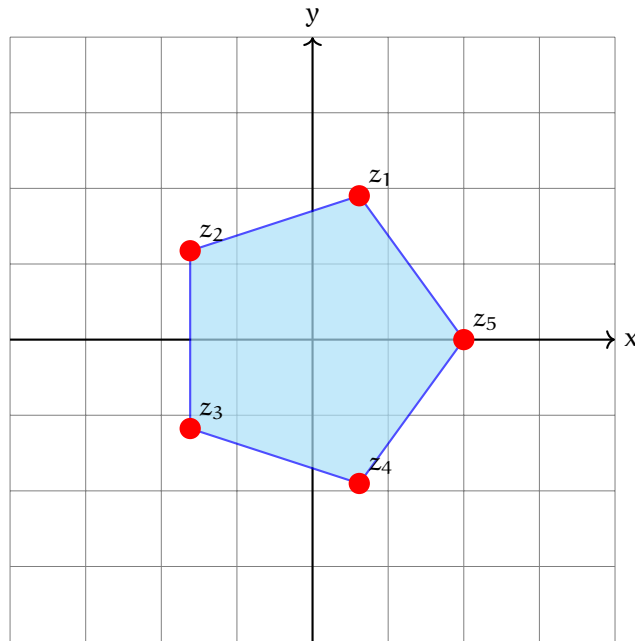
$$z_1 = \left(\cos \left(\frac{2\pi}{5} \right), \sin \left(\frac{2\pi}{5} \right) \right)$$

$$z_2 = \left(\cos \left(\frac{4\pi}{5} \right), \sin \left(\frac{4\pi}{5} \right) \right)$$

$$z_3 = \left(\cos \left(\frac{6\pi}{5} \right), \sin \left(\frac{6\pi}{5} \right) \right) = \left(\cos \left(\pi + \frac{\pi}{5} \right), \sin \left(\pi + \frac{\pi}{5} \right) \right) = \left(-\cos \left(\frac{\pi}{5} \right), -\sin \left(\frac{\pi}{5} \right) \right)$$

$$z_4 = \left(\cos \left(\frac{8\pi}{5} \right), \sin \left(\frac{8\pi}{5} \right) \right) = \left(\cos \left(\pi + \frac{3\pi}{5} \right), \sin \left(\pi + \frac{3\pi}{5} \right) \right) = \left(-\cos \left(\frac{3\pi}{5} \right), -\sin \left(\frac{3\pi}{5} \right) \right)$$

$$z_5 = \left(\cos \left(\frac{10\pi}{5} \right), \sin \left(\frac{10\pi}{5} \right) \right) = (1, 0)$$



Εικόνα Α Το πεντάγωνο με τα σημεία $(\cos(2n\pi/5), \sin(2n\pi/5))$, όπου $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Βήμα Β: Υπολογισμός διαγωνίων πενταγώνου.

Για να βρούμε τις διαγωνίους, εφαρμόζουμε την μεθοδολογία εύρεσης εξίσωσης ευθείας που περνά από δύο σημεία.

Στη γενική περίπτωση, αν $A = (a_1, a_2)$ και $B = (b_1, b_2)$ δύο σημεία και έστω $y = cx + d$ η (μοναδική) ευθεία που περνά από τα A, B .

Τότε, τα c, d βρίσκονται από το σύστημα,

$$\begin{cases} a_2 = ca_1 + d \\ b_2 = cb_1 + d \end{cases}$$

Άρα,

$$c = \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1}, \quad d = \frac{b_2 a_1 - b_1 a_2}{a_1 - b_1}$$

Δηλαδή, η ευθεία θα είναι

$$y = \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1}x + \frac{b_2 a_1 - b_1 a_2}{a_1 - b_1}$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω μεθοδολογία, βρίσκουμε τα εξής:

- Διαγώνιος $z_5 \rightarrow z_2$:

$$y = \frac{-\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)}{1 - \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)}x + \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)}{1 - \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)}$$

- Διαγώνιος $z_5 \rightarrow z_3$:

$$y = \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1}x + \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1}x - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1}$$

- Διαγώνιος $z_1 \rightarrow z_3$:

$$y = \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}x + \frac{-\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$$

- Διαγώνιος $z_1 \rightarrow z_4$:

$$y = \frac{-\sin(\frac{3\pi}{5}) - \sin(\frac{2\pi}{5})}{-\cos(\frac{3\pi}{5}) - \cos(\frac{2\pi}{5})}x + \frac{-\cos(\frac{3\pi}{5})\sin(\frac{2\pi}{5}) + \cos(\frac{2\pi}{5})\sin(\frac{3\pi}{5})}{-\cos(\frac{3\pi}{5}) - \cos(\frac{2\pi}{5})}$$

- Διαγώνιος $z_2 \rightarrow z_4$:

$$y = \frac{-\sin(\frac{3\pi}{5}) - \sin(\frac{4\pi}{5})}{-\cos(\frac{3\pi}{5}) - \cos(\frac{4\pi}{5})}x + \frac{-\sin(\frac{4\pi}{5})\cos(\frac{3\pi}{5}) + \cos(\frac{4\pi}{5})\sin(\frac{3\pi}{5})}{-\cos(\frac{3\pi}{5}) - \cos(\frac{4\pi}{5})}$$

Η εύρεση κοινών σημείων ευθειών είναι γενικά εύκολο πρόβλημα, στην περίπτωση μας όμως, είναι αρκετά χρονοβόρο.

Ως εκ τούτου, θα υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων, και ύστερα θα βρούμε τα κοινά τους σημεία.

Να σημειωθεί ότι έτσι δεν θα έχουμε ακριβή υπολογισμό του ζητούμενου, αλλά προσεγγιστικό.

Οι κορυφές λοιπόν του πενταγώνου γίνονται

$$z_1 = (0.309, 0.951)$$

$$z_2 = (-0.809, 0.587)$$

$$z_3 = (-0.809, -0.588)$$

$$z_4 = (0.309, -0.951)$$

$$z_5 = (1, 0)$$

Οι διαγώνιοι έτσι είναι

- Διαγώνιος $z_5 \rightarrow z_2$:

$$y = -0.325x + 0.325$$

- Διαγώνιος $z_5 \rightarrow z_3$:

$$y = 0.325x - 0.325$$

- Διαγώνιος $z_1 \rightarrow z_3$:

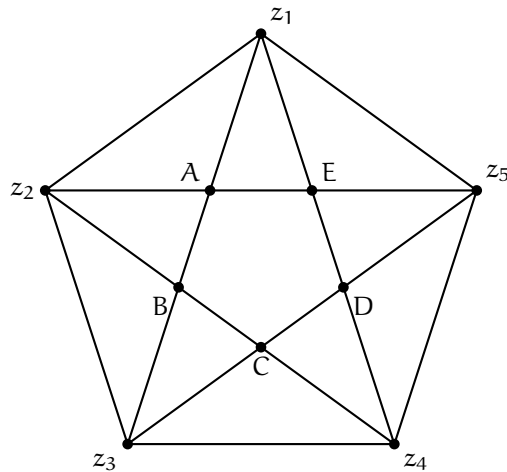
$$y = 1.376x + 0.526$$

- Διαγώνιος $z_1 \rightarrow z_4$:

$$x = 0.309$$

- Διαγώνιος $z_2 \rightarrow z_4$:

$$y = -1.376x - 0.526$$



Εικόνα Β Μία άλλη όψη του πενταγώνου, από διαφορετική γωνία.

Οι κορυφές του εσωτερικού πενταγώνου, βρίσκονται λύνοντας τα αντίστοιχα συστήματα των διαγωνίων. Για παράδειγμα, για να βρούμε το σημείο A, λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y = -0.325x + 0.325 \\ y = 1.376x + 0.526 \end{cases}$$

$$1.376x + 0.526 = -0.325x + 0.325 \Rightarrow 1.376x + 0.325x = 0.325 - 0.526 \Rightarrow 1.701x = -0.201 \Rightarrow x = -0.11816$$

$$y = -0.325 \times (-0.11816) + 0.325 \Rightarrow y = 0.0384 + 0.325 \Rightarrow y = 0.3634$$

Άρα είναι $A = (-0.11816, 0.3634)$. Όμοια, βρίσκουμε

$$B = (-0.38227, 0), \quad C = (-0.11816, -0.3634), \quad D = (0.309, -0.22457), \quad E = (0.309, 0.22457)$$

Για να βρούμε λοιπόν το εμβαδόν του εσωτερικού τριγώνου, αρκεί να το χωρίσουμε σε τρία τρίγωνα, τα AED, ABD και BCD, και να υπολογίσουμε τα επιμέρους εμβαδά με την βοήθεια του τύπου

$$E_{ABC} = \frac{1}{2} \det(\vec{AB}, \vec{BC})$$

Έχουμε λοιπόν τα εξής:

- Τρίγωνο AED: Ξέρουμε ότι $AE = (0.42716, -0.13883)$ και $AD = (0.42716, -0.58797)$.

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$\begin{aligned} E_{AED} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0.42716 & -0.13883 \\ 0.42716 & -0.58797 \end{vmatrix} \\ \Rightarrow E_{AED} &= \frac{0.1918546424}{2} = 0,0959273212 \end{aligned}$$

- Τρίγωνο ABD: Είναι $AB = (-0.26441, -0.3634)$ και $BD = (0.69127, -0.22457)$.

Άρα

$$\begin{aligned} E_{ABD} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -0.26441 & -0.3634 \\ 0.69127 & -0.22457 \end{vmatrix} \\ \Rightarrow E_{ABD} &= \frac{0.3105860717}{2} = 0,15529303585 \end{aligned}$$

- Τρίγωνο BDC: Είναι $BC = (0,26411, -0.3634)$ και BD γνωστό από πριν.

Άρα

$$E_{BDC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0,26411 & -0.3634 \\ 0.69127 & -0.22457 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow E_{ABD} = \frac{0.191896335}{2} = 0,0959481675$$

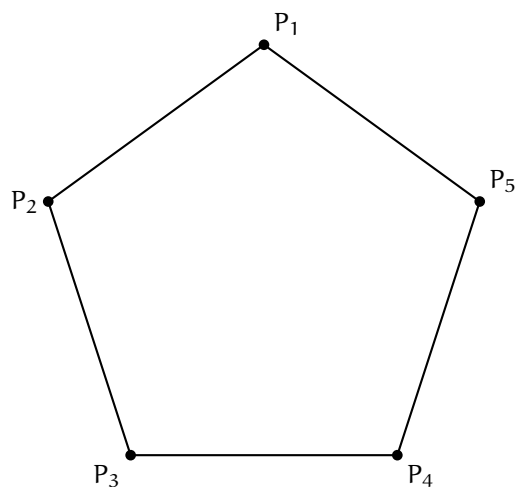
Άρα το εμβαδόν του εσωτερικού πενταγώνου είναι

$$E = E_{AED} + E_{ABD} + E_{BDC} = 0,0959273212 + 0,15529303585 + 0,0959481675 = 0,34716852455$$

Γεωμετρικά

Οι αποδείξεις βρέθηκαν στο <https://sites.math.washington.edu/~king/coursedir/m444a02/class/11-18-penta-answers.html>.

Έστω το κανονικό πεντάγωνο $P_1 \rightarrow P_5$. Γνωρίζουμε ότι κάθε γωνία του είναι 108° (αφού ένα εγγεγραμμένο σε κύκλο πεντάγωνο, τον χωρίζει σε 5 ίσα τόξα, και κάθε γωνία του είναι εγγεγραμμένη στο άθροισμα τριών τέτοιων τόξων).



Σχέση πλευράς-διαγωνίου

Θα αποδείξουμε ότι σε κάθε κανονικό πεντάγωνο, η διαγώνιος και η πλευρά του βρίσκονται σε χρυσή τομή, δηλαδή ισχύει η σχέση

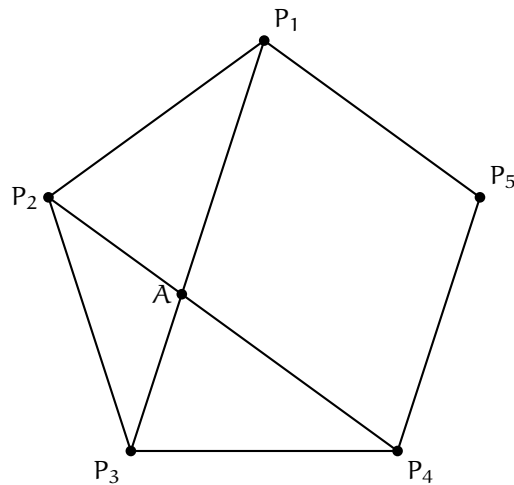
$$\frac{P_1P_3}{P_1P_2} = \phi$$

- **Βήμα A:** Κάθε διαγώνιος είναι παράλληλη στην απέναντι πλευρά.

Ξέρουμε ότι η γωνία $P_1P_5P_4$ είναι 108° . Επίσης η γωνία P_5P_4A είναι 72° , ως εγγεγραμμένη που βλέπει σε τόξο 142° .

Επομένως, η εντός επι τα αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές, κάτι που σημαίνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα P_4P_2 και P_5P_1 είναι παράλληλες.

- **Βήμα Β:** Από τα παραπάνω, το πεντάγωνο $P_1P_5P_4P_2$ είναι παραλληλόγραμμο. Όμως, ισχύει ότι $P_1P_5 = P_5P_4$ ως πλευρές κανονικού πενταγώνου. Τελικά το $P_1P_5P_4P_2$ είναι ρόμβος.



- **Βήμα Γ:**

Αφού το τετράπλευρο $P_1AP_4P_5$ είναι ρόμβος, ισχύει $P_1A = AP_4 = P_4P_5 = P_5P_1$.

Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα $P_1P_3P_4$ και AP_3P_4 είναι όμοια, καθώς έχουν και τις τρεις γωνίες ίσες αντίστοιχα¹.

Από την συνθήκη ομοιότητας έχουμε

$$\frac{P_3P_4}{P_3A} = \frac{P_1P_4}{P_3P_4} \implies P_3A \times P_1P_4 = (P_3P_4)^2$$

Έστω τώρα $P_3P_4 = s$, $P_1A = x$ και $P_1P_4 = d$. Τότε είναι $P_3A = P_1P_3 - P_1A = d - x$ (αφού $P_3P_1 = P_1P_4$) και $x = s$ (αφού λόγω της συνθήκης του ρόμβου, ισχύει $P_1A = P_1P_5 = s$), δηλαδή

$$(d - x) \times d = s^2 \implies d^2 - dx - s^2 = 0 = d^2 - sd - s^2 \implies$$

$$d_1 = \frac{s + \sqrt{s^2 + 4s^2}}{2}, \quad d_2 = \frac{s - \sqrt{s^2 + 4s^2}}{2} \implies$$

$$d_1 = \frac{s + s\sqrt{5}}{2}, \quad d_2 = \frac{s - s\sqrt{5}}{2} \implies$$

$$\frac{d_1}{s} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{d_2}{s} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Η λύση d_2 απορρίπτεται καθώς είναι αρνητική, και ένα γεωμετρικό μέγεθος είναι πάντα θετικό.

Τελικά έχουμε ότι

$$\frac{d}{s} = \phi$$

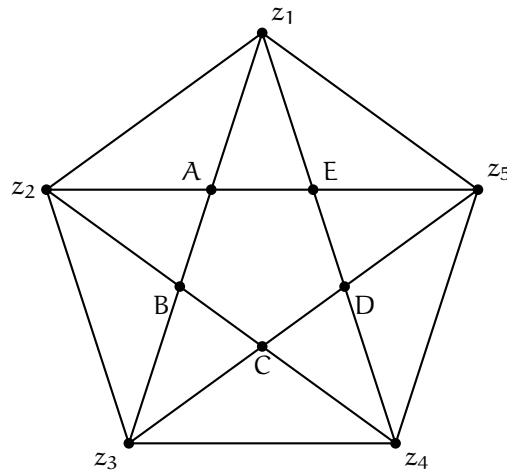
,δηλαδή η πλευρά και η διαγώνιος κανονικού πενταγώνου βρίσκονται σε χρυσή αναλογία.

¹Η γωνία $\hat{P}_1P_3P_4$ είναι κοινή, οι γωνίες $\hat{AP}_3P_4$ και $\hat{P}_3P_1P_4$ είναι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο και άρα ίσες. Επομένως αφού έχουν δύο γωνίες αντίστοιχα ίσες, θα έχουν και την τρίτη.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι

$$s = \phi^2 s'$$

,όπου s η πλευρά του πενταγώνου και s' η πλευρά του εσωτερικού πενταγώνου.



Προς τούτο, θα χρειαστούμε τις εξής σχέσεις:

-

$$d = \phi s \quad (0.1)$$

,η οποία αποδείχθηκε προηγουμένως.

- Θέτουμε $d_A = Az_5$ και $d_B = Az_2$, άρα $d = d_A + d_B$. Τότε

1.

$$d_B = \phi s' \quad (0.2)$$

Απόδειξη. Το τρίγωνο z_1AE είναι ένα χρυσό τρίγωνο, με $z_1A = z_1E$ άρα $z_1A = \phi s'$.

Επίσης, το τρίγωνο z_1Az_2 είναι ισοσκελές με $z_1A = z_2A$ δηλαδή $z_1A = d_B$.
Έτσι έπεται το ζητούμενο. □

2.

$$d_A = \phi d_B \quad (0.3)$$

Απόδειξη. Το τρίγωνο Az_1z_5 είναι ένα χρυσό τρίγωνο, με $z_5A = z_5z_1 \implies d_A = z_5z_1$ άρα $d_A = \phi z_1A$.

Όμως, όπως δείξαμε παραπάνω, $z_1A = d_B$, οπότε έπεται το ζητούμενο. □

Έχοντας τις (0.1), (0.2), (0.3), μπορούμε να γράψουμε

$$d = d_A + d_B \implies d = \phi d_B + d_B = (\phi + 1)d_B = (\phi + 1)\phi s' \implies \phi s = (\phi + 1)\phi s'$$

Απλοποιώντας το ϕ , και αντικαθιστώντας $\phi^2 = \phi + 1$, είναι τελικά

$$s = \phi^2 s'$$

Σαν τελευταίο βήμα, θα αποδείξουμε τον γενικό τύπο για εμβαδόν πενταγώνου, γνωρίζοντας την πλευρά.

Ξέρουμε ότι ένα πεντάγωνο, που εγγράφεται σε κύκλο χωρίζεται σε 5 ισοσκελή καίσα τρίγωνα, τα οποία έχουν τις προς τη βάση γωνίες ίσες με 54° . Οπότε, αρκεί να υπολογίσουμε το εμβαδόν του ενός.

Φέρνουμε το ύψος από το κέντρο του πολυγώνου στην αντίστοιχη πλευρά. Τότε, προκύπτουν δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα. Το καθένα έχει εμβαδό

$$E = \frac{1}{2} s \sin(54^\circ) = \frac{sr \sin(54^\circ)}{4}$$

Επομένως, συνολικά έχουμε

$$E = \frac{5sr \sin(54^\circ)}{2}$$

Τελικά το εμβαδόν του εσωτερικού πενταγώνου είναι

$$E_{\epsilon\sigma} = \frac{5s'r' \sin(54^\circ)}{2}$$

Εδώ βλέπουμε ότι εισέρχεται και μια επιπλέον μεταβλητή, η r' η οποία είναι άγνωστη, οπότε χρειάζεται να γράψουμε το εμβαδόν με άλλο τρόπο.

Επιτρέφοντας στην γενική περίπτωση, αντί για το ημίτονο, θα χρησιμοποιήσουμε την εφαπτομένη, και έτσι είναι

$$E_{\tau\rho} = \frac{1}{2} s \frac{s \tan(54^\circ)}{2} = \frac{s^2 \tan(54^\circ)}{8}$$

Άρα, το εμβαδόν του πενταγώνου γράφεται ως

$$E_{\pi} = 10 \frac{s^2 \tan(54^\circ)}{8} = \frac{5s^2 \tan(54^\circ)}{4} = \frac{5s^2}{4 \tan(36^\circ)}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση $s = \phi^2 s'$, έχουμε

$$E_{\pi} = \frac{5s^2}{4 \tan(36^\circ)} = \frac{5\phi^4 (s')^2}{4 \tan(36^\circ)}$$

Συμπέρασμα: Καταλήγουμε λοιπόν, ότι το εμβαδόν του εσωτερικού πενταγώνου που δημιουργείται από τις τομές των διαγωνίων ενός πενταγώνου, σχετίζεται με το εμβαδόν του τελευταίου μέσω του τύπου

$$E_{\pi'} = \frac{E_{\pi}}{\phi^4}$$

,όπου $E_{\pi'}$ είναι το εμβαδόν του εσωτερικού πενταγώνου. Κλείνοντας, είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε το εξής:

Για την πλευρά του πενταγώνου της άσκησης, έχουμε

$$z_1 z_5 = \sqrt{(0.30902 - 1)^2 + (0.95106 - 0)^2} = \sqrt{(-0.69098)^2 + (0.95106)^2} = \sqrt{1.381968484} = 1.1755715563078$$

Οπότε περίπτωση μας είναι $r = 1, s = 1.1755715563078$, οπότε και $s' = \frac{1}{\phi^2}$.

Επομένως, το εμβαδόν του εσωτερικού πενταγώνου είναι

$$E_{\pi'} = \frac{E_{\pi}}{\phi^4} = \frac{5s^2}{4 \tan(36^\circ) \phi^4} = \frac{5 \times (1.1755715563078)^2}{4 \times 0.7265 \times (1.618)^4} = 0.346943$$

Αν συγκρίνουμε την τιμή που βρήκαμε με την προσέγγιση του A' μέρους, το σφάλμα είναι ελάχιστο, για την ακρίβεια

$$\Sigma = |T_\theta - T_\pi| = |0.346943 - 0,347168| = 0.000225$$

Όπως βλέπουμε, το σφάλμα είναι ελάχιστο.

Προφανώς, η ευκολότερη μέθοδος είναι η θεωρητική, καθώς μας παρέχει έναν τύπο, τον οποίο μπορούμε να χρησιμοποιούμε εύκολα, σε αντίθεση με την προσεγγιστική μέθοδο, η οποία δεν μας παρέχει γενικό τύπο, και πρέπει να γίνεται εκ νέου σε κάθε περίπτωση.

Το μόνο μειονέκτημα της θεωρητικής μεθόδου είναι η δυσκολία της απόδειξης.